Musterlösung zur HM 1 Physik

Probeklausur

A1,

$$A := \{ \tfrac{1}{n} - \tfrac{2}{m} : n,m \in \mathbb{N} \}$$

Behauptung: $\sup(A) = 1$, $\inf(A) = -2$

Beweis $\gamma = 1$ ist eine OS, denn $\forall x \in A$ gilt

$x = \frac{1}{n} - \frac{2}{m}$ für $n,m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{n} - \frac{2}{m} \le \frac{1}{n} \le 1$

$\gamma = 1$ ist die kleinste O.S.. Sei $\hat{\gamma}$ eine weitere O.S. von A mit $\hat{\gamma} < \gamma = 1$ dann ist $\hat{\gamma} = 1 - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$

Damit $\hat{\gamma}$ eine O.S. ist muss gelten

$$\hat{\gamma} > \frac{1}{n} - \frac{2}{m} \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \varepsilon \geq \frac{1}{n} - \frac{2}{m}$$

$$\underset{n=1}{\Rightarrow} \quad 1 - \varepsilon \geq 1 - \frac{2}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

was ein Widerspruch für $m > \frac{2}{\varepsilon}$ ist.

$\gamma_0 = -2$ ist US an A denn

$$\frac{1}{n} - \frac{2}{m} \geq -\frac{2}{m} \geq -2 \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

Es kann keine größere US geben denn für $\tilde{\gamma}_0 = -2 + \varepsilon$ muss gelten

$$\frac{1}{n} - \frac{2}{m} \geq -2 + \varepsilon \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n} - 2 \geq -2 + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n} \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ↯$$

b) i) Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 1^{N-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(1+\frac{1}{2}\right)^N = \left(\frac{3}{2}\right)^N \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$$

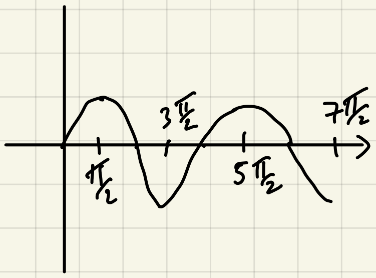
und daher ex. der Grenzwert nicht.

ii) $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ex. nicht!

Wir wählen die Folge $x_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

dann gilt $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

$$= (-1)^n$$



konvergiert nicht.

iii) $\lim_{x\to 0} x \ln(|x|) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(|x|)}{\frac{1}{x}}$

Wir untersuchen sowohl den rechtsseitigen als auch den linksseitigen Grenzwert.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(-x)}{\frac{1}{-x}} \underset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{-x}}{1/x^2} = -\lim_{x\to 0^-} x = 0$$

Da beide Grenzwerte gegen denselben Ausdruck konv. gilt $\lim_{x\to 0} x\ln(|x|) = 0$.

Die Regel von L'Hospital ist anwendbar da $\ln(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -\infty$ und $\frac{1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \infty$.

A2 a) Wir zeigen dies mittels vollständigen Induktion

I.A.: Für $n=2$ gilt

$$\prod_{k=2}^{n} 1-\frac{2}{k(k+1)} \overset{n=2}{=} 1-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(2+1)} = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right) \overset{n=2}{=} \frac{2}{3}$$

I.V.: Es gelte $\prod_{k=2}^{n} 1-\frac{2}{k(k+1)} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ welches beliebig aber fest gewählt ist

I.S. $$\prod_{k=2}^{n+1} 1-\frac{2}{k(k+1)} = \left(\prod_{k=2}^{n} 1-\frac{2}{k(k+1)}\right) 1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(\frac{(n+1)(n+2)-2}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+2}{n} \cdot \frac{(n+1)(n+2)-2}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{(n+2)\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}}{n\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}} - \frac{2\cancel{(n+2)}}{n(n+1)\cancel{(n+2)}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{(n+2)(n+1)-2}{n(n+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n^2+3n \cancel{+2-2}}{n(n+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3+n}{n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3+(n+1)-1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$$

Damit folgt die Behauptung nach vollständige Induktion.

b) i) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n!}{n^{10}}}_{=:a_n} x^n$

Wir untersuchen $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{n^{10}} \frac{(n+1)^{10}}{(n+1)!}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} \frac{1}{n+1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \frac{1}{n+1} = 0$$

Nach Vorlesung gilt also für den Konvergenzradius $r=0$. Demnach konv. die Reihe nur für $x=0$.

ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^n \ln(n)}}_{=:a_n} (x-3)^n$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2^{n+1} \ln(n+1)}{2^n \ln(n)} = 2 \; \frac{\ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n)}{\ln(n)}$$

$$= 2\left(\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)} + 1\right)$$

und da $\ln(1+\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(1) = 0$ gilt

$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 2$ ist der Konvergenzradius der Reihe

Für $|x-3| < 2$ konv. die Reihe.

Für $|x-3| > 2$ div. die Reihe.

Wir untersuchen die Spezialfälle $x_0 = 1$ und $x_1 = 5$ gesondert.

Für $x_1 = 5$ gilt $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x_1-3)^n}{2^n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ konv. nach Leibniz da $\frac{1}{\ln(n)}$ eine mon. fallende NF ist

Für $x_0 = 1$ gilt $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x_0-3)^n}{2^n \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} \geq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\ln(n)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

für N groß genug da $\ln(n) < n$ für n groß genug.

Für $x_0 = 1$ div. die Reihe also nach dem Minoranten-Krit.

A3) a) i) $\int_0^{h(x)} g(t)\,dt$ ist integriebar da g auf $[0, h(x)]$ stetig und damit auf den kompakten Intervall beschränkt also auch integriebar ist.

ii) Es ist also $f(x) = \int_0^{h(x)} g(t)\,dt = G(h(x)) - G(0)$

für eine diff'bare funktion G mit $G' = g$ nach dem Hauptsatz der Integral und differentialrechnung da g stetig ist. Es ist also

$$f'(x) = (G(h(x)) - G(0))' = G'(h(x))\,h'(x)$$
$$= g(h(x))\,h'(x)$$

nach der Kettenregel.

b) i) $\int_{-2}^{2} \sin(x)\cosh(x)\,dx = \int_{-2}^{0} \sin(x)\cosh(x)\,dx + \int_0^2 \sin(x)\cosh(x)\,dx$

$$= \int_0^2 \underbrace{\sin(-t)}_{=-\sin(t)}\overbrace{\cosh(-t)}^{=\cosh(t)}\,dt + \int_0^2 \sin(x)\cosh(x)\,dx$$

$0 =$

ii) $\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\log(1-x)\right]_0^{1/2} + \frac{1}{2}\left[\log(1+x)\right]_0^{1/2}$

Partialbruch-Zerlegung

$$= \frac{1}{2}\left(\log(3/2) - \log(1/2)\right) = \frac{\log(3)}{2}$$

c) Es ist $\sin(t) \le t$ auf $[0, \pi/2)$ denn $\sin(t) - t = g(t)$ und $g'(t) = \cos(t) - 1 \le 0$ und $g(0) = \sin(0) - 0 = 0$

$$\underset{t\ge 0}{\Rightarrow} g(t) \le 0 \Rightarrow \sin(t) - t \le 0$$
$$\Rightarrow \sin(t) \le t$$

Daher gilt $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(t)}\,dt = \lim_{r\to 0^+} \int_r^{\pi/2} \frac{1}{\sin(t)}\,dt$

$$\geq \lim_{r\to 0^+} \int_r^{\pi/2} \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \left(\log\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \log(r)\right)$$

divergiert nach ∞.

A4 a) (i) $f_n(x) = \max\{2^{-\frac{x}{n}}, 2^{x/n}\}$

Es ist $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{a}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\log(2^{a/n})}$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{a}{n}\log(2)}$$

und $\frac{a}{n}\log(2) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für jedes $a\in\mathbb{R}$.

Da $\exp(\cdot)$ stetig ist gilt $\lim_{n\to\infty} 2^{a/n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\log(2)}$

$$= e^0 = 1$$

$$\Rightarrow f_n(x) = \begin{cases} 2^{x/n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 & x>0 \\ 2^{-x/n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 & x\leq 0 \end{cases} \Rightarrow f_n(x) \to 1$$

für jedes $x\in\mathbb{R}$.

Beachte es ist $2^{x/n} \geq 2^{-x/n} \iff e^{\log(2)\frac{x}{n}} \geq e^{\log(2)\frac{-x}{n}}$

$$\iff x \geq -x$$

$$\iff x \geq 0$$

(ii) Sei $f(x)\equiv 1$ dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{L^\infty([-1,1])} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - 1|$$

$$f_n(x) - 1 = \max\{2^{-x/n}, 2^{x/n}\} - 1 = \begin{cases} 2^{x/n} - 1 & x>0 \\ 2^{-x/n} - 1 & x\leq 0 \end{cases}$$

$$= 2^{\frac{|x|}{n}} - 1$$

$$\Rightarrow \quad f_n(x) - 1 = 2^{\frac{|x|}{n}} - 1 = e^{\log(2^{\frac{|x|}{n}})} - 1$$

$$= e^{\frac{|x|}{n}\log(2)} - 1 \geq 0 \quad \text{da } e^t \geq 1 \text{ für } t \geq 0$$

Es ist $f_n(x) - 1 = f_n(-x) - 1$

$$\Rightarrow \quad \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - 1| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) - 1$$

$$f_n(x) \underset{x>0}{=} e^{\frac{x}{n}\log(2)} \Rightarrow f_n'(x) = e^{x/n \log(2)} \frac{\log(2)}{n} \geq 0$$

ist wachsend und damit $\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) - 1 = e^{\frac{\log(2)}{n}} - 1$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{L^\infty([-1,1])} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - 1|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{\log(2)}{n}} - 1\right) = 1 - 1 = 0$$

Damit konv. $f_n \to f$ auf $[-1,1]$ gleichmäßig.

(iii) Auf $\mathbb{R}$ konv. die Funktion nicht gleichmäßig, denn

$$\|f_n - 1\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 1| \geq |f_n(n) - 1|$$

$$= |2^{\frac{n}{n}} - 1| = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - 1\|_\infty \geq 1$ und damit kann die konv. nicht glm. sein.

b) Wir lösen zuerst die homogene Gleichung mittels Trennung der Variablen.

$$y_h'(x) = \frac{y_h(x)}{x} \Rightarrow \partial_x \log(y_h(x)) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y_h(x) = Ax \quad \text{für } A\in\mathbb{R}$$

Um die inhomogene Gleichung zu lösen benutzen wir den Ansatz $y_p(x) = A(x)x$ "Variation der Konst."

$$\Rightarrow \quad y_p'(x) = A'(x)x + A(x)$$

$$y_p'(x) = \frac{y_p(x)}{x} + x^3 \Rightarrow A'(x)x + \cancel{A(x)} = \cancel{\frac{A(x)x}{x}} + x^3$$

$$\Rightarrow A'(x) = x^2$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{3}x^4$$

Wir finden also $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ax + \frac{1}{3}x^4$ für $A \in \mathbb{R}$. Wir benutzen den Anfangswert $y(1) = 2/3$ um A zu bestimmen. Es ist

$$y(1) = A + \frac{1}{3} \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow A = 2/3$$

$\Rightarrow \quad y(x) = 2/3\, x + \frac{1}{3}x^4$ ist die gesuchte Lösung.