Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis

WS 2022/23

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Probeklausur

Aufgabe 1 (2 + (2 + 3 + 3)= 10 Punkte)

a) Sei $A := \{\frac{1}{n} - \frac{2}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie das Supremum und Infimum der Menge A.

b) Entscheiden Sie ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

i) $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$,

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(1/x)$,

iii) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln(|x|)$.

Aufgabe 2 (4 + (2+4) = 10 Punkte)

a) Zeigen Sie für alle $n \geq 2$, dass

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

b) Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$ für welche die folgenden Potenzreihen konvergieren,

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{10}} x^n$,

ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n \ln(n)} (x-3)^n$.

Aufgabe 3 (3 + (2+2) + 3 = 10 Punkte)

a) Sei $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ beschränkt und differenzierbar und $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ als

$$f(x) := \int_0^{h(x)} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

i) Begründen Sie, weshalb diese Integrale existieren.

ii) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung von f in Abhängigkeit von g, h und h'.

b) Bestimme die Integrale

i) $\int_{-2}^{2} \sin(x)\cosh(x) dx$,

ii) $\int_{0}^{1/2} \frac{1}{1-x^2} dx$.

c) Beweisen oder widerlegen Sie die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 4 ((1+3+2)+ 4 = 10 Punkte)

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \max\{2^{-x/n}, 2^{x/n}\}.$$

i) Gegen welche Funktion konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ punktweise?

ii) Konvergiert die Funktionsfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[-1, 1]$ gleichmäßig?

iii) Konvergiert die Funktionsfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x^3, \quad y(1) = 1$$

für $x \in (0, \infty)$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Viel Erfolg!

Hinweise für die Klausur:

- Es gibt eine Formelsammlung. Diese Formelsammlung wird mit der Klausur ausgegeben. Für die Probeklausur ist die vorläufige Formelsammlung auf Ilias. Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Zur Bearbeitung haben Sie 120 Minuten Zeit.