Höhere Mathematik 1 für die Fachrichtung Physik – Probeklausur

Notenschlüssel: 30–26 **1,0**; 25–24 **1,3**; 23–22 **1,7**; 21–20 **2,0**; 19–18 **2,3**; 17–16 **2,7**; 15–14 **3,0**; 13–12 **3,3**; 11–10 **3,7**; 9–8 **4,0**; 7–0 **5,0**

Aufgabe 1 (3+1+3+3 Punkte)

a) Zeigen Sie für jedes $m, n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{m} (k+j) = \frac{1}{m+2} \prod_{j=0}^{m+1} (n+j).$$

b) Berechnen Sie

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-5)^k}{6^k}.$$

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n} x^{2n}.$$

d) Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge (a_n) gegeben durch

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2+n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lösung.

a) Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion über n. Sei zunächst $n = 1$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} \prod_{j=0}^{m} (k+j) = \prod_{j=0}^{m} (1+j) = \frac{1}{m+2} \prod_{j=0}^{m+1} (1+j).$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{m} (k+j) = \frac{1}{m+2} \prod_{j=0}^{m+1} (n+j)$ gilt. Daraus und mit einer Indexverschiebung im Produkt folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{j=0}^{m} (k+j) &= \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{m} (k+j) + \prod_{j=0}^{m} (n+1+j) \\
&= \frac{1}{m+2} \prod_{j=0}^{m+1} (n+j) + \prod_{j=0}^{m} (n+1+j) \\
&= \frac{n}{m+2} \prod_{j=0}^{m} (n+1+j) + \prod_{j=0}^{m} (n+1+j) \\
&= \frac{n+m+2}{m+2} \prod_{j=0}^{m} (n+1+j) \\
&= \frac{1}{m+2} \prod_{j=0}^{m+1} (n+1+j).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus dem Prinzip der vollständigen Induktion.

b) Mit der Formel für die geometrische Reihe berechnen wir

$$\sum_{k=4}^{\infty}\left(-\frac{5}{6}\right)^k = \left(-\frac{5}{6}\right)^4 \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{6}\right)^k = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{1+\frac{5}{6}} = \frac{5^4}{11\cdot 6^3}.$$

c) Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n} x^{2n}} = \limsup_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-1} x^2 = \frac{x^2}{2} < 1 \iff |x| < \sqrt{2}.$$

Damit besitzt die Potenzreihe den Konvergenzradius $\sqrt{2}$. Für $x = \pm\sqrt{2}$ gilt

$$\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n} x^{2n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n} \to \mathrm{e}^{1/2} \neq 0$$

für $n \to \infty$. Da die Reihenglieder in diesem Fall keine Nullfolge bilden, ist die Reihe in diesem Fall divergent. Es folgt, dass die Potenzreihe genau dann konvergiert, wenn $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ gilt.

Alternative zur Bestimmung des Konvergenzradius. Setze

$$a_n = \begin{cases} \left(2+\frac{2}{n}\right)^{-n/2}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Es gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also hat die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius $\sqrt{2}$.

d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2+n} = \left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2} \left(\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = b_n \sqrt[n]{b_n},$$

wobei wir $b_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2}$ setzen. Als Teilfolgen von $\left(\left(1+\frac{\pm 1}{n}\right)^n\right)_n$ erhalten wir $b_{2n} \to \mathrm{e}$ und $b_{2n+1} \to \mathrm{e}^{-1}$ für $n \to \infty$. Insbesondere ist die Folge (b_n) beschränkt und es folgt mit dem Sandwichkriterium $\sqrt[n]{b_n} \to 1$ für $n \to \infty$. Damit erhalten wir $a_{2n} \to \mathrm{e}$ und $a_{2n+1} \to \mathrm{e}^{-1}$ für $n \to \infty$. Die Menge der Häufungswerte vom (a_n) lautet $\{\mathrm{e}, \mathrm{e}^{-1}\}$.

Alternative. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n \leq \varepsilon n^2$ für alle $n \geq n_0$ (zum Beispiel $n_0 = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil$). Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt folglich

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2+n} \leq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(1+\varepsilon)n^2}$$

Wir erhalten mit $n \to \infty$

$$\mathrm{e} \leq \liminf_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2+n} \leq \limsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2+n} \leq \mathrm{e}^{1+\varepsilon}.$$

Betrachten wir noch $\varepsilon \to 0$, so folgt

$$\liminf_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2+n} = \limsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2+n} = \mathrm{e},$$

woraus man dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \mathrm{e}$ erhält. Analog kann man mit dieser Methode auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \mathrm{e}^{-1}$ zeigen. □

Aufgabe 2 (4+3+3 Punkte)

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t \cos(nt)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [0,1],$$

gegeben. Untersuchen Sie die Funktionenfolge (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. *Hinweis:* partielle Integration.

b) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f''(t) \geq 0$ für alle $t \in I$. Seien $a, b, x \in I$ und es gelte $a < b$ sowie $x \in (a,b)$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to \pi/2} \left(\tan(x) + \frac{1}{x - \pi/2} \right).$$

Lösung.

a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Mit partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^t \cos(nt)\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{n} \int_0^x \mathrm{e}^t \sin(nt)\,\mathrm{d}t + \left[\frac{1}{n}\mathrm{e}^t \sin(nt)\right]_0^x \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^x \mathrm{e}^t \sin(nt)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\mathrm{e}^x \sin(nx).\end{aligned}$$

Mit der Abschätzung $|\sin(x)| \leq 1$ und der Monotonie der Exponentialfunktion erhalten wir damit

$$|f_n(x)| = \left| \int_0^x \mathrm{e}^t \cos(nt)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\mathrm{e}^x \leq \frac{2\mathrm{e}}{n} \to 0$$

für $n \to \infty$. Also konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig und somit auch punktweise gegen 0.

Alternative. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Mit partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}f_n(x) &= n \int_0^x \mathrm{e}^t \sin(nt)\,\mathrm{d}t + \left[\mathrm{e}^t \cos(nt)\right]_0^x \\ &= n \int_0^x \mathrm{e}^t \sin(nt)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x \cos(nx) - 1 \\ &= -n^2 \int_0^x \mathrm{e}^t \cos(nt)\,\mathrm{d}t + \left[n\mathrm{e}^t \sin(nt)\right]_0^x + \mathrm{e}^x \cos(nx) - 1 \\ &= -n^2 f_n(x) + n\mathrm{e}^x \sin(nx) + \mathrm{e}^x \cos(nx) - 1.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{1+n^2} \left(n\mathrm{e}^x \sin(nx) + \mathrm{e}^x \cos(nx) - 1\right) \right| \leq \frac{n+2}{1+n^2} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig in x ist.

b) Nach dem Mittelwertsatz existieren $\xi_1 \in (a,x)$ und $\xi_2 \in (x,b)$ mit

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_1) \quad \text{und} \quad \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(\xi_2).$$

Da $f''(t) \geq 0$ für alle $t \in I$ gilt, ist f' monton wachsend. Wegen $\xi_1 < x < \xi_2$ folgt daher $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ und wir erhalten wie gewünscht

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

c) Für alle $x \in (0,\pi) \setminus \{\pi/2\}$ gilt

$$\tan(x) + \frac{1}{x - \pi/2} = \frac{\sin(x)(x-\pi/2) + \cos(x)}{\cos(x)(x-\pi/2)}.$$

Wir definieren $f, g\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sin(x)(x-\pi/2) + \cos(x)$ und $g(x) = \cos(x)(x-\pi/2)$ für $x \in (0,\pi)$. Die Funktionen f und g sind beliebig oft differenzierbar und wir berechnen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)(x-\pi/2) + \sin(x) - \sin(x) = \cos(x)(x-\pi/2), \\ f''(x) &= -\sin(x)(x-\pi/2) + \cos(x), \\ g'(x) &= -\sin(x)(x-\pi/2) + \cos(x), \\ g''(x) &= -\cos(x)(x-\pi/2) - 2\sin(x) \end{aligned}$$

für $x \in (0,\pi)$. Wir haben

$$\lim_{x\to\pi/2} f(x) = \lim_{x\to\pi/2} f'(x) = \lim_{x\to\pi/2} g(x) = \lim_{x\to\pi/2} g'(x) = 0$$

und $\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{0}{-2} = 0$. Die Regel von l'Hospital liefert somit

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0. \qquad \square$$

Aufgabe 3 (2+2+3+3 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, (ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

c) Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \sin(x)\frac{1-y(x)^2}{2y(x)}, \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

Lösung.

a) Mit der Substitution $x = \arctan(t)$ erhalten wir

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \arctan(1) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

1. Alternative. Es gilt

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x = \big[\tan(x)\big]_0^{\pi/4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

2. Alternative. Es gilt mit partieller Integration

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \sin(x)\frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x + \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

b) (i) Für alle $t \in [1,\infty)$ gilt $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \le \frac{1}{t^2}$. Das uneigentlich Integral $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium ist also auch das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ absolut konvergent.

(ii) Für $R > 1$ berechnen wir mit partieller Integration

$$\int_1^R \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^R \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{\sin(R)}{R} - 1.$$

Wegen $\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \le \frac{1}{t^2}$ für alle $t \in [1,\infty)$, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ wie in Teil (i). Außerdem gilt $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{\sin(R)}{R} = 0$. Somit ist das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^R \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ konvergent.

c) Durch Trennung der Variablen erhalten wir

$$\begin{aligned}
1 - \cos(x) &= [-\cos(t)]_0^x \\
&= \int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{y(x)} \frac{2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[-\log(t^2-1)\Big]_{\sqrt{2}}^{y(x)} \\
&= -\log(y(x)^2 - 1).
\end{aligned}$$

Wir erhalten durch Auflösen dieser Gleichung $y(x)^2 - 1 = \mathrm{e}^{\cos(x)-1}$ und somit $y(x) = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{\cos(x)-1}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □