Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis

UNBENOTETE PROBEKLAUSUR

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

◯ HM I ◯ HM II ◯ HM III Klausur im ◯ Frühjahr ◯ Herbst 20____

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:

Blattanzahl	Punkte A. 1	Punkte A. 2	Punkte A. 3	Punkte A. 4	Summe

Das ist ein Open-Book Exam.
Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Bearbeitungsblatt.
Erlaubte Hilfsmittel: Vorlesungszusammenfassung, Übungsblätter der Vorlesung und deren Lösungen, eigene Mitschriebe, Bücher, Formelsammlung auf Ilias.

Führen Sie folgende Schritte vor dem Hochladen aus:

1. Füllen Sie dieses Deckblatt mit Namen, Vornamen und Matrikelnummer aus, kreuzen Sie „HM I", „HM II" bzw. „HM III" und „Frühjahr" bzw. „Herbst" an und vervollständigen Sie die Jahreszahl.
2. Tragen Sie auf jedem Bearbeitungsblatt die **Nummer derjenigen Aufgabe ein, die Sie auf diesem Blatt bearbeiten**. Versehen Sie den Kopf des Blattes außerdem mit Name, Vorname und Matrikelnummer.
3. Verwenden Sie keine Bleistifte und keine rote Farbe.
   Doppelbearbeitungen werden nicht korrigiert. Streichen Sie ungültige Lösungswege.

Unterschreiben Sie diese Erklärung:

1. Mit dem Upload meiner Klausur bestätige ich, dass ich die Klausur selbstständig und ohne die Hilfe Dritter verfasst habe.
2. Ebenso versichere ich, dass ich die Klausur ausschließlich unter Verwendung der von der Prüferin / von dem Prüfer freigegebenen Hilfsmittel erstellt haben.
3. Mir ist bekannt, dass die Prüfung mit der Note 5,0 „nicht ausreichend" oder mit „nicht bestanden" bewertet wird, wenn ich das Ergebnis der Erfolgskontrolle durch Täuschung oder Benutzung nicht zugelassener Hilfsmittel beeinflusse oder selbiges versuche und dass ich in schwerwiegenden Fällen von der Durchführung weiterer Erfolgskontrollen ausgeschlossen werden kann.
4. Sofern ich die Klausur nicht rechtzeitig hochlade oder auf anderen Weg einreiche, ist mir bewusst, dass von der Korrektur der Klausur abgesehen werden kann und die Leistung in diesen Fällen als mit der Note 5,0 „nicht ausreichend" beziehungsweise mit „nicht bestanden" bewertet gilt.

____
Datum, Name

Institut für Analysis
Arbeitsgruppe Angewandte Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann

WS2020/21
13.02.2021

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Übungsklausur

Aufgabe 1: [Diverses: 4+6+4+6=20 Punkte] Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind. Begründen Sie ihre Antwort.

(a) Es existiert ein ein $q \in \mathbb{Q}$ so, dass für $z = e^{2\pi i q}$ die Menge
$$H = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-i-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \right\}$$
alle Häufungswerte der Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält.
Hinweis: Skizzieren Sie die Menge H.

(b) Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \operatorname{sgn}(x)\ln(1 + |x|)$. Beachten Sie, dass $\operatorname{sgn}(x)$ das Vorzeichen von x bezeichnet. Es ist
$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

i) Die Funktion g ist auf $[-1, 1]$ differenzierbar.

ii) Die Funktion g ist auf $[-1, 1]$ zweimal differenzierbar.

(c) Ist $f \in C^2(\mathbb{R})$ beschränkt, so ist die Menge $M := \{x \in [0, 1] : f \text{ hat in x ein lokales Maximum }\}$ abgeschlossen.

(d) Die Funktionsfolge $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit
$$f_n(x) = \frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{1 + \exp(-2nx)} \quad \text{für } x \in [-1, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

i) konvergiert punktweise auf dem Interval $[-1, 1]$,

ii) konvergiert gleichmäßig auf dem Interval $[-1, 1]$.

Aufgabe 2: [8+6+6=20 Punkte] Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung
$$x \mapsto \max(f(x), g(x)) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{falls } f(x) \leq g(x) \end{cases},$$
ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

(b) Falls $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, dann ist f ist auf $\mathbb{R}$ beschränkt.

(c) Falls $\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x = 0$, dann ist $f = g$ auf dem Interval $[-1, 1]$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3: [3+3+3+4+7=20 Punkte] Entscheiden Sie bei den folgenden Grenzwerten (bzw. der Reihe bzw. dem uneigentlichen Integral), ob diese existieren (bzw. konvergieren) und berechnen Sie sie gegebenenfalls:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{2021}-1}{1-x^{2020}}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2n}{n^2(1+n)^2}$,

(e) $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 4: [8+6+6=20 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das uneigentliche Integral

$$2\int_0^\infty t^{2n+1}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\lim_{R\to\infty}\int_0^R t^{2n+1}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

existiert und den Wert $n!$ hat.
Hinweis: Definieren Sie $\alpha_n := 2\int_0^\infty t^{2n+1}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ und zeigen Sie zunächst $\alpha_n = n\,\alpha_{n-1}$.

(b) Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \sin(x)e^{-x}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,\pi/4)$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0,\infty)$ gilt:

$$\left|\sin(x)e^{-x} - \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}\right| \leq |x-\pi/4|^2\,.$$

Viel Erfolg!

Anleitungen zum Scannen der Klausur:
Anleitung zum Scannen (Android Smartphone): Hier klicken.
Anleitung zum Scannen (Apple Geräte): Hier klicken,
Anleitung Upload-Klausur (Schritt 2): Hier klicken.

Kontakt bei Problemen während der Klausur:

1) MS-Teams Kurs zur Vorlesung (Kanal: Kontakt während der Klausur): Hier klicken.

2) E-mail Kontak: marvin.schulz@kit.edu,

3) Telefon Nummer: Nur während der Hauptklausur,

4) Zoom - Meeting:Hier klicken.