Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
Probeklausur

Aufgabe 1 *((7 + 7) + 6 = 20 Punkte)*.

(a) (i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Zeigen Sie, dass

$$a_n \leq \left(\sqrt{2} + 1\right)^{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Es sei die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert als

$$b_n = -\mathrm{i}^{n(n+1)} n,$$

wobei i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$ bezeichne. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \begin{cases} n, & n = 4k+1 \text{ oder } n = 4k+2, \\ -n, & n = 4k+3 \text{ oder } n = 4k \end{cases}$$

für ein jeweils passendes $k \in \mathbb{N}_0$. Besitzt $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Häufungswerte? Wenn ja, welche?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n\mathrm{e}^n}\right)^n x^n?$$

Aufgabe 2 *((5 + 5) + (5 + 5) = 20 Punkte)*.

(a) Es sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x/n}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ für alle $x \in (0,\infty)$ *punktweise* gegen eine Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ konvergiert. Bestimmen Sie f.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ auf $\mathbb{R}$ *nicht gleichmäßig* gegen f aus Teil (i) konvergiert.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, sofern existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 + 7x + 2}{-9x^2 + 2x - 12}$.

Aufgabe 3 *(7 + 13 = 20 Punkte)*.

(a) Konvergiert oder divergiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\log(x))^2 + 4}{x}\,\mathrm{d}x$?

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \sin(x), & x > 0, \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$$

differenzierbar mit stetiger Ableitung ist, das heißt, dass $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4 *(10 + 10 = 20 Punkte)*.

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{1-x}y(x) + x, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

für $x \in [0, 1)$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Viel Erfolg!