Analysis I
Sätze, Korollare, Definitionen

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Der Körper der reellen Zahlen

Auf R sind 2 Verknüpfungen gegeben:

$$\text{„ + “} \begin{cases} R \times R & \to & R \\ (x,y) & \mapsto & x + y \end{cases}$$

$$\text{„ • “} \begin{cases} R \times R & \to & R \\ (x,y) & \mapsto & x \bullet y \end{cases}$$

I. Axiome der Addition:

(i)	$x + (y + z)$	$=$	$(x + y) + z$	$\forall x, y, z \in R$	(Assoziativ-Gesetz)
(ii)	$x + y$	$=$	$y + x$	$\forall x, y \in R$	(Kommutativ-Gesetz)
(iii)	$\exists\ 0 \in R$:	$x + 0 =$	x	$\forall x \in R$	(Existenz der 0)
(iv)	$\forall x \in R\ \exists\ (-x) \in R : x + (-x)$			$= 0$	(Existenz des Negativen)

II. Axiome der Multiplikation

(i)	$x \cdot (y \cdot z)$	$=$	$(x \cdot y) \cdot z$	$\forall x, y, z \in R$	(Assoziativ-Gesetz)
(ii)	$x \cdot y$	$=$	$y \cdot x$	$\forall x, y \in R$	(Kommutativ-Gesetz)
(iii)	$\exists\ 1 \in R,\ 1 \neq 0$:		$1 \cdot x = x$	$\forall x \in R$	(Existenz des neutralen Elements)
(iv)	$\forall x \in R,\ \ x \neq 0\ \ \exists\ x^{-1} \in R$:			$x \cdot x^{-1} = 1$	(Existenz des Inversen)

III. Distributiv-Gesetz

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad \forall x, y, z \in R$

IV. Körper-Definitionen

Eine Menge M mit zwei Verknüpfungen „ + “ und „ • “, die den Axiomen I – III genügen, heißt ein Körper.

Die Menge R der reellen Zahlen bildet einen Körper.

Anordnungs-Axiome

(A 1) Für jedes $x \in R$ gilt genau eine der drei Bedingungen:

$x > 0,\ \ x = 0,\ \ x < 0$

(A 2) Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt: $\qquad x + y > 0$

(A 3) Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt: $\qquad x \cdot y > 0$

Ein Körper mit der Relation „ > “, so dass A1-3 erfüllt sind, heißt angeordneter Körper.

V. Bezeichnungen

$N := \{natürlicheZahlen\} = \{1,2,3,...\}$

$Z := \{ganzeZahlen\} = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$

$Q := \{rationaleZahlen\} = \left\{ \frac{p}{q} \in R \middle| p,q \in Z; q > 0; p,q\ teilerfremd \right\}$

Sei $x \in R$. Dann ist

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ & \text{falls} \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

der Absolutbetrag von x.

VI. Dreiecks-Ungleichung

$\forall x, y \in R$ gilt:

$|x+y| \leq |x| + |y|$

$|x+y| \geq |x| - |y|$

VII. Archimedisches Axiom

$\forall x, y > 0 \quad \exists\, n \in N:$

$n \cdot y > x$

VIII. Bernoullische Ungleichung

Sei $x \geq -1$, dann gilt:

$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \qquad \forall n \in N$

IX. Summen und Produkte

Seien $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in R \qquad (m < n)$

(i) $\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$ heißt Summe (von *m* bis *n*) über a_i.

(ii) $\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$ heißt Produkt (von *m* bis *n*) über a_i.

(iii) Für Summen der folgenden Form gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{1}{2} m(m+1)$$

(iv) Für Produkte der folgenden Form gilt:

$$m! := \prod_{i=1}^{m} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$$

m! heißt Fakultät von m oder m-Fakultät.

Insbesondere gilt:

$0! = 1$

(v) Weiter heißt

$$\prod_{i=1}^{m} a = a^m \qquad a \in R, m \in N$$

m-te Potenz von a.

(vi) Binomialkoeffizienten

Man nennt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \qquad \forall n, k \in N \cup \{0\}$$

Binomialkoeffizient.

(vii) Binomischer Satz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \forall a, b \in R, \quad \forall n \in N$$

(viii) Summenformel für die endliche geometrische Reihe

$\forall x \in R, x \neq 1$ und

$\forall n \in N_0 = N \cup \{0\}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

§ 2 Folgen

Eine Folge (reeller Zahlen) ist eine Abbildung

$$N \to R$$
$$n \mapsto a_n .$$

Man schreibt $(a_n) = (a_n)_{n\in N} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Etwas allgemeiner: $(a_n)_{n\geq N_0} = (a_{n_0}, a_{n_0+1}...)$

I. Konvergenz/ Divergenz

Eine Folge (a_n) heißt konvergent gegen $a \in R$, in Zeichen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a : \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ N = N(\varepsilon) \in N(= natürliche Zahlen), \text{ so dass gilt:}$$

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

Eine Folge (a_n) heißt divergent, wenn sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \overset{\exists}{=} 0$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \overset{\exists}{=} 1$

II. Konvergenzsätze für Folgen

(i) Jede konvergente Folge ist beschränkt.
(*Vorsicht!* Umkehrung dieses Satzes gilt nicht!)

(ii) Eindeutigkeit des Grenzwertes
Seien (a_n) eine Folge, a, a' Grenzwerte von dieser Folge. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\exists}{=} a \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \overset{\exists}{=} a' \qquad \Rightarrow \qquad a = a'$$

(iii) Summen konvergenter Folgen
Angenommen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\exists}{=} a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n \overset{\exists}{=} b$$

Dann konvergiert auch die Folge $(a_n + b_n)$ und es ist

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) \overset{\exists}{=} a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Dasselbe gilt auch für Differenzen konvergenter Folgen.

(iv) Produkte konvergenter Folgen

(a) Angenommen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\exists}{=} a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n \overset{\exists}{=} b$$

Dann konvergiert auch die Folge $(a_n \cdot b_n)$ und es ist

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \overset{\exists}{=} a \cdot b = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Dasselbe gilt auch für Quotienten von Folgen der Form $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ mit

$b \neq 0$.

(b) Angenommen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\exists}{=} a \qquad \text{und } \lambda \in R$$

Dann konvergiert auch die Folge

$$\lim_{n\to\infty} \lambda \cdot a_n \overset{\exists}{=} \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = \lambda \cdot a .$$

(v) Seien $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\exists}{=} a$, $\lim_{n\to\infty} b_n \overset{\exists}{=} b$

Angenommen: $a_n \le b_n \quad \forall n (\ge n_0)$

Dann gilt: $a \le b$

(*Vorsicht!* Gilt $a_n < b_n \ \forall n (\ge n_0)$, dann ist $a \le b$, aber nicht $a < b$!).

III. Cauchy-Folgen

Eine Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge (C-Folge), wenn gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N = N(\varepsilon) \in N(= natürliche Zahlen)$, so dass:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \forall m, n \ge N$$

(i) Sei (a_n) eine konvergente Folge

$\Rightarrow (a_n)$ ist eine Cauchy-Folge

(ii) Vollständigkeits-Axiom

In den reellen Zahlen R konvergiert jede Cauchy-Folge.

IV. Teilfolgen

Sei $(a_n)_{n\in N}$ eine Folge und $n_1 < n_2 < \ldots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen.

Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in N} = (a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ eine Teilfolge von (a_n).

(i) Angenommen: $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\exists}{=} a$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_k} \overset{\exists}{=} a$

für jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in N}$ von $(a_n)_{n\in N}$.

V. Häufungspunkte

$a \in R$ heißt Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn gilt:

$\exists$ eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} \overset{\exists}{=} a$.

VI. Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

VII. Monotonie

(a_n) heißt monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend), wenn

$$a_n \le a_{n+1} \qquad (\text{bzw. } a_n < a_{n+1}).$$

Analog: (Streng) monoton fallend.

Eine Folge heißt monoton, wenn sie entweder monoton wachsend oder fallend ist.

(i) Ist eine Folge monoton und beschränkt, so ist sie konvergent.

§ 3 Reihen

Sei $(a_n)_{n\in N}$ eine Folge. Dann heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ unendliche Reihe; $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ heißt n-te Partialsumme von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Die Folge $(s_n)_{n\in N}$ heißt Folge der Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

I. Konvergenz

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, falls die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in N}$ konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt divergent, falls sie nicht konvergent ist.

II. Geometrische Reihen

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ heißt (unendliche) geometrische Reihe; es gilt: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

III. Summen von Reihen

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $\lambda \in R$.

(i) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

IV. Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen

Für eine Folge $(a_n)_{n\in N}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in N(= \textit{natürlicheZahlen}):$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \qquad \forall n \geq m \geq N$$

V. Satz der Nullfolge

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\exists}{=} 0$

VI. Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Sei (a_n) monoton fallend mit $a_n \geq 0 \ \forall n$. Dann sind äquivalent:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert („alternierende Reihe“)

(ii) $\lim a_n \overset{\exists}{=} 0$

VII. Satz zur absoluten Konvergenz

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Ist eine Folge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist sie auch normal konvergent.

(*Vorsicht! Die Umkehrung gilt nicht!*)

VIII. Majoranten-Kriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent mit $c_n \geq 0 \quad \forall n$.

Sei $(a_n)_{n \in N}$ eine Folge mit $|a_n| \leq c_n \quad \forall n$; so gilt:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent; $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

IX. Quotienten-Kriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$ und $\exists \Theta: \ 0 < \Theta < 1$, so dass:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \Theta \qquad \forall n \geq n_0$$

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. (*Achtung! Θ muss echt kleiner 1 sein!*)

X. Wurzel-Kriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\exists \Theta: \ 0 < \Theta < 1$, so dass:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \Theta \qquad \forall n \geq n_0$$

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

XI. Umordnungssatz

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ eine umgeordnete Reihe von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

XII. Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent. Für jedes $n \in N$ sei $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$.

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

XIII. Exponential-Funktion

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\forall x, y \in R$ gilt: $\quad \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

(i) $\quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad \forall x \in R$

(ii) $\quad (\exp(1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

§ 4 Punktmengen

Sei $(a_n)_{n\in N}$ eine Folge. Die Menge $\{a_n | n \in N\}$ heißt die der Folge $(a_n)_{n\in N}$ unterliegende Menge.

I. Abzählbarkeit

Eine nichtleere Menge M heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $f : N(= natürlicheZahlen) \to M$ gibt. Eine nicht abzählbare Menge heißt überabzählbar.

Die Mengen $N(= natürlicheZahlen), Z, Q$ sind abzählbar; R und die irrationalen Zahlen sind überabzählbar.

II. B-adische Brüche

Ein b-adischer Bruch ist eine Reihe der Form

$$B = \pm \sum_{n=-l}^{\infty} a_n b^{-n} \qquad \text{mit } l \geq 0, a_l \in N \text{ mit } 0 \leq a_l < b$$

(i) Jeder b-adische Bruch ist eine konvergente Reihe, stellt also eine reelle Zahl dar.

(ii) Sei $b \geq 2, b \in N, b$ fest;

Jede reelle Zahl lässt sich als b-adischer Bruch schreiben.

(iii) Jede reelle Zahl lässt sich beliebig genau durch rationale Zahlen approximieren.

III. Beschränktheit

$D \subset R$ heißt nach oben/ unten beschränkt, wenn $\exists k \in R : \ x \leq k \ / \ x \geq k \quad \forall x \in D$

D heißt beschränkt, wenn D nach oben und unten beschränkt ist. Dann gilt:

D beschränkt $\Leftrightarrow \quad \exists k \in R$ mit $|x| \leq k \quad \forall x \in D$

(i) Supremum von D = supD = kleinste obere Schranke von D

(ii) Infimum von D = infD = größte untere Schranke von D

Jede nichtleere nach oben bzw. unten beschränkte Menge besitzt ein Supremum bzw. Infimum.

(iii) Falls supD $\in$ D (bzw. infD $\in$ D), so heißt supD (bzw. infD) Maximum von D (bzw. Minimum von D). Man schreibt MaxD (bzw. MinD).

§ 5 Stetige Funktionen

Sei $D \subset R$; meistens $D = (a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$;
Eine reelle Funktion auf *D* ist eine Abbildung $f: D \to R$, *D* heißt Definitionsbereich von *f*.
$\Gamma_f = \{(x,y) \in D \times R \mid y = f(x)\}$ heißt der Graph von *f*.

I. Funktions-Axiome

Sei $D \subset R$, $f,g: D \to R$, $\lambda \in R$

(i) $$f+g: \begin{cases} D \to R \\ x \mapsto f(x)+g(x) \end{cases}$$

(ii) $$f \cdot g: \begin{cases} D \to R \\ x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{cases}$$

(iii) $$\lambda \cdot f: \begin{cases} D \to R \\ x \mapsto \lambda \cdot f(x) \end{cases}$$

(iv) Sei $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$

$$\frac{f}{g}: \begin{cases} D' \to R \\ x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$$

(v) Sei $f: D \to R$ und $g: E \to R$ mit $f(D) \subset E$

$$g \circ f: \begin{cases} D \to R \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

II. Stetigkeit

Sei $f: D \to R$, $a \in D$. *f* heißt stetig in *a*, wenn für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

f heißt stetig, wenn *f* stetig ist in jedem $a \in D$.

Seien *f,g*: $D \to R$ stetig in $a \in D$ und $\lambda \in R$;

(i) $f+g: D \to R$ stetig in *a*

(ii) $\lambda f: D \to R$ stetig in *a*

(iii) $f \cdot g: D \to R$ stetig in *a*

(iv) Ist $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}: D' \to R$ stetig in *a* ($D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$)

(v) Sei $f: D \to R$, $g: E \to R$ mit $f(D) \subset E$, *f,g* stetig in *a*
$\Rightarrow$ $g \circ f: D \to R$ ist stetig in *a*

(vi) $\varepsilon - \delta$-Definition von Stetigkeit

Äquivalent sind für $f: D \to R$ und $a \in D$

(a) *f* ist stetig in *a*

(b) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, so dass gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ $\forall x \in D$ mit $|x-a| < \delta$

(vii) Zwischenwertsatz

Sei $f[a,b] \to R$ stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$

$\Rightarrow \quad \exists p \in [a,b]$ mit $f(p) = 0$

(viii) Beschränktheit

$f : D \to R$ heißt beschränkt, falls $\exists M \in R$, so dass gilt: $|f(x)| \le M$ $\forall x \in D$

(a) Sei $f : [a,b] \to R$ stetig

$\Rightarrow$ f ist beschränkt und nimmt Maximum und Minimum an.

(Achtung! Satz gilt nicht für offene, halboffene oder unendliche Intervalle!)

(ix) Gleichmäßige Stetigkeit

$f : D \to R$ heißt gleichmäßig stetig auf D:

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, so dass gilt: $|f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \forall x, x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$

(a) Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion f ist auf diesem Intervall gleichmäßig stetig.

§ 6 Funktionenfolgen und Reihen von Funktionenfolgen

Seien $f_n : D \to R$ Funktionen $\forall n \in N$

I. Punktweise Konvergenz

Die Folge (f_n) konvergiert (punktweise) gegen $f : D \to R$, wenn $\forall x \in D$ gilt:

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\exists}{=} f(x)$, d.h. wenn gilt:

$\forall x \in D$ und $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(x,\varepsilon) \in N$ (=natürliche Zahlen), so dass:

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$

II. Gleichmäßige Konvergenz

Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf D gegen $f : D \to R$, wenn gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N = N(\varepsilon)$, so dass: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$ und $\forall x \in D$

(i) Konvergiert (f_n) gleichmäßig, so konvergiert (f_n) auch punktweise.

(ii) Sei $f_n : D \to R$ stetig $\forall n \geq 1$ und konvergiere gleichmäßig gegen $f : D \to R$;
$\Rightarrow f$ ist stetig

(iii) Seien $(f_n), (g_n)$ gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen auf $D \subset R$ und $h : D \to R$ eine beschränkte Funktion:

(a) $(f_n + g_n)$ konvergiert gleichmäßig auf D

(b) $(h \cdot f_n)$ konvergiert gleichmäßig auf D

(c) $(f_n \cdot g_n)$ konvergiert gleichmäßig auf D, falls $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ und $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ beschränkt sind

III. Supremumsnorm

Für $f : D \to R$ definiert man die Supremumsnorm durch

$\|f\| := \|f\|_D = \sup|f(x)| \in R \cup \{\infty\}$

(i) Ist f beschränkt auf $D \Leftrightarrow \|f\| < \infty$

(ii) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ auf D

(iii) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\| \qquad \forall \lambda \in R$

(iv) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

(v) Für eine Folge $(f_n) : D \to R$ sind äquivalent:

(a) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen $f : D \to R$ auf D

(b) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$

IV. Konvergenz von Reihen von Funktionenfolgen

Sei $f_n : D \to R$ ($\forall n \in N$) eine Funktionenfolge;

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig (bzw. punktweise) auf D:

$\Leftrightarrow$ Die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in N}$ konvergiert gleichmäßig (bzw. punktweise) auf D

V. Konvergenz-Kriterium von Weierstraß

Sei $f_n : D \to R$ eine Funktionenfolge und sei $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert absolut gleichmäßig auf D gegen eine Funktion $f : D \to R$

VI. Potenzreihen

Die formale Summe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ heißt Potenzreihe von (dem Entwicklungspunkt) x_0.

(i) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe, die in $x = x_1$ konvergiert; sei $\varphi \in R$ mit $0 < \varphi < |x_1 - x_0|$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konvergiert auf $[x_0 - \varphi, x_0 + \varphi]$ absolut und gleichmäßig

(ii) Sei $R := \sup\left\{ |x_1 - x_0| \in R \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ konvergiert in } x_1 \in R \right\} \in R_+ \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konvergiert im Intervall $(x_0 - R, x_0 + R)$ und divergiert $\forall x$ mit $|x - x_0| > R$;

das Intervall $(x_0 - R, x_0 + R)$ heißt Konvergenzintervall von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, R heißt Konvergenzradius.

VII. Häufungspunkte

Sei (a_n) eine Folge. Die Häufungspunkte von (a_n) sind die Grenzwerte konvergenter Teilfolgen. ∞ (bzw. $-\infty$) heißt (uneigentlicher) Häufungspunkt von (a_n) falls eine Teilfolge von (a_n) existiert, die uneigentlich gegen ∞ (bzw. $-\infty$) konvergiert (= bestimmte Divergenz).

(i) Jede Folge (a_n) hat wenigstens einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Häufungspunkt.

(ii) Lim sup/ Lim inf einer Folge

$\lim\ \sup(a_n) := \sup\{\textit{Häufungspunkte}(a_n)\} \in R \cup \{-\infty, \infty\}$

$\lim\ \inf(a_n) := \inf\{\textit{Häufungspunkte}(a_n)\} \in R \cup \{-\infty, \infty\}$

VIII. Formel von Hadamard

Für den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ gilt:

$$R := \frac{1}{\limsup_{n \to \infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)}$$

§ 7 Die elementaren Funktionen

I. Umkehrfunktion

Sei $f: M \to N$ eine bijektive Abbildung, d.h. es existiert genau ein $m \in M$ mit $f(m) = n$. Dann ist die Umkehrabbildung

$$f^{-1}: N \to M$$

definiert, nämlich

$$f^{-1}(n) = m \quad \Leftrightarrow \quad f(m) = n$$

II. Monotonie von Funktionen

$f: [a,b] \to R$ heißt monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend), wenn gilt:
Für $x, x' \in [a,b], x < x'$ ist $f(x) \leq f(x')$ (bzw. $f(x) < f(x')$).
$f: [a,b] \to R$ heißt monoton fallend (bzw. streng monoton fallend), wenn gilt:
Für $x, x' \in [a,b], x < x'$ ist $f(x) \geq f(x')$ (bzw. $f(x) > f(x')$).

(i) Sei $f: [a,b] \to R$ stetig, streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) und $A := f(a)$, $B := f(b)$
$\Rightarrow f: [a,b] \to [A,B]$ (bzw. $f: [a,b] \to [B,A]$) ist bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1}: [A,B] \to [a,b]$ (bzw. $f^{-1}: [B,A] \to [a,b]$) ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend)

III. Algebraische und transzendente Funktionen

(i) Eine Funktion $f: D \to R$ heißt algebraisch, wenn es auf D Polynome $p_0, ..., p_n \neq 0$ gibt, so dass gilt:

$$p_0(x) + p_1(x)f(x) + ... + p_n(x)f^n(x) \equiv 0$$

Für $n = 1$ sind das gerade die rationalen Funktionen:

$$p_0(x) + p_1(x)f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = -\frac{p_0(x)}{p_1(x)}$$

(ii) Eine Funktion $f: D \to R$ heißt transzendent, wenn sie nicht algebraisch ist.

IV. Die Exponentialfunktion (und ihre Umkehrfunktion)

(i) Die Exponentialfunktion $\exp: R \to R_+ *$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

(ii) Der Logarithmus

$$\ln: \begin{cases} R_+ * \to R \\ x \mapsto \ln x \end{cases}$$

ist die Umkehrfunktion von exp. Sie ist ebenfalls stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

(iii) Rechenregeln der Exponentialfunktion

Seien $a > 0, x \in R$ und sei $a^x := \exp(x \cdot \ln a)$. Dadurch ist eine Funktion definiert:

$$\exp_a: \begin{cases} R \to R \\ x \mapsto a^x \end{cases}$$

Es gilt:

(a) $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y) \quad \Leftrightarrow \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(b) $\exp_a(n) = a^n \qquad \forall n \in N$

(c) $\exp_a\left(\dfrac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} \quad \Leftrightarrow \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \qquad \forall p,q \in Z, q \geq 2$

$\forall x, y \in R, \forall a,b > 0$ ist

(d) $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$

(e) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

(f) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

(iv) Grenzwerte der Exponential-Funktion

$\forall k \in N$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$$

$\forall \alpha > 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^\alpha \ln x = 0$$

V. Die komplexen Zahlen

$i := \sqrt{-1}$

$C := \{x + iy \mid x, y \in R\} = R^2$

Bezüglich der Operationen

$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$(x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

wird C zu einem Körper, dem Körper der komplexen Zahlen.

Realteil: $\operatorname{Re} Z := x$

Imaginärteil: $\operatorname{Im} Z := y$

(i) Komplexe Konjugation

Die Abbildung

$$C \to C$$

$$z = x + iy \to \overline{z} = x - iy$$

heißt komplexe Konjugation. Es gilt $\forall z, z_1, z_2 \in C$:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(c) $\overline{\overline{z}} = z$

(d) $|z| \geq 0$ bzw. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(e) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

(f) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(ii) Konvergenz komplexer Zahlenfolgen

Eine Folge $(z_n)_{n \in N}$ komplexer Zahlen heißt konvergent gegen $z \in C$

$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in N$ (=natürliche Zahlen): $\quad |z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\lim_{n\to\infty} z_n = z$

Weiterhin sind äquivalent:

(a) $\lim_{n\to\infty} z_n = z$

(b) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z) \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z)$

bzw.:

(a) $\lim_{n\to\infty} z_n = z$

(b) $\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = z$

(iii) Cauchy-Folgen komplexer Zahlen

Eine Folge (z_n) komplexer Zahlen heißt Cauchy-Folge:

$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in N$ (=natürliche Zahlen) $|z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$

Es sind äquivalent:

(a) (z_n) ist Cauchy-Folge

(b) $\mathrm{Re}(z_n)$ und $\mathrm{Im}(z_n)$ sind Cauchy-Folgen

Weiter gilt: In C konvergiert jede Cauchy-Folge.

(iv) Rechenregeln für Grenzwerte komplexer Zahlen

Seien $(z_n),(z'_n)$ konvergente Folgen komplexer Zahlen. Dann gilt:

(a) $\lim(z_n + z'_n) = \lim z_n + \lim z'_n$

(b) $\lim(z_n z'_n) = \lim z_n \cdot \lim z'_n$

(c) Ist $\lim z_n' \neq 0$, so ist $z'_n \neq 0 \ \forall n > n_0$ und es gilt:

$$\lim\left(\frac{z_n}{z'_n}\right) = \frac{\lim z_n}{\lim z'_n}$$

(v) Folge von Partialsummen komplexer Zahlen-Reihen

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ komplexer Zahlen heißt konvergent, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen $s_n = \sum_{\upsilon=0}^{n} z_\upsilon$ konvergent ist.

(vi) Absolute Konvergenz komplexer Zahlen-Reihen

Eine Reihe komplexer Zahlen heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{\upsilon=0}^{\infty} |z_\upsilon|$ konvergent ist.

Ist $\sum_{\upsilon=0}^{n} z_\upsilon$ absolut konvergent, dann ist $\sum_{\upsilon=0}^{n} z_\upsilon$ auch normal konvergent.

(vii) Majoranten-Kriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent mit $c_n \in R_+ \ \forall n$ und sei (z_n) eine Folge komplexer Zahlen mit

$|z_n| < c_n \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert absolut

(viii) Quotienten-Kriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ eine Reihe komplexer Zahlen mit $z_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$

Annahme: $\quad \exists \Theta \in R$ mit $0 < \Theta < 1$, so dass gilt:

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq \Theta \quad \forall n \geq n_0$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert absolut

(ix) Gleichmäßige Konvergenz

Sei $K \subset C$, $f_n : K \to C$ Funktionen mit $n \in N$

Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen $f : K \to C$

$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N = N(\varepsilon) \in N: \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in K$

(x) Potenzreihen

Sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen und $z_0 \in C$

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergiert für ein $z_1 \in C$, $z_1 \neq z_0$.

Sei $\varphi \in R$ mit $0 < \varphi < |z_1 - z_0|$

$K(z_1, \varphi) := \{z \in C \mid |z - z_0| \leq \varphi\}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n |z - z_0|^n$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $K(z_0, \varphi)$

Sei $R := \sup\left\{(z - z_0) \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \; konvergent\right\}$; R heißt Konvergenzradius und es gilt:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(xi) Produkte von komplexen Zahlen-Reihen

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent in C; setze $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

§ 8 Die trigonometrischen Funktionen

$$\sin: \begin{cases} R \to R \\ x \mapsto \sin(x) := \sum_{\upsilon=0}^{\infty} (-1)^{\upsilon} \dfrac{x^{2\upsilon+1}}{(2\upsilon+1)!} \end{cases}$$

heißt Sinus-Funktion und ist eine ungerade Funktion $\Rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$

$$\cos: \begin{cases} R \to R \\ x \mapsto \cos(x) := \sum_{\upsilon=0}^{\infty} (-1)^{\upsilon} \dfrac{x^{2\upsilon}}{(2\upsilon)!} \end{cases}$$

heißt Cosinus-Funktion und ist eine gerade Funktion $\Rightarrow \cos(-x) = \cos(x)$

I. Konvergenz und von Sinus- und Cosinus-Reihen

Die Reihen von sin und cos konvergieren auf ganz R.

II. Stetigkeit der sin- und der cos-Funktion

$\sin x$ und $\cos x$ sind auf ganz R stetig.

III. Eulersche Formel

$\exp(ix) = \cos x + i \sin x \qquad \forall x \in R$

(i) $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$

(ii) $\sin x = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

(iii) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

IV. Additionstheoreme der sin- und der cos-Funktion

(i) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

(ii) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

V. Nullstellen der trigonometrischen Funktionen

$\cos x$ hat im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle.

Definition: $\dfrac{\pi}{2}$ ist die eindeutig bestimmte Nullstelle vom cos in $[0,2]$.

VI. Perioden der sin- und der cos-Funktion

$\forall x \in R$ gilt:

(i) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ bzw.

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$

(ii) $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ bzw.

$-\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$

(iii) $\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi, \quad k \in Z$ bzw.

$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$

VII. Die Tangens-Funktion (und die Cotangens-Funktion)

$$\tan : \begin{cases} D = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi Z \right\} \to R \\ \\ x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \end{cases}$$

heißt Tangens-Funktion.

$$\cot : \begin{cases} D' = R - \{\pi Z\} \to R \\ \\ x \mapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \end{cases}$$

heißt Cotangens-Funktion.

(i) Stetigkeit vom Tangens und vom Cotangens
tan und cot sind stetig auf D bzw. D'.

(ii) Additionstheorem vom Tangens
$\forall x, y \in D$ mit $x + y \in D$ gilt:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

§ 9 Differenzierbarkeit von Funktionen

Sei $D \subset R$ Vereinigung von offenen Intervallen (a_υ, b_υ)

$f : D \to R$ heißt differenzierbar in $x_0 \in D$

$\Leftrightarrow \quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert

$\Leftrightarrow \quad \forall$ Folgen $(x_n) \subset D$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \overset{\exists}{=} x_0$ gilt: $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \overset{\exists}{=} f'(x_0)$

$f'(x_0)$ heißt Ableitung von f in x_0 oder Differentialquotient von f in x_0.

f differenzierbar $\quad \Leftrightarrow \quad f$ differenzierbar in $x_0 \quad \forall x_0 \in D$

Man schreibt: $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}$

I. **Geometrische Bedeutung der Differenzierbarkeit (Differenzenquotient)**

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist die Steigung der Sekante von f durch $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$.

Man nennt diesen Ausdruck auch Differenzenquotient.

II. **Rechts- und linksseitige Differenzierbarkeit**

Sei $D = [a,b]$, $f : D \to R$;

f heißt rechtsseitig differenzierbar, falls $\lim\limits_{\substack{x > a \\ \to}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existiert.

f heißt linksseitig differenzierbar, falls $\lim\limits_{\substack{x < b \\ \to}} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$ existiert.

III. **Punktweise Approximierbarkeit differenzierbarer Funktionen**

Äquivalent sind für $f : D \to R$ und $x_0 \in D$:

(i) f ist differenzierbar in x_0

(ii) $\exists c \in R$ und eine in x_0 stetige Funktion $\varphi : D \to R$, so dass gilt:

$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$

(ii) besagt: f ist in $x_0 \in D$ durch eine lineare Funktion approximierbar, nämlich durch: $L(x) = f(x_0) + c(x - x_0)$

IV. **Abhängigkeit von Differenzierbarkeit und Stetigkeit**

Sei $f : D \to R$ differenzierbar in x_0

$\Rightarrow f$ ist stetig in x_0

V. **Rechenregeln für Ableitungen**

Seien $f, g: D \to R$ differenzierbar in x_0 und $\lambda \in R$

(i) $f + g$ und λf sind differenzierbar in x_0 und es gilt:

$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

(ii) **Produktregel**

$(f \cdot g)$ ist differenzierbar in x_0 und es gilt:

$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) g'(x_0) + f'(x_0) g(x_0)$

(iii) **Quotientenregel**

Sei weiterhin $g \neq 0$;

$\Rightarrow \dfrac{f}{g}: D \to R$ ist differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Spezialfall: $f = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

VI. **Die Ableitungs-Funktion**

Ist $f: D \to R$ differenzierbar in jedem Punkt $x \in D$, so ist durch

$$f': \begin{cases} D \to R \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

eine neue Funktion definiert, die (erste) Ableitung f' von f. Damit erhält man

(i) $(f+g)' = f' + g'$

(ii) $(\lambda f)' = \lambda (f') = \lambda f'$

(iii) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Ist f' differenzierbar, so heißt f'' die zweite Ableitung von f.

Ist f'' differenzierbar, so heißt f''' die dritte Ableitung von f usw.

f heißt unendlich oft differenzierbar, wenn f beliebig oft differenzierbar ist.

VII. **Lokale Extrema**

Besitzt eine Funktion $f: (a,b) \to R$ ein lokales Extremum so besitzt sie ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum. Äquivalent sind:

(1) f hat in $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum)

(2) $\exists \varepsilon > 0$, so dass $x \in (a,b)$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt:

$f(x_0) \geq f(x)$ (bzw. $f(x_0) \leq f(x)$)

Man bezeichnet ein lokales Extremum auch als relatives Extremum.

(i) $f: (a,b) \to R$ sei in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar und besitzt in x_0 ein lokales Extremum

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

(Vorsicht! Die Umkehrung gilt nicht!)

(ii) **Satz von Rolle**

Sei $f: [a,b] \to R$ auf $[a,b]$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Weiterhin sei $f(a) = f(b)$, $a \neq b$.

$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ mit $f'(\xi) = 0$

(iii) **Mittelwertsatz**

Sei $f: [a,b] \to R$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $[a,b]$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) \text{ mit } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(iv) Sei $f:(a,b)\to R$ ((a,b) sei ein endliches oder unendliches Intervall) in $x_0 \in (a,b)$ zweimal differenzierbar, $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)<0$ (bzw. $f''(x_0)>0$).

$\Rightarrow$ f hat in x_0 ein isoliertes lokales Maximum (bzw. isoliertes lokales Minimum)

VIII. **Lokal gleichmäßige Konvergenz**

Sei I (endliches oder unendliches) Intervall: $f_\upsilon : I \to R \quad \forall \upsilon \in N_0$

$\sum\limits_{\upsilon=0}^{\infty} f_\upsilon$ heißt lokal gleichmäßig konvergent

$\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in I$ existiert ein endliches Intervall $(a_x,b_x) \subset I$ mit $x \in (a_x,b_x)$, so dass $\sum\limits_{\upsilon=0}^{\infty} f_\upsilon(x)$ auf (a_x,b_x) gleichmäßig konvergent ist.

(i) Sei $f_\upsilon : I \to R$ differenzierbar $\forall \upsilon \in N_0$ und $\sum\limits_{\upsilon=0}^{\infty} f_\upsilon(x)$ konvergiere in einem Punkt $x_0 \in I$. Weiter konvergiere $\sum\limits_{\upsilon=0}^{\infty} f_\upsilon'(x)$ lokal gleichmäßig auf I

$\Rightarrow \sum\limits_{\upsilon=0}^{\infty} f_\upsilon(x)$ konvergiert lokal gleichmäßig auf I, sie ist auf I differenzierbar und es gilt:

$$\left(\sum_{\upsilon=0}^{\infty} f_\upsilon(x)\right)' = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} f_\upsilon'(x)$$

(ii) Jede Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist im Inneren ihres Konvergenzintervalls unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$$

IX. **Differenzierbarkeit in Bezug auf Umkehrfunktionen**

Sei $I \subset R$ ein Intervall und $f: I \to R$ streng monoton. Weiterhin sei $I^* = f(I)$ und $\varphi = f^{-1}: I^* \to R$ die Umkehrfunktion von f.

Sei f nun in $x \in I$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$;

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}$$

X. **Monotonie**

Sei $f:[a,b]\to R$ stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b). Sei weiterhin $f'(x)\geq 0$ (bzw. $f'(x)>0$ / $f'(x)\leq 0$ / $f'(x)<0$) $\forall x \in (a,b)$)

$\Rightarrow$ f ist monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend/ monoton fallend/ streng monoton fallend)

XI. **Kettenregel**

Seien $f: I \to R$, $g: J \to R$ mit $f(I) \subset J$ zwei Funktionen. Seien weiterhin f in $x \in I$ differenzierbar und g in $y = f(x) \in J$ differenzierbar.

$\Rightarrow$ $g \circ f : I \to R$ ist in x differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

XII. **Konvexe und konkave Funktionen**

Sei $I \subset R$ ein (endliches oder unendliches) Intervall. Äquivalent sind:

(1) $f : I \to R$ heißt konvex

(2) $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und $\forall \lambda \in R$ mit $0 < \lambda < 1$ ist

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$f : I \to R$ heißt konkav $\quad \Leftrightarrow \quad -f$ ist konvex

(i) Sei $f : (a,b) \to R$ zweimal differenzierbar. Äquivalent sind:

(1) f ist konvex

(2) $f''(x) \ge 0 \qquad \forall x \in (a,b)$

(ii) Hilfssatz: Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

$\Rightarrow \forall x, y \in R_+$ gilt: $x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \le \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}$

XIII. **Die Norm**

Sei V ein $C-$ oder ein $R-$ Vektorraum. Eine Norm auf V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| \begin{cases} V \to R^+ \\ v \mapsto \|v\| \end{cases}$$

mit

(1) $\|v\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$

(2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \qquad \forall \lambda \in R$ bzw. C

(3) $\|v_1 + v_2\| \le \|v_1\| + \|v_2\|$

$\forall v, v_1, v_2 \in V$

XIV. **Allgemeiner Mittelwertsatz**

Seien $f, g : [a,b] \to R$ stetig $(-\infty < a < b < \infty)$ und differenzierbar auf (a,b), sei g' stetig und $\ne 0$ auf (a,b)

$$\Rightarrow \quad \exists \xi \in (a,b): \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

XV. **Regeln von De L'Hospital**

(i) **1. Regel von De L'Hospital**

Sei $a < b \le \infty$ und seien $f, g : [a,b) \to R$ differenzierbar auf (a,b) mit $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x) = 0$ und $g' \ne 0$ und stetig auf (a,b)

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{\exists}{=} \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der rechte Grenzwert existiert

(ii) **2. Regel von De L'Hospital**

Sei $a < b \le \infty$ und seien $f, g : [a,b] \to R$ differenzierbar auf (a,b) mit $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \infty$ und $g' \ne 0$ und stetig auf (a,b)

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{\exists}{=} \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der rechte Grenzwert existiert.

§10 Taylor-Formeln und Taylor-Reihen

Sei $I \subset R$ offenes Intervall, $n \in N$;
$C^n(I) = R - VR$ der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf I (stetig differenzierbar = n-mal differenzierbar und die n-te Ableitung ist stetig);
$C^\infty(I) = R - VR$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf I;

I. Das Taylor-Polynom

Sei $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$

$T_n(f, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ heißt das Taylor-Polynom n-ten Grades von f mit Entwicklungspunkt x_0.

II. Das Rest-Glied

$R_n(f, x_0) = f - T_n(f, x_0)$ ist das n-te Rest-Glied von f in x_0.

(i) Rest-Glied-Abschätzung

Sei $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$ $\quad \Rightarrow \forall x \in I$ ist

$$|R_n(f, x_0)(x)| \le \frac{1}{(n-1)!} \sup_{0<t<1} \left| f^{(n)}(x_0 + t(x - x_0)) - f^{(n)}(x_0) \right| |x - x_0|^n$$

III. Die Taylor-Reihe

$T(f, x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ heißt Taylor-Reihe von f in x_0.

IV. Anwendung der Taylor-Sätze: Reihen-Entwicklung des Logarithmus

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \qquad \forall |x| < \frac{1}{2}$$

V. Schlömilchsche Restglied-Darstellung

Sei $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $p > 0$; sei $f \in C^{n+1}(I)$;

$\Rightarrow \quad \forall x \in I, x \neq x_0 \ \exists \xi \in (x_0, x) \vee (x, x_0)$, so dass:

$$R_n(f, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!} \cdot \left(\frac{x - \xi}{x - x_0} \right)^{n-p+1} (x - x_0)^{n+1}$$

VI. Satz zu Potenzreihen

Sei $f : I \to R$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe;

$\Rightarrow \quad T(f, x_0) = f$ auf $I \subset R$ (offenes Intervall)

VII. Analytische Funktionen

Sei $I \subset R$ ein offenes Intervall (endlich oder ∞); $f \in C^\infty(I)$ heißt analytische Funktion, wenn es zu jedem $x_0 \in I$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass:

$f(x) = T(f, x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

Mit anderen Worten:

f analytisch $\quad \Leftrightarrow \quad$ f lokal in eine Potenzreihe entwickelbar

$C^\omega(I) = \{ f \in C^\infty(I) | f \ analytisch \} \le C^\infty(I)$

(i) Sei $C^\omega(I)$ ein R-VR und $f = T(f_i, x_0)$ auf $(x_0 - \varepsilon_i, x_0 + \varepsilon_i)$ für $i = 1,2$;

$\Rightarrow \quad f_1 + f_2 = T(f_1 + f_2, x_i) \qquad$ auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit $\varepsilon = Min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

$\alpha f = T(\alpha f, x_0) \qquad$ auf $(x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$ mit $\alpha \in R$

(ii) Analytische Funktionen sind:

(1) Polynome auf R

(2) Sin, cos,exp auf R

(3) log auf $(0,\infty)=R_+$

(4) f analytisch $\Leftrightarrow$ f' analytisch

(5) f_1, f_2 analytisch auf $I \Leftrightarrow f_1 \cdot f_2$ analytisch

VIII. <u>Binomische Reihe</u>

Sei $\alpha \in R$;

$\Rightarrow$ $\forall x \in (-1,1)$ ist: $\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}$

Hierbei ist: $$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots \cdot n}$$

Für $\alpha \in N$ bricht die Reihe ab.

IX. <u>Cauchysche Restglied-Abschätzung</u>

Für $p=1$ ist:

$$R_n(f,x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left(\frac{x-\xi}{x-x_0}\right)^n (x-x_0)^{n+1}$$

§ 11 Das Riemann-Integral

I. **Die Treppenfunktion**

Sei $I=[a,b]$ mit $-\infty<a<b<\infty$ ein geschlossenes Intervall;

$\varphi:[a,b]\to R$ heißt Treppenfunktion

$\Leftrightarrow$ $\exists$ Unterteilung $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, so dass:

$\varphi(x_{i-1},x_i)=c_i=konst.$ $\forall i=1,\ldots,n$

Die Funktionswerte $\varphi(x_i)$ sind beliebig.

(i) Die Menge $T[a,b]$ aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$ ist ein UVR des R-VRs aller Funktionen auf $[a,b]$.

(ii) Integral einer Treppenfunktion

Sei $\varphi\in T[a,b]$ definiert bzgl. der Unterteilung $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ und sei $\varphi(x_{k-1},x_k)=c_k$ für $k=1,\ldots,n$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{k=1}^n c_k(x_k-x_{k-1})$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Unterteilung.

(iii) Rechnen mit Integralen über Treppenfunktionen

Seien $\varphi,\psi\in T[a,b]$, $\lambda\in R$; dann gilt:

(1) $\int_a^b(\varphi+\psi)dx=\int_a^b\varphi dx+\int_a^b\psi dx$

(2) $\int_a^b\lambda\varphi dx=\lambda\int_a^b\varphi dx$

(3) $\varphi\le\psi \quad\Rightarrow\quad \int_a^b\varphi dx\le\int_a^b\psi dx$

II. **Ober- und Unterintegral**

Sei $f:[a,b]\to R$ eine beliebige, beschränkte Funktion; dann heißen

(1) $\int_a^{b*} f(x)dx := \inf\left\{\int_a^b\varphi dx \,\middle|\, \varphi\in T[a,b],\varphi\ge f\right\}$ Oberintegral von f und

(2) $\int_{a*}^{b} f(x)dx := \sup\left\{\int_a^b\varphi dx \,\middle|\, \varphi\in T[a,b],\varphi\le f\right\}$ Unterintegral von f.

(i) Seien $f,g:[a,b]\to R$ beschränkt;

(1) $\int^*(f+g)\le\int^*f+\int^*g$ bzw. $\int_*(f+g)\ge\int_*f+\int_*g$ (Subadditivität)

(2) $\int^*(\lambda f)=\lambda\int^*f$ bzw. $\int_*(\lambda f)=\lambda\int_*f$ $\forall\lambda\ge0$

(3) $\int^*(\lambda f)=\lambda\int_*f$ bzw. $\int_*(\lambda f)=\lambda\int^*f$ $\forall\lambda<0$

(ii) Sei $f:[a,b]\to R$ stetig; dann gilt:

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\varphi,\psi\in T[a,b]$ mit

(1) $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ $\forall x$

(2) $\int_a^b\psi(x)-\int_a^b\varphi(x)\le\varepsilon$ $\forall x$

III. <u>Integrierbarkeit stetiger Funktionen</u>

Sei $f:[a,b]\to R$ stetig; dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar.

IV. <u>Integrierbarkeit monotoner Funktionen</u>

Sei $f:[a,b]\to R$ eine monotone Funktion; dann ist f integrierbar.

V. <u>Rechenregeln in der Integration</u>

Seien $f,g:[a,b]\to R$ integrierbar, $\lambda\in R$;

$\Rightarrow$ $f+g$ und λf sind integrierbar und es gilt:

(1) $\int_a^b (f+g)dx=\int_a^b fdx+\int_a^b gdx$

(2) $\int_a^b \lambda fdx=\lambda\int_a^b fdx$

(3) $f\le g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b fdx\le\int_a^b gdx$

Die integrierbaren Funktionen $\{f:[a,b]\to R\}$ bilden also einen R-VR und $\int_a^b \cdot\, dx$ ein monotones Funktional.

VI. <u>Integrierbarkeit von Produkten und Potenzen</u>

Seien $f_+,f_-:I\to R$ definiert durch

$$f_+(x):=\begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x)\ge 0\\ 0 & \text{falls } f(x)<0\end{cases}$$ und durch

$$f_-(x):=\begin{cases} 0 & \text{falls } f(x)\ge 0\\ -f(x) & \text{falls } f(x)<0.\end{cases}$$

Seien $f,g:I=[a,b]\to R$ integrierbar; dann gilt:

(1) f_+,f_- sind integrierbar

(2) $\forall p\in[1,\infty)$ ist $|f|^p:[a,b]\to R$ integrierbar

(3) $f\cdot g:[a,b]\to R$ ist integrierbar

VII. <u>Allgemeiner Mittelwertsatz der Integralrechnung</u>

Seien $f,\varphi:[a,b]\to R$ stetig und $\varphi\ge 0$

$\Rightarrow$ $\exists\xi\in[a,b]$, so dass gilt:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(\xi)\int_a^b\varphi(x)dx$$

(i) <u>Gewöhnlicher Mittelwertsatz der Integralrechnung</u>

Sei $f:[a,b]\to R$ stetig;

$\Rightarrow$ $\exists\xi\in[a,b]$ mit:

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\cdot(b-a)$$

VIII. <u>Die Riemannsche Summe</u>

Sei $f:[a,b]\to R$ mit der Unterteilung $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$; weiter sei $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ beliebig mit $k=1,\ldots,n$;

Dann heißt $\sum_{k=1}^{n} f(\xi)\cdot(x_k - x_{k-1})$ Riemannsche Summe von f zur Unterteilung $(x_k)_{k=1}^{n}$ mit den Stützstellen (ξ_k).

(i) Feinheit einer Unterteilung

Die Feinheit der Unterteilung $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ ist definiert als

$$\eta := \operatorname{Max}_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}).$$

(ii) Approximierbarkeit von Integralen durch Riemannsche Summen

Sei $f:[a,b] \to R$ integrierbar;

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, so dass für jede Unterteilung $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ der Feinheit $\leq \delta$ und jede Wahl der Stützstellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \leq \varepsilon, \text{ d.h.}$$

das Integral einer integrierbaren Funktion lässt sich beliebig genau durch Riemannsche Summen approximieren.

IX. Berechnete Integrale

(i) Integral von $\cos x$

$$\int_0^a \cos x dx = \sin a$$

(ii) Integral von $1/x$

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = \ln a$$

X. Höldersche Ungleichung

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \qquad \text{für } p,q > 1 \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

XI. Minkowski-Ungleichung

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \forall p \geq 1$$

XII. Integral zusammengesetzter Strecken

Seien $a < b < c$ und $f:[a,c] \to R$ eine Funktion; dann sind äquivalent:

(1) f ist integrierbar

(2) f ist auf $[a,b]$ und auf $[b,c]$ integrierbar

(3) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

§ 12 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

I. Stammfunktion

Sei $I \subset R$ Intervall, $f : I \to R$ stetig und $x_0 \in I$; für jedes $x \in I$ sei

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

$\Rightarrow$ $F : I \to R$ ist differenzierbar und es gilt: $F' = f$.

(i) $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ heißt unbestimmtes Integral von f (als Funktion von x).

(ii) Eine differenzierbare Funktion $F : I \to R$ heißt Stammfunktion, falls $F' = f$.

(1) Das unbestimmte Integral ist eine Stammfunktion.

(2) Sei $F : I \to R$ Stammfunktion von f; für $G : I \to R$ sind äquivalent:

(a) G ist Stammfunktion von f

(b) $G - F = const.$

II. Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : I \to R$ stetig, und sei F Stammfunktion von f;

$\Rightarrow$ $\forall a,b \in I$ ist $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

III. Differentiationsvorschriften

(i) Sei $s \in R, s \neq -1$:

$$\int_a^b x^s dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}\Big|_a^b$$

(1) Sei $s \in N_0$ $\Rightarrow$ a,b beliebig

(2) Sei $s \in Z, s \leq -2$, dann muss gelten: $0 \notin [a,b]$

(3) Sei $s \notin Z$, so muss gelten: $[a,b] \in R_+^*$

(ii) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_a^b$, falls $0 \notin$ Integrationsintervall

(iii) $\int \sin x dx = -\cos x$

$\int \cos x dx = \sin x$

(iv) $\int \exp(x)dx = \exp(x)$

(v) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ für $|x| < 1$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$

(vi) $\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$

(vii) $\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

(viii) Substitutionsregel

Sei $f: I \to R$ stetig und $\varphi: [a,b] \to I \subset R$ und sei φ stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

(ix) Sei $\varphi: [a,b] \to R$ stetig differenzierbar mit $\varphi(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$, dann gilt:

$$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \ln|\varphi(t)| \Big|_a^b$$

(x) Hilfsmethode zur Termzerlegung: Partialbruchzerlegung

Sei ein Bruch gegeben der Form $\frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{(x-b_1)(x-b_2)...(x-b_m)}$ ($m \geq n$), dann lässt sich dieser zerlegen und neu zusammenfügen:

$$\frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{(x-b_1)(x-b_2)...(x-b_m)} = \frac{A_1}{x-b_1} + ... + \frac{A_m}{x-b_m} =$$

$$\frac{A_1(x-b_2)...(x-b_m) + ... + A_m(x-b_1)(x-b_{m-1})}{(x-b_1)...(x-b_m)}$$

Daraus lassen sich $A_1, ..., A_m$ eindeutig bestimmen;

$$\Rightarrow \int_c^d \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{(x-b_1)(x-b_2)...(x-b_m)} dx = \int_c^d \frac{A_1}{x-b_1} dx + ... + \int_c^d \frac{A_m}{x-b_m} dx$$

(xi) Partielle Integration

Seien $f, g \in C^1([a,b])$;

$$\Rightarrow \int_a^b (f(x) g'(x)) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

(xii) Sei $f \in C^1([a,b])$; für $k \in R$ sei $F(k) = \int_a^b f(x) \sin(kx) dx$

$$\Rightarrow \lim_{|k| \to \infty} F(k) = 0$$

(xiii) Trapez-Regel

Sei $f \in C^2([0,1])$; dann existiert ein $\xi \in [0,1]$, so dass gilt:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \frac{1}{12} f''(\xi)$$

§ 13 Uneigentliche Integrale der Γ-Funktion

I. **Fall 1**

Sei $f:[a,\infty)\to R$ über jedem Intervall $[a,R]$ integrierbar; angenommen $\lim\limits_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$ existiert; dann setzt man

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx.$$

Man spricht von einem konvergenten uneigentlichem Integral.

(i) Beispiel: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}=\frac{1}{s-1}$ für $s>1$

II. **Fall 2**

Sei $f:[a,b]\to R$ über jedem Teilintervall $[a+\varepsilon,b]$ integrierbar ($0<\varepsilon<b-a$); angenommen $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ existiert; dann setzt man

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Man spricht von einem konvergenten uneigentlichem Integral.

(i) Beispiel: $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}=\frac{1}{1-s}$ für $s<1$

III. **Fall 3**

Sei $f:(a,b)\to R$ mit $-\infty\le a<b\le\infty$ auf jedem endlichen Teilintervall $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ integrierbar; sei $c\in(a,b)$ beliebig; angenommen, die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{R\to b}\int_c^R f(x)dx$ und $\lim\limits_{R\to a}\int_R^c f(x)dx$ existieren; dann setzt man

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{R\to a}\int_R^c f(x)dx+\lim_{R\to b}\int_c^R f(x)dx.$$

Man spricht von einem konvergenten uneigentlichem Integral.
Bemerkung: Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von c.

(i) Beispiel: $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$

(ii) Beispiel: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$

IV. **Integral-Vergleichs-Kriterium von Reihen**

Sei $f:[1,\infty)\to R_+$ monoton fallend und integrierbar; äquivalent sind

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ ist konvergent.

(2) $\int_1^\infty f(x)dx$ ist konvergent.

V. **Logarithmische Konvexität**

Sei $I\subset R$ Intervall; $F:I\to R_+^*$ ist logarithmisch konvex, wenn gilt:

(1) $\log F : I \to R$ ist konvex $\Leftrightarrow$

(2) $x, y \in I, 0 < \lambda < 1$: $\quad \ln(F(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \lambda \ln F(x) + (1-\lambda)\ln F(y)$

VI. Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \forall x > 0$$

(i) Funktionalgleichung von Γ: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0$

(ii) $\Gamma(n+1) = n!$

(iii) $\Gamma : R_+^* \to R_+^*$ ist logarithmisch konvex

(iv) Für $F : R_+^* \to R_+^*$ sind äquivalent:

(1) $F = \Gamma$

(2) $F(x+1) = xF(x)$

(3) F ist logarithmisch konvex

(v) $\Gamma(x)$ kann folgendermaßen in verschiedenen Formen dargestellt werden:

(1) $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)! n^x}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} \quad \forall 0 < x < 1$

(2) $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} \quad \forall x > 0$

(vi) Prohabilistisches Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

VII. Die Funktion $F_m = \int \sin^m x dx$

Sei $F_m = \int \sin^m x dx \quad \forall n \in N_0$; dann ist

$$I_m = -\frac{1}{m}\cos x \sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m} I_{m-2} \quad \forall m \geq 2.$$

(i) Wallissche Formel

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{(4\upsilon)^2}{(4\upsilon-1)^2}$$