Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik
Lösungsvorschlag zur Probeklausur

Aufgabe 1 *((7 + 7) + 6 = 20 Punkte)*.

(a) (i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Zeigen Sie, dass

$$a_n \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Es sei die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert als

$$b_n = -\mathrm{i}^{n(n+1)}n,$$

wobei i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$ bezeichne. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \begin{cases} n, & n = 4k+1 \text{ oder } n = 4k+2, \\ -n, & n = 4k+3 \text{ oder } n = 4k \end{cases}$$

für ein jeweils passendes $k \in \mathbb{N}_0$. Besitzt $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Häufungswerte? Wenn ja, welche?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n\mathrm{e}^n}\right)^n x^n?$$

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Wir zeigen die Ungleichung mit vollständiger Induktion. Für den Induktionsanfang sehen wir durch Einsetzen, dass

$$a_0 = 0 \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^{0+1}$$

und

$$a_1 = 1 \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^{1+1}.$$

Es gelte nun also die Induktionsvoraussetzung

$$a_n \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^{n+1}$$

für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann gilt nach Definition

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1},$$

mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
&\leq 2\left(\sqrt{2}+1\right)^{n+1} + \left(\sqrt{2}+1\right)^{n} \\
&= \left(\sqrt{2}+1\right)^{n}\left(2\left(\sqrt{2}+1\right)+1\right) \\
&= \left(\sqrt{2}+1\right)^{n}\left(\sqrt{2}^{2}+2\sqrt{2}+1^{2}\right) \\
&= \left(\sqrt{2}+1\right)^{n+2}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.

(ii) Es gilt $\mathrm{i}^m = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, wobei $m = 4k$ für ein passendes $k \in \mathbb{N}_0$. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
(4k+1)(4k+1+1) &= 4\left(4k^2+3k\right)+2, \\
(4k+2)(4k+2+1) &= 4\left(4k^2+5k+1\right)+2, \\
(4k+3)(4k+3+1) &= 4\left(4k^2+3k\right) \text{ und} \\
(4k)(4k+1) &= 4\left(4k^2+k\right).
\end{aligned}$$

Daher gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = -\mathrm{i}^{n(n+1)}n = \begin{cases} -\mathrm{i}^2 n = -(-n) = n & n = 4k+1 \text{ oder } n = 4k+2, \\ -\mathrm{i}^0 n = -n & n = 4k+3 \text{ oder } n = 4k \end{cases}$$

für ein jeweils passendes $k \in \mathbb{N}_0$.

Da $n \to \infty$ und $-n \to -\infty$ für $n \to \infty$ und alle Teilfolgen von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind, hat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Häufungswerte.

(b) Wir berechnen mit dem Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n\mathrm{e}^n}\right)^n} = \frac{n+1}{n\mathrm{e}^n} = \frac{1+1/n}{\mathrm{e}^n} \to 0$$

für $n \to \infty$. Somit ist der Konvergenzradius der Potenzreihe ∞, also konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 2 *((5 + 5) + (5 + 5) = 20 Punkte)*.

(a) Es sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x/n}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ für alle $x \in (0, \infty)$ *punktweise* gegen eine Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ konvergiert. Bestimmen Sie f.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ auf $\mathbb{R}$ *nicht gleichmäßig* gegen f aus Teil (i) konvergiert.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, sofern existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^2 + 7x + 2}{-9x^2 + 2x - 12}$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Wir setzen $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$. Sei $x_0 \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$f_n\big(x_0\big) = \mathrm{e}^{-x_0/n} \to \mathrm{e}^0 = 1$$

für $n \to \infty$, da die Exponentialfunktion in 0 stetig ist. Das zeigt punktweise Konvergenz der Funktionenfolge gegen f.

(ii) Wir setzen $x_n := n$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\big|f_n\big(x_n\big) - f\big(x_n\big)\big| = \big|\mathrm{e}^{-n/n} - 1\big| = 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

Somit konvergiert die Funktionenfolge nicht gleichmäßig gegen f.

(b) (i) Es sind $\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2$ und $\mathrm{id}'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zudem gilt $1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter gilt $\tan(x) \to 0$ und $x \to 0$ für $x \to 0$. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + (\tan(x))^2}{1} = 1$$

und somit nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + (\tan(x))^2}{1} = 1.$$

(ii) Wir berechnen

$$\frac{5x^2 + 7x + 2}{-9x^2 + 2x - 12} = \frac{5 + 7x^{-1} + 2x^{-2}}{-9 + 2x^{-1} - 12x^{-2}} \to -\frac{5}{9}$$

für $x \to \infty$. □

Aufgabe 3 *(7 + 13 = 20 Punkte)*.

(a) Konvergiert oder divergiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\log(x))^2+4}{x}\,\mathrm{d}x$?

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases} \sin(x), & x>0,\\ x, & x\le 0\end{cases}$$

differenzierbar mit stetiger Ableitung ist, das heißt, dass $f\in C^1(\mathbb{R})$.

Lösungsvorschlag.

(a) Sei $a\in(0,1)$. Es gilt

$$\int_a^1 \frac{(\log(x))^2+4}{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^1 \frac{(\log(x))^2}{x}\,\mathrm{d}x + 4\int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Da für das zweite Integral gilt, dass

$$\int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\log(x)\big]_{x=a}^1 = -\log(a)\to\infty$$

für $a\to 0$, und da der Integrand des ersten Integrals (und somit das erste Integral) nicht negativ ist, existiert das gesamte uneigentliche Integral nicht.

Alternativ lässt sich die Nichtexistenz des gesamten uneigentlichen Integrals auch über die Nichtexistenz des ersten uneigentlichen Integrals zeigen. Sei hierzu wieder $a\in(0,1)$. Wir setzen $y(x)=-\log(x)$. Dann gilt $y'(x)=-1/x$ und somit mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_a^1 \frac{(\log(x))^2}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\log(a)}^0 \left(y^2\right)\mathrm{d}y\\ &= \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=\log(a)}^0\\ &= -\frac{1}{3}(\log(a))^3.\end{aligned}$$

Da $\log(a)\to-\infty$ für $a\to 0$, existiert das uneigentliche Integral nicht.

(b) Zunächst ist klar, dass die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ in $C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ liegt als Komposition von C^1-Funktionen mit

$$f'(x)=\begin{cases}\cos(x), & x>0,\\ 1, & x<0\end{cases}$$

für $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Wir zeigen nun die Differenzierbarkeit von f in 0. Hierzu betrachten wir den Differenzenquotienten von f in 0 und sehen mit einem Resultat aus der Vorlesung

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)-0}{x} = 1.$$

Ebenso gilt

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-0}{x} = 1.$$

Somit ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 1$.

Um die Stetigkeit der Ableitung zu sehen, berechnen wir

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0^-} 1 = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Somit ist

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \cos(x), & x > 0, \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

die stetige Ableitung von f und f somit stetig differenzierbar. □

Aufgabe 4 *(*$10 + 10 = 20$ *Punkte)*.

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{1}{1-x} y(x) + x,$$
$$y(0) = 1$$

für $x \in [0, 1)$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag.

(a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des Satzes 12.1 sei $a\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto (1-x)^{-1}$ und $b\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$.

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y'(x) = a(x)y(x)$ ist gegeben durch $y_h(x) = ce^{A(x)}$, wobei $A(x) = -\log(1-x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ ist und $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$y_h(x) = ce^{A(x)} = ce^{-\log(1-x)} = \frac{c}{(1-x)}.$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist gegeben durch $y_p(x) = C(x)\mathrm{e}^{A(x)}$, wobei

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \mathrm{e}^{-A(x)} b(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \mathrm{e}^{\log(1-x)} x\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x - x^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = \frac{c}{(1-x)} + \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right).$$

Einsetzen des Anfangswertes $y(0) = 1$ liefert $c = 1$.

(b) Wir formen die erweiterte Matrix $(A|b)$ durch die folgenden Schritte in Zeilenstufenform um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \cdot(-1) & \cdot(-1) \\ + & \\ & + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot(-1/3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} + & \\ & + \\ \cdot(-1) & \cdot(-2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Somit ist die Lösung des Gleichungssystems gegeben durch $x = (4, 1, -2)$. □