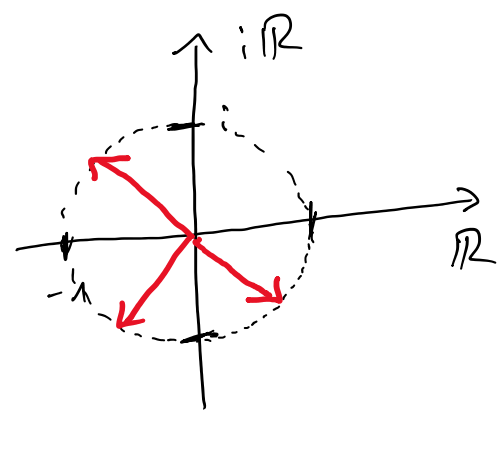
Musterlösung zur Probeklausur HM1 Physik WS 20\21

A1)

a) $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|q|=1$ $(q\in\mathbb{C})$

$H := \{ \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-i-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \}$



$q^n = e^{i2\pi\alpha n}$ $\alpha\in\mathbb{Q}$ O.BdA $\alpha<1$

$= e^{i2\pi\frac{m}{t}n}$

Betrachte die TF $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k \bmod t = 0$

$\Rightarrow q^{n_k} = e^{i2\pi mk} = 1 \ \forall k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 1$ ist HW der Folge! ↯

Die Aussage ist also falsch!

Schwieriger Fall (Nicht gefragt)

Falls $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist jedes $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|=1$ ein HW! ↯

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ex. eine Folge $\alpha_m\to\alpha$ mit $\alpha_m\in\mathbb{Q}$.

Die Folge $(e^{i2\pi\alpha_m n})_{n\in\mathbb{N}}$ hat HW $z=1$ d.h in $U_{\varepsilon/2}(1)$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

Sei $z_{m,N} = e^{i2\pi\alpha_m N} \in U_{\varepsilon/2}(1)$ ein solches Folgenglied, dann ist

$$|e^{i2\pi\alpha N}-1| = |e^{i2\pi\alpha N} - e^{i2\pi\alpha_m N} + e^{i2\pi\alpha_m N} - 1|$$

$$\underset{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} \underbrace{|e^{i2\pi\alpha N} - e^{i2\pi\alpha_m N}|}_{\underset{m\geq N_\varepsilon}{\leq \varepsilon/2}} + \underbrace{|e^{i2\pi\alpha_m N}-1|}_{\leq\varepsilon/2}$$

$$\leq \varepsilon$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig $\Rightarrow z=1$ ist HW der Folge $(e^{i2\pi\alpha n})_{n\in\mathbb{N}}$

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$g(x) = \operatorname{sgn}(x)\ln(1+|x|)$

i) $g(x) = \operatorname{sgn}(x)\ln(1+|x|)$

für $x\neq 0$ ist g als komp. diffbarer Fkt auf $[-1,1]$ diffbar

in $x=0$ gilt

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sgn}(h)\ln(1+|h|) - 0}{h}$$

Bestimme zunächst einseitige Grenzwerte

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} \underset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+h}}{1} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-1\ln(1-h)}{h} \underset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{1-h} = 1$$

$\Rightarrow g'(0) = 1$

Beachte das L'Hospital anwendbar ist da in beiden Fällen sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0 konv.

Die Aussage ist also wahr.

ii) Beachte es ist

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & x>0 \\ 1 & x=0 \\ \frac{1}{1-x} & x<0 \end{cases}$$

auf $[-1,1]\setminus\{0\}$ ist g' differenzierbar.

Wir prüfen den Fall $x=0$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g'(h)-g'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{-\cancel{h}}{1+h}}{\cancel{h}} = -1$$

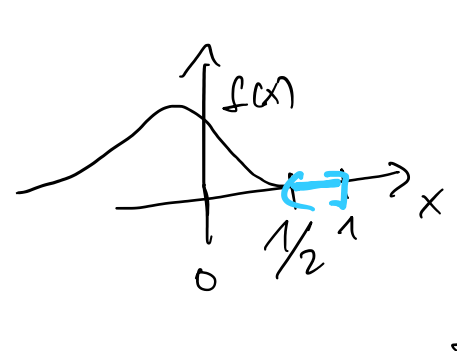
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g'(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{1-h}-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{\cancel{h}1}{1-h}}{\cancel{h}} = 1$$

d.h der Grenzwert ex. nicht!

D.h Die Aussage stimmt nicht!

c) **Die Aussage ist falsch.**

Wir konstruieren ein Gegenbeispiel



$$f(x) = \begin{cases} (x-\frac{1}{2})^4 e^x & x\leq\frac{1}{2} \\ 0 & x>1/2 \end{cases}$$

$f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ und f ist stetig

$\Rightarrow f$ ist beschränkt.

Außerdem ist $f\in C^2(\mathbb{R})$ wie man leicht überprüft

$M = (1/2, 1]$ in diesem Fall nicht abg!

d) $f_n(x) = \dfrac{(1-\frac{x}{n})^n}{1-\exp(-2nx)}$

Punktweise konvergenz:

Zunächst ist klar, dass $(1-\frac{x}{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-x}$

$$\frac{1}{1+e^{-2nx}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1 & x>0 \\ 1/2 & x=0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+e^{-2nx}}(1-\tfrac{x}{n})^n$$

i) Nach den üblichen Grenzwertsätzen konv. also $f_n(x)$ punktweise

Die Aussage ist also wahr!

ii) für $\begin{cases} x<0 \text{ konv. } f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ x>0 \text{ konv } f_n(x)\to e^{-x} \end{cases}$

Sei $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ der Punktw. Grenzwert

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$

D.h f ist in $x=0$ unstetig. Tatsächlich ist $f(0) = 1/2$

Da f_n stetig für jedes $n\in\mathbb{N}$ müsste f ebenfalls stetig sein, falls die konv. glm. wäre

Die Aussage ist also falsch

A2)

a) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig, dann ist

$h: x\mapsto \max(f(x),g(x))$ stetig

Bew. Wir definieren die Mengen

$A = \{x\in\mathbb{R} \mid f(x)>g(x)\}$

$B = \{x\in\mathbb{R} \mid f(x)<g(x)\}$

A ist offen da f,g stetig sind

sei $x_0\in A \Rightarrow f(x_0)-g(x_0)>0$ und $u=f-g$ ist stetig. d.h für $\varepsilon>0$ klein genug ist $u(x_0+\varepsilon)>0$

$\Rightarrow x_0+\varepsilon\in A$

Auf A gilt $h(x)=f(x)$

$\Rightarrow h$ ist auf A stetig

Analog h ist auf B stetig (Symmetrie von f,g)

Betrachte nun noch die Menge

$C := \{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=g(x)\}$

Wir benutzen das ε-δ-Kriterium

h ist in x_0 stetig falls für jedes $\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ sodass für $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ gilt $|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$

Sei nun $x_0\in C$ d.h $f(x_0)=g(x_0)=h(x_0)$ und $\varepsilon/2$ beliebig, dann existieren $\delta_{f,\varepsilon}>0$ und $\delta_{g,\varepsilon}>0$ sodass für $\delta_\varepsilon := \min\{\delta_{f,\varepsilon}, \delta_{g,\varepsilon}\}$ gilt

$$|x-x_0|<\delta_\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |f(x_0)-f(x)|<\varepsilon \\ |g(x_0)-g(x)|<\varepsilon \end{cases}$$

Sein $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$

$$|h(x_0)-h(x)| = |h(x_0) - \max(f(x),g(x))|$$

$$\Rightarrow \quad = \begin{cases} |h(x_0)-f(x)| = |f(x_0)-f(x)|<\varepsilon & f(x)\geq g(x) \\ |h(x_0)-g(x)| = |g(x_0)-g(x)|<\varepsilon & g(x)>f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow |h(x_0)-h(x)|<\varepsilon$ für $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$

$\Rightarrow h$ ist stetig

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und f stetig

Beh: f ist beschränkt

Bew: Da $f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$ ist $|f(x)|\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$.

1. Fall $f\equiv 0 \Rightarrow$ Beh
2. Fall $\exists x_0\in\mathbb{R}$ mit $f(x_0)\neq 0$

$\Rightarrow |f(x_0)|>\varepsilon$ für ein $\varepsilon>0$

Da $|f(x)|\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$ und f stetig ist ex. ein $R>0$ sodass $|f(x)|\leq\varepsilon$ für $|x|>R$

Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann ex. für jedes $N\in\mathbb{N}$ ein $x_N\in\mathbb{R}$ mit $x_N>N$ und $|f(x_N)|>\varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{N\to\infty}|f(x_N)| > \lim_{N\to\infty}\varepsilon > \varepsilon$

Aber $\lim_{N\to\infty}|f(x_N)| = |f(\lim_{N\to\infty}x_N)| = 0$

Es ist also $|f(x)|\leq\varepsilon$ für $|x|>R$ und da $[-R,R]$ kompakt ist und $|f|$ stetig ist nimmt $|f|$ auf $[-R,R]$ sein Maximum tatsächlich an

$$\infty > \sup_{x\in[-R,R]}|f(x)| = \max_{x\in[-R,R]}|f(x)| \geq |f(x_0)| \geq \varepsilon$$

$\Rightarrow |f(x)| < \sup_{x\in[-R,R]}|f(x)| \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ ist beschränkt

c) Fall $\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,dx = 0 \Rightarrow f=g$ auf $[-1,1]$

Beweis: Es sei $u := f-g$.

Angenommen $u(x_0)\neq 0$ für ein $x_0\in[-1,1]$ dann ist $|u(x_0)|>\varepsilon$ für ein $\varepsilon>0$

Da $|u|$ stetig ist ex. ein $r>0$ mit $|u(x)|>\varepsilon/2$ für jedes $x\in(x_0-r, x_0+r)$

sei $b = \min(x_0+r, 1) < 1$

$a = \max(x_0-r, -1) > -1$

Beachte es ist $b>a$

$$\Rightarrow 0 = \int_{-1}^{1}\underbrace{|f(x)-g(x)|}_{=|u(x)|\geq 0}dx \geq \int_a^b |u(x)|\,dx \geq \frac{\varepsilon}{2}\int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2}|b-a| > 0$$

Dies ist ein Widerspruch!

A3)

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{2021}-1}{1-x^{2020}}$

$$\underset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{x\to 1} -\frac{2021\,x^{\cancel{2020}}}{2020\,\cancel{x^{2019}}} = -\frac{2021}{2020}$$

L'Hospital ist anwendbar, da sowohl Nenner als auch Zähler gegen den Wert 0 konv.

b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$ $\quad (a+b)(a-b) = a^2-b^2$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

Da $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}} = 2 \neq 0$ folgt der Grenzwert nach den üblichen Grenzwertsätzen nun sofort als

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = 1$$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)^2}{\sin(x^2)}$

$$\underset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2}\sin(x)\cos(x)}{\cos(x^2)\,\cancel{2}x}$$

$$\underset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^2-\sin(x)^2}{(-\sin(x)^2\,2x^2+\cos(x^2)}$$

$$= \frac{1-0}{1}$$

L'Hospital ist anwendbar, da sowohl Nenner als auch Zähler gegen den Wert 0 konv.

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2n}{n^2(1+n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2n+n^2-n^2}{n^2(1+n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+n)^2-n^2}{n^2(1+n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(1+n)^2}$$

Sei nun $\alpha_n = \frac{1}{n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n-\alpha_{n+1} = \alpha_1 = 1$$

Die Konvergenz ist klar, da es sich um eine Teleskopsumme handelt und $\alpha_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

e)

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \int_1^\infty\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int_0^1\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0}\int_t^1\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

"$(-2e^{-\sqrt{x}})' = +\cancel{2}e^{-\sqrt{x}}\,\cancel{\tfrac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$" $= \lim_{t\to 0}\left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_t^1$

$$= -2\lim_{t\to 0}\left[e^{-\sqrt{x}}\right]_t^1$$

$$= -2(e^{-1}-\lim_{t\to 0}e^{-\sqrt{t}}) \underset{\uparrow}{=} -2(e-1)$$

Stetigkeit von $e^{-\sqrt{x}}$ in $x=0$

$$\int_1^\infty\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}-2(e^{-\sqrt{t}}-e^{-1}) = 2e^{-1}$$

Beide Grenzwerte existieren und damit auch das uneigentliche Integral. Es ist.

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = -2(e^{-1}-1)+2e^{-1} = 2$$

A4)

a) Wir betrachten das uneigentliche Integral

$$\alpha_n = 2\int_0^\infty t^{2n+1}e^{-t^2}dt = \lim_{R\to\infty}2\int_0^R t^{2n+1}e^{-t^2}dt \qquad \int f'g = [fg]-\int fg'$$

$$= \lim_{R\to\infty}2\int_0^R\underbrace{t^{2n}}_{g}\,\underbrace{te^{-t^2}}_{f'}dt$$

$$\underset{\text{P.I}}{=} \lim_{R\to\infty}\left(2\underbrace{\left[\frac{e^{-t^2}}{-2}t^{2n}\right]_0^R}_{\substack{\text{Konvergiert nach VL}\\ \xrightarrow[R\to\infty]{}0}} + 2\int_0^R\frac{e^{-t^2}}{+\cancel{2}}\cancel{2}n\,t^{2n-1}dt\right)$$

Beachte: $(e^{-t^2})' = -2te^{-t^2}$

$$= n\,2\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-t^2}t^{2n-1}dt$$

$$= n\,\alpha_{n-1}$$

D.h das uneigentliche Integral α_n ex. gdw α_{n-1} ex.

d.h es genügt für die Existenz α_0 zu prüfen

$$\alpha_0 = \lim_{R\to\infty}2\int_0^R te^{-t^2}dt = \lim_{R\to\infty}-\cancel{2}\left[\frac{e^{-t^2}}{\cancel{2}}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}-(e^{-R^2}-1)$$

$\underset{\nearrow}{=} 0+1 = 1$

Grenzwert ex. nach VL

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_0 = 1 \\ \alpha_n = n\alpha_{n-1}\end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad ⊗$$

Beh $\alpha_n = n!$

I.A $\alpha_0 = 1 = 0! = 1$

I.V Es gelte $\alpha_n = n!$ für ein $n\in\mathbb{N}$ (beliebig aber fest!)

I.S. $\alpha_{n+1} \underset{\nearrow}{=} (n+1)\alpha_n \underset{\text{I.V.}}{=} (n+1)n! = (n+1)!$

⊗

Damit gilt die Beh nach vollständiger Induktion!

b) Es ist $f(x) = \sin(x)e^{-x}$

$$T_2(f,\pi/4) = f(\pi/4) + \frac{f'(\pi/4)}{1!}(x-\pi/4) + \frac{f''(\pi/4)}{2}(x-\pi/4)^2$$

$$f(\pi/4) = \sin(\pi/4)e^{-\pi/4} = \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \cos(x)e^{-x}-\sin(x)e^{-x} = e^{-x}(\cos(x)-\sin(x))$$

$f'(\pi/4) = 0$

$$f''(x) = -e^{-x}(\cos(x)-\sin(x)) + e^{-x}(-\sin(x)-\cos(x))$$

$$\Rightarrow f''(\pi/4) = 0 - e^{-\pi/4}\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}e^{-\pi/4}$$

$$\Rightarrow T_2(f,\pi/4) = \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{\sqrt{2}e^{-\pi/4}}{2}(x-\pi/4)^2 = \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}(1-(x-\pi/4)^2)$$

c) Nach dem Satz von Taylor gilt ex. ein ξ zwischen x und $\pi/4$, sodass

$$f(x) = \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}} + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\pi/4)^2$$

$$\Rightarrow \left|f(x)-\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}\right| = |f''(\xi)|\frac{|x-\pi/4|^2}{2} \leq |x-\pi/4|^2$$

$$f''(x) = e^{-x}(-\cos(x)\cancel{+\sin(x)}\cancel{-\sin(x)}-\cos(x)) = -2e^{-x}\cos(x)$$

$$\Rightarrow |f''(\xi)| = 2|e^{-\xi}\cos(\xi)| = 2e^{-\xi}|\cos(\xi)| \leq 2 \quad \text{für } \xi\geq 0$$

$\Rightarrow |f''(\xi)|\leq 2$ für $\xi\geq 0$

$$\Rightarrow \left|\sin(x)e^{-x}-\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}\right| \leq |x-\pi/4|^2 \quad \text{für } x\in[0,\infty)$$