Mitschrieb zu Höhere Mathematik I: Fachrichtungen Physik, Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Dr. Müller-Rettkowski und Diplomphysiker Jochen Bitzer

Vorlesung Wintersemester 2001/2002

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 4. Januar 2005

Mitschrieb der Vorlesung Höhere Mathematik I
von Herrn Dr. Müller-Rettkowski und Diplomphysiker Jochen Bitzer im Wintersemester 2001/2002
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Logik

- Einiges über Logik

  „Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.“

  „A, B, C, ... Variablen für Aussage“

- $\neg A$ die Verneinung von A: $\neg A$ ist wahr, genau dann wenn A falsch ist.

- $\neg A$ ist falsch, genau dann wenn A wahr ist.

Beispiel:

A: Alle Leser dieses Buches finden, es ist schön.
$\neg A$: Es gibt (mindestens) einen Leser, der es nicht schön findet.

- Neue Aussagen: $(A \vee B) \wedge (A \wedge B)$ sind neue Aussagen, die mittels der Wahrheitswerte von A und B wie folgt definiert sind:

- $(A \vee B)$ ist falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind, in allen anderen Fällen ist $(A \vee B)$ wahr.

1.1 Wahrheitstabellen

A	B	$(A \vee B)$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

$(A \wedge B)$ ist wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind, sonst ist $(A \wedge B)$ falsch.

A	B	$(A \wedge B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	B	$(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge (A \wedge B)$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	f	f
f	f	f	f

Bemerkung:

- $A \wedge (\neg A)$ ist falsch (Definition von Aussage).

- $A \vee (\neg A)$ ist wahr (Definition von Aussage). $\Longrightarrow$ Tautologie

- $A = B$ soll heißen: $A \wedge B$ sind verschiedene Formulierungen derselben Aussage.

- $\neg(\neg A) = A$

- $A := B$ soll heißen: B definiert A
- $\neg(\neg A) := A$

1.2 Implikation „$\mapsto$“

- $A \mapsto B$: Wenn A, dann B/Aus A folgt B
- $(A \mapsto B) := (\neg A) \vee B$: Ist falsch, nur wenn A wahr und B falsch ist.

A	B	$A \mapsto B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Argumentiert man, ausgehend von etwas Falschem, richtig, so kann man über den Wahrheitswert des Ergebnisses nichts Verbindliches aussagen.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} 3=5 \\ 5=3 \\ f \end{array}\right\} \xrightarrow[f]{w} 8=8\,(w)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3=5 \\ 3=5 \\ f \end{array}\right\} \xrightarrow[f]{w} 6=10\,(f)$$

Aus etwas Falschem läßt sich alles beweisen!

A	B	$A \mapsto B$
w	w	w (2)
w	f	f (1)
f	w	w
f	f	w

1. Ausgehend von etwas Wahrem, erhält man durch falsche Schlußweise etwas Falsches. Wird aus etwas Richtigem etwas Falsches abgeleitet, so muss die Ableitung falsch gewesen sein.
2. Ist A wahr und wird richtig argumentiert, so ist das Ergebnis wahr. Das ist die Grundlage des **direkten Beweises** für den Satz: „Wenn A gilt, dann gilt auch B“.

Beispiel:

Sei p eine natürliche Zahl.

$$\boxed{\underbrace{\text{Ist } p \text{ eine gerade Zahl,}}_{A \text{ (Voraussetzung)}}\underbrace{\text{so ist } p^2 \text{ auch gerade}}_{B \text{ (Behauptung)}}.}$$

(A): $p = 2k \mapsto p^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ist gerade (B)

Übung:

$A \vee B = B \vee A$

$A \wedge B = B \wedge A$

$(A \mapsto B) = (\neg A) \vee B = B \vee (\neq A) = \neg(\underbrace{\neg B}_{B'}) \vee (\underbrace{\neg A}_{A'}) = (B' \mapsto A') = (\neg B \mapsto \neg A)$

1.3 Der indirekte Beweis

Schema des indirekten Beweises (Beweis durch Widerspruch) für den Satz:

$$\boxed{\text{„Wenn } A, \text{ dann } B.\text{“}}$$

Gehe von $\neg B$ aus (nimm an, daß die Behauptung falsch ist), argumentiere richtig, versuche etwas sicher Falsches zu erhalten. Dann kann $\neg B$ nicht richtig sein. Es muss also B richtig sein.

Beispiel:

Es sei p eine natürliche Zahl.

$\underbrace{\text{Ist } p^2 \text{ eine gerade Zahl}}_{A}, \underbrace{\text{so ist } p \text{ eine gerade Zahl}}_{B}.$

Gehe von $\neg B$ aus: p sei eine ungerade Zahl: $p = 2k - 1$. Daraus folgt, daß $p^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2k(2k - 2) + 1$ eine ungerade Zahl ($\neg A$) ist. Dies stellt ein Widerspruch zur Annahme dar, also ist p gerade.

1.4 Aussage „$\leftrightarrow$“

$A \mapsto B$ (A ist äquivalent B)

$(A \leftrightarrow B) := A \mapsto B \wedge (B \mapsto A)$ ist wahr, wenn $A \wedge B$ gleichzeitig wahr und gleichzeitig falsch sind.

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \mapsto B$	$B \mapsto A$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	f	w	f
f	f	w	w	w

Übung:

Was bedeutet $\neg(A \mapsto B)$?

A, B, C Aussagen $(A \wedge \neg B) \mapsto (C \wedge \neg C) \leftrightarrow (A \mapsto B)$

Satz:

Es sei p eine natürliche Zahl. Dann gelten:

1.) p ist gerade $\leftrightarrow p^2$ gerade

2.) p ist ungerade $\leftrightarrow p^2$ ungerade

Beweis:

A: p ist gerade, B: p^2 ist gerade

- Behauptung (a): $A \leftrightarrow B$, das heißt $A \mapsto B \wedge B \mapsto A$
- Behauptung (b): $A \leftrightarrow \neg B$, das heißt $\neg A \mapsto \neg B \wedge \neg B \mapsto \neg A$

$(A \mapsto B) \leftrightarrow (\neg B \mapsto \neg A)$

Satz:

$\sqrt{2}$ ist nicht rational. (q rational: $q = \frac{m}{n}$, m, n ganze Zahlen, $n \neq 0$)

A	B	$A \mapsto B$	$A \wedge (A \mapsto B)$	$A \wedge B$	$A \wedge (A \mapsto B) \leftrightarrow A \wedge B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	f	f	w
f	f	w	f	f	w

Die Aussage $(A \wedge (A \mapsto B)) \leftrightarrow (A \wedge B)$ (Voraussetzung A, Behauptung B) ist stets wahr.

$\Rightarrow$ direkter Beweis!

$(A \mapsto B) \leftrightarrow (\neg B \mapsto \neg A)$

$\Rightarrow$ indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis)

Übung:

$(A \wedge (\neg B)) \mapsto (C \wedge \neg C)) \leftrightarrow (A \mapsto B)$

Übung:

$\neg(A \wedge B) \overset{\leftrightarrows}{\equiv} (\neg A) \vee (\neg B)$

$\neg(A \vee B) \overset{\leftrightarrows}{\equiv} (\neg A) \wedge (\neg B)$

$\neg(A \vee B) = \neg(\neg(\neg A) \vee \neg(\neg B)) = \neg\neg((\neg A) \wedge (\neg B))$

Satz:

$\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis:

a.) Voraussetzung: A

b.) Behauptung: B ($\sqrt{2}$ ist irrational)

$\neg B$: $\sqrt{2}$ ist rational; es gilt also $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ wobei m, n rationale Zahlen mit ggT=1 sind. Durch Quadrieren ergibt sich:

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \xrightarrow{\text{Satz 1}} m = 2k$$

Und weiterhin folgt:

$$4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n = 2k$$

m und n haben daher den gemeinsamen Faktor 2, das ist aber nach Voraussetzung falsch! Damit ist $\sqrt{2}$ irrational!

$C_1 \to C_2 \to C_3 \to \ldots \to$ Ergebnis

Hier ist folgende Regel verwendet worden: $((A \mapsto B) \wedge (B \mapsto C)) \mapsto (A \mapsto C)$

Kapitel 2

Mengen

Definition:

Eine Menge ist die Zusammenfassung von **wohlbestimmten**, **wohlentschiedenen** Dingen (den Elementen der Menge) zu einem Ganzen (Das ist dann die Menge). Die Beschreibung von Mengen funktioniert wie folgt:

1.) Durch die Angabe der Elemente: $M = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$

2.) Durch Angabe einer kennzeichnender Eigenschaft: $M = \{x|x \text{ ist Zahl}, \ x = 2k, \ k \text{ sei ganze Zahl}\}$

Schreibweise:

$x \in M (x \text{ gehört zu } M)$

$\neg(x \in M) \xrightarrow{\text{Def}} x \notin M$

Wir notieren uns die Menge der Primzahlen:

$M = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \ldots\} \quad 211 \in M, 200 \notin M$

- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{x|x \in \mathbb{N} \text{ oder } 0 \text{ oder } -x \in \mathbb{N}\}$
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{x|x = \frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z};\ q \neq 0\right\}$
- Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \{\text{Alle Punkte auf einer Geraden}\}$
- Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{z|z = x + \sqrt{-1}y;\ x, y \in \mathbb{R}\}$

2.1 Rechnen mit Mengen

2.1.1 Die Teilmenge

Definition:

$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots$ seien Mengen. Ist M_1 eine Teilmenge von M_2, so folgt aus $x \in M_1$ stets $x \in M_2$.

$M_1 \subset M_2 \xrightarrow{\text{Def}} \forall\ x \in M_1 \colon x \in M_2$

Mittels dieser Definition kann man dann für die eingeführten Zahlenmengen schreiben:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2.1.2 Gleichheit von Mengen

Definition:

$$\boxed{(M_1 = M_2) \xrightarrow{\text{Def}} (M_1 \subset M_2) \cap (M_2 \subset M_1)}$$

Bemerkungen:

1. $\subset$ schließt Gleichheit nicht aus
2. $M_1 \not\subset M_2$: es gibt: $x \in M_1$ mit $x \notin M_2$
   $\exists x \in M_1 : x \notin M_2$

Sätzchen:

$$\boxed{\underbrace{(M_1 \subset M_2) \cap (M_2 \subset M_3)}_{\text{Voraussetzung}} \mapsto \underbrace{M_1 \subset M_3}_{\text{Behauptung}}}$$

2.1.3 Durchschnitt von Mengen

Definition:

$$\boxed{\underbrace{M_1 \cap M_2}_{\substack{M_1 \text{ geschnitten} \\ \text{mit } M_2}} = \{x | x \in M_1) \cap (x \in M_2)\}}$$

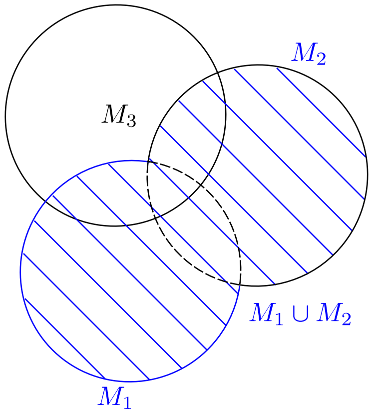
Folgerungen:

- $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$
- $\bigcap\limits_{j=1}^{n} M_j =: M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \ldots \cap M_{25} \cap \ldots \cap M_n$
- $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$
- $M_1 \cap M_2 \subset M_1,\ M_1 \cap M_2 \subset M_2$
- $\neg(A \cap B) = (\neg A) \cup (\neg B)$
- $x \notin M_1 \cap M_2$ bedeutet $(x \notin M_1) \cup (x \notin M_2)$.

2.1.4 Vereinigung von Mengen

Definition:

$$\boxed{M_1 \cup M_2 := \{x | (x \in M_1) \cup (x \in M_2)\},\ x \notin M_1 \cup M_2, \text{ falls } x \text{ weder in } M_1 \text{ noch in } M_2 \text{ liegt.}}$$



Folgerungen:

$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$

$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$

$$\bigcup_{j=1}^{n} M_j := M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$$

$M_1 \subset M_1 \cup M_2, \quad M_2 \subset M_1 \cup M_2$

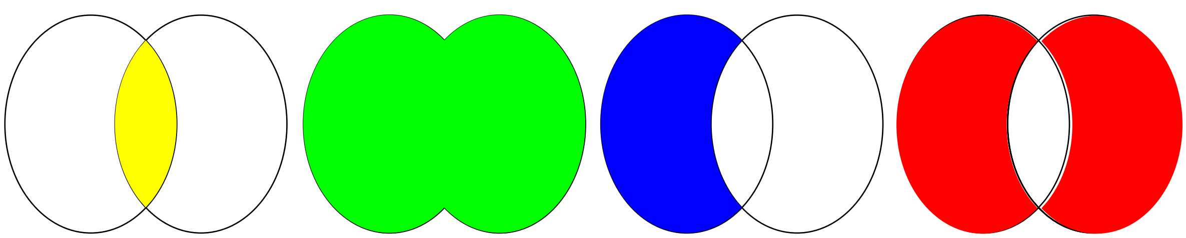
$M_1 \cap M_2 \subset M_1 \cup M_2$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x | -x \in \mathbb{N}\} = \{x | x \in \mathbb{N},\, x \leq 2\} \cap \mathbb{N} = \{1, 2\}$

2.1.5 Die leere Menge

Definition:

Φ ist die Menge, die kein Element enthält: die **leere** Menge.

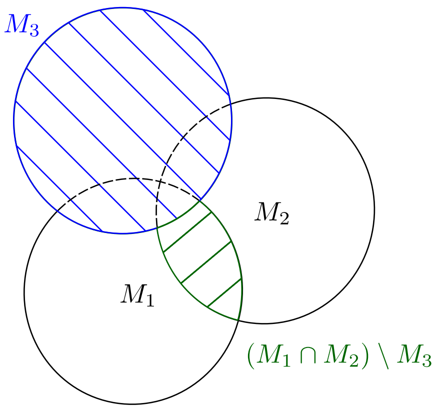


$M_1 \cap M_2$ $\quad$ $M_1 \cup M_2$ $\quad$ $M_1 \cup M_2 \setminus M_2$ $\quad$ $(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$

$$\begin{array}{lll} M_1 \cap M_2, M_1 \cap M_2 \cap M_3 & M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1 & (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) \\ M_1 \cup M_2, M_1 \cup M_2 \cup M_3 & M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1 & (M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) \end{array}$$

$M_1 \cap M_2 \subset M_1 \subset (M_1 \cup M_2)$

$M_1 \setminus M_2 \qquad M_1 \setminus M_2 \setminus M_3 = M_1 \cap M_2$



2.2 Mengenfamilien

Definition:

$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots$ sei Mengenfamilie mit $\{M_j, j = 1,\ 2,\ \ldots$. Dann wird definiert:

1.) $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} M_j$: Das sind alle x, die in allen M_j liegen

2.) $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j$: Das sind alle x, die in mindestens einer der Mengen liegen

Beispiel:

$$M_j = \left[-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right], j = 1,\ 2,\ \ldots \qquad \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j = M_1 \qquad \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j = \{0\}$$

Definition:

$M_1 \triangle M_2 := (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1) \overset{\text{Ü}}{=} (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$ (symmetrische Differenz)

Satz:

$M_1,\ M_2,\ M_3$ seien Mengen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a.) } M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_2) \\ \\ \text{b.) } M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_2) \end{array}\right\} \text{Anregung: Gilt } A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)?$$

Zu a.) $M = N$ ergibt zu überprüfen $M \subset N$ und $N \subset M$

2.2.1 Die Regel von de Morgan

Satz:

$\{M_j, j = 1, 2, \ldots\}$ sei eine Mengenfamilie und S sei eine Menge. Dann gelten:

a.) $S \setminus \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (S \setminus M_j)$

b.) $S \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} (S \setminus M_j)$

Falls $M_j \subset S \; \forall \; j$, dann besagt das:

$$C_S \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_S M_j, C_S \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_S M_j$$

$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$

$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$

„a.) ist plausibel“: $S \setminus (M_1 \cap M_2) = (S \setminus M_1) \cup (S \setminus M_2)$

Definition:

M_1, M_2 seien Mengen. Das **kartesische Produkt** $M_1 \times M_2$ von M_1, M_2 ist die Menge der geordneten Paare (x, y) mit $x \in M_1$, $y \in M_2$: $M_1 \times M_2 = \{(x, y) | x \in M_1, y \in M_2\}$.

Beispiele:

$M_1 = \mathbb{R}, M_2 = \mathbb{R} \quad M_1 \times M_2 = \mathbb{R}^2$

$M_1 \times M_2 \times M_3 = \{(x, y, z) | x \in M_1, y \in M_2, z = M_3\}$

$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

Es sei (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in M_1 \times M_2$. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ bedeutet $x_1 = x_2$ **und** $y_1 = y_2$.

Kapitel 3

Funktionen, Vollständige Induktion und Zahlenmengen

Motivation:

$a\underbrace{(x,y)}_{\mathbb{R}^2} = \underbrace{x+y}_{\mathbb{R}}$, $x, y \in \mathbb{R}$

$a : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$\alpha : \{\text{Studierende im Hörsaal}\} \mapsto \mathbb{N}$

$\alpha(S) = \text{Alter von } S$

Definition:

X, Y seien Mengen. Eine **Abbildung** oder Funktion von X in Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zuordnet. Folgende Schreibweisen sind dabei üblich:

- f: $X \mapsto Y$
- $x \mapsto f(x)$
- a: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$
- $(x, y) \mapsto x + y$

$f(x) \in Y$ heißt **Funktionswert** von f in x, X heißt **Definitionsbereich** $\mathbb{D}(f)$ von f, $x \in X$ heißt **unabhängige Variable** oder **Argument** von f. Die Menge $R(f) = \{y \in Y | \text{es gibt } x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$ heißt **Bildmenge** von f. $y \in R(f)$ nennt man **abhängige Variable**. In der Gleichung $y = f(x)$ heißt x **Urbild** zu y. Die Urbildmenge ist $\{x \in X | f(x) \in R(f)\}$.

Bemerkung:

f: $X \mapsto Y$ ist eine Funktion, falls aus $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt: $x_1 \neq x_2$ $(A \mapsto B) \leftrightarrow (\neg B \mapsto \neg A)$. Eine äquivalente Formulierung wäre: Aus $(x_1 = x_2)$ folgt $(f(x_1) = f(x_2))$.

Definition:

f: $X \mapsto Y$ sei eine Funktion: $\text{graph}(f(x)) = \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x), x \in X\}$.

3.1 Komposition (Hintereinanderausführung) von Abbildungen

Definition:

> X,Y,Z seien Mengen. $f : X \mapsto Y, g : Y \mapsto Z$ seien Funktionen. Dann wird durch $(g \circ f(x)) := g(f(x)), x \in X$ die neue Abbildung $g \circ f$ von X in Z definiert.

Beispiel:

Es seien folgende Funktionen definiert:

$f(x) = 2x,\ g(x) = x + 1 \quad X = Y = \mathbb{R}$

Dann bilden wir folgende Verknüpfungen:

$$\left.\begin{array}{l}(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = 2(x+1) = 2x+2 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x+1\end{array}\right\} \text{Im allgemeinen gilt nicht } f \circ g = g \circ f!$$

$$h(x) = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g \circ (f(x)) = h(2x+1) = \frac{1}{2x+1}, x > 0$$

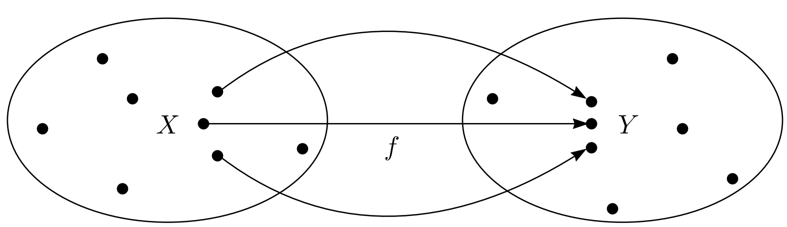
$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x+1}$$

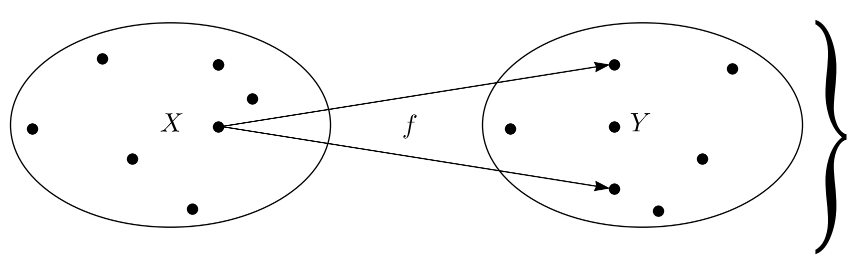
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{2x+1}$$

3.2 Der Funktionsbegriff

Es sei die Zuordnung f: $X \mapsto Y$ gegeben mit dem Definitionsbereich $D(f)$ und der Bildmenge $R(f) = \{y \in Y | \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$. Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung:

$((f(x_1) \neq f(x_2)) \mapsto (x_1 \neq x_2) \leftrightarrow (x_1 \neq x_2) \mapsto (f(x_1) \neq f(x_2))$





Keine Abbildung

Beispiele:

- Identität id_x:
  $f\colon X \mapsto X$, $\mathrm{id}_x(x) = x \;\forall\; x$
- $f : X \mapsto Y$, $f(x) = c$ $(c \in M \,\forall\, x)$
- Charakteristische Funktion:
  $$f : X \mapsto \{0;1\}, A \subset X : \chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$
- Polynom:
  $p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$
  a_n, a_{n-1}, $\ldots$ sind gegebene Zahlen.
- Permutation:
  $f\colon \{1,2,\ldots,n\} \mapsto \{1,2,\ldots,n\}$

3.2.1 Gleichheit von Funktionen

Definition:

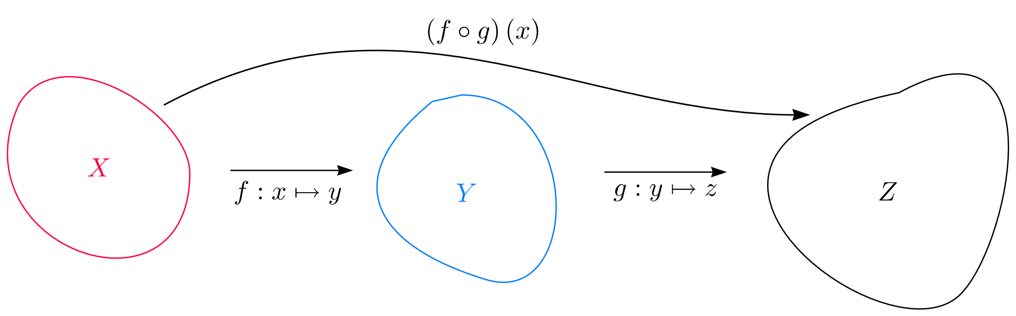
Die Funktionen $f\colon X \mapsto Y$ und $g\colon U \mapsto V$ seien gegeben. Dann gilt:
$f = g \xrightarrow{\text{Def}} X = U$ und $f(x) = g(x) \;\forall\; x \in X$

Beispiel:

- $f(x) = \sin x \quad g(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
- $f(x) = (x+3)^3 - (x-3)^3, \quad g(x) = 12x$

Es gilt $f = g$ für $X = \mathbb{R}$.

3.2.2 Komposition von Funktionen



Beispiel:

Es seien folgende Funktionen gegeben:

$f(x) = -x^2, X = \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x}, X = \mathbb{R}^+$

Dann bilden wir die Verknüpfung $g \circ f$:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{-x^2}$

Diese Verknüpfung ist jedoch im Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht definiert.

Beispiel:

$f(x)$ sei folgendermaßen definiert:

$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

$h(x) = x^2$, $g(x) = 1 + x$, $p(x) = \sqrt{x}$

f folgt dann aus h, g und p durch folgende Verknüpfung:

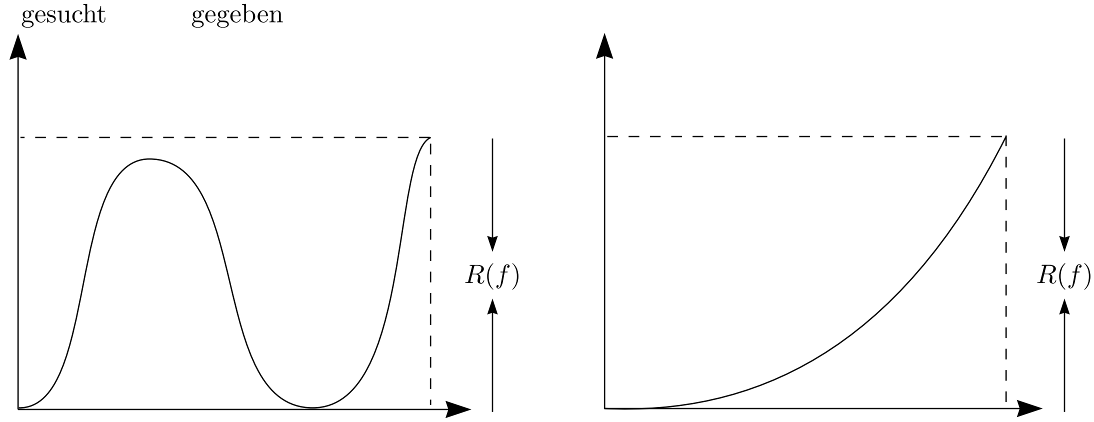
$f = p \circ g \circ h$

Satz:

X,Y,Z,U seien Mengen mit $f : X \mapsto Y$, $g : Y \mapsto Z$, $g : Z \mapsto U$. Dann gilt: $(h \circ g) \circ f$: $X \mapsto U$ und $h \circ (g \circ f)$: $X \mapsto U$ sind definiert, und sie sind gleich.

Gleichung:

$$\underset{\text{gesucht}}{\underset{\uparrow}{f(x)}} = \underset{\text{gegeben}}{\underset{\uparrow}{y}}$$



3.3 Surjektivität und Injektivität

- f heißt **surjektiv**, falls $R(f) = Y$.
- f heißt **injektiv**, falls aus $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- f heißt **bijektiv**, falls f surjektiv und injektiv ist.

Die Funktion $(x_1 \neq x_2) \mapsto (f(x_1) \neq f(x_2)) \leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \mapsto (x_1 = x_2)$

Beispiel:

$x_1^2 = x_2^2 \rightarrow x_1 = \pm x_2$

$X = \mathbb{R}$	nicht injektiv
$X = \mathbb{R}^+$	injektiv
$X = \mathbb{R}^-$	injektiv

Gegeben: $y \subset Y$ gesucht: $x \subset X$ mit $f(x) = y$

1. Aus $y \notin R(y)$ folgt: Gleichung ist nicht lösbar!
2. Ist f surjektiv, so ist die Gleichung stets lösbar.
3. Ist f injektiv, so ist für $y \in R(f)$ die Gleichung eindeutig lösbar
4. Ist f bijektiv, so ist die Gleichung stets eindeutig lösbar

$f : X \mapsto Y$ sei bijektiv, dann gibt es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Diese Zuordnung $Y \mapsto X$ heißt Umkehrfunktion f^{-1} zu f:

$f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y$

$(f^{-1} \circ f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \,\forall\, x \quad (f \circ f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y) = y \,\forall\, y \,\in Y$

$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_x \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_x$

Satz:

Es sei $f : X \mapsto Y$ bijektiv. Dann ist f^{-1} bijektiv, und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

Satz:

Sind $f : X \mapsto Y$ und $g : Y \mapsto Z$ bijektiv, so ist $g \circ f : X \mapsto Z$ bijektiv und es gilt: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Zu Satz 2:

Nachzurechnen ist, daß f^{-1} surjektiv und injektiv ist. Für $(f^{-1})^{-1}$ argumentiere mit $f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y$.

- $(g \circ f)(x) = z$ ist lösbar für $z \in Z$ (Surjektivität) $x = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$ tut es

  $$(g \circ f)(f^{-1}) \circ g^{-1}) = ((g \circ \underbrace{\underbrace{f \circ f^{-1}}_{\mathrm{id}_x} \circ g^{-1}}_{g^{-1}} \circ g^{-1}))(z) = \mathrm{id}_z(z) = z$$

- $g \circ f$ ist injektiv

  $$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \rightarrow \underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{\text{surjektiv}}$$

  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

  $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_z$

  $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_x$

Beispiele:

- $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0, b \text{ gegeben}) \; X = \mathbb{R}$

  $y = ax + b \to x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} = f^{-1}(y)$

  $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$

- $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ ist surjektiv. Als Übung soll gezeigt werden, daß sie auch injektiv ist. Daraus folgt dann die Bijektivität einer Permutation.

- $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$

  σ ist also die Abbildung, welche einer natürlichen Zahl eindeutig eine ganze Zahl zuordnet. Für die Abbildungsvorschrift ergibt sich:

  $\sigma(2k) := k$ für $k = 1, 2, \ldots$

  $\sigma(2k + 1) := -k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$

  Die Abbildung ist bijektiv, also injektiv und surjektiv. Bijektiv nennt man auch eineindeutig. Im folgenden seien nochmals die Eigenschaften der Verkettung von Abbildung und Umkehrabbildung wiederholt:

  $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_y \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_x$

  $f, f^{-1}, (f^{-1})^{-1} = f;\ (f_1 \circ f_2)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$

  Wir notieren uns einige Paare:

  $$\begin{array}{lcccccccccc} \sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \\ & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow \\ & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -4 & 4 & -4 & \ldots \end{array}$$

  Verknüpft man also die Abbildung mit deren Umkehrung, so erhält man gerade die Identität:

  $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}$

  $\sigma^{-1} \circ \sigma = \mathrm{id}$

3.3.1 Monotonie von Funktionen

Definition:

$f : M \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$: f heißt streng monoton wachsend ($f \uparrow$) (fallend ($f \downarrow$)), falls aus $x_1 < x_2$ folgt:

$f(x_1) < f(x_2)\, (f(x_1) > f(x_2))$

1.) f ist monoton wachsend. $\Leftrightarrow -f$ ist monoton fallend.

2.) Falls $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0 \ \forall x \in M$ gilt: f ist monoton wachsend $\Leftrightarrow \frac{1}{f}$ ist monoton fallend.

3.) f ist monoton wachsend. $\Leftrightarrow (f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) > 0 \ (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ für $x_1 \neq x_2$

Übung:

Es ist zu zeigen, daß f injektiv ist, falls f monoton wächst. Des weiteren kann gezeigt werden:

f ist monoton wachsend. $\Leftrightarrow f^{-1}$ ist monoton wachsend.

3.4 Reelle Zahlen

g: $\{f : X \mapsto X \text{ bijektiv}\}$

- $f,\, g \in G \Rightarrow f \circ g \in G$
- $f,\, g \in G \Rightarrow (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- Es gibt $\mathrm{id}_x \in G \Rightarrow \mathrm{id}_x \circ f = f \circ \mathrm{id}_x = f \ \forall\ f \in G$
- Zu $f \in G$ gibt es $f^{-1} \in G \Rightarrow f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_x$

3.4.1 Die Gruppe

Eine nicht leere Menge $\mathcal{G}$ zusammen mit einer Abbildung $\circ$, durch die je zwei Elemente $a, b \in \mathcal{G}$ das Element $a \circ b \in \mathcal{G}$ zugeordnet wird und die folgenden Eigenschaften besitzt, heißt **Gruppe**:

- $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \ \forall\ a,\, b,\, c \in \mathcal{G}$
- es gibt ein $n \in \mathcal{G}$ mit $n \circ a = a \circ n = a \ \forall\ a \in \mathcal{G}$
- zu jedem $a \in \mathcal{G}$ gibt es ein $a' \in \mathcal{G}$ mit $a \circ a' = a' \circ a = n$

Gilt zusätzlich:

- $a \circ b = b \circ a \forall a, b \in \mathcal{G}$, so heißt $\mathcal{G}$ **abelsche** Gruppe

3.4.2 Axiomensystem für die reellen Zahlen

Die **reellen Zahlen** bilden eine Menge mit den Verknüpfungen „+“ und „·“:

$$\begin{array}{lll} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & +(x,y) = x + y & |\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x + y & & (x,y) \mapsto x + y \end{array}$$

Sowie einer **Anordnung**, die durch eine Teilmenge $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, den Positivitätsbereich, gegeben wird. Für diese Daten müssen erfüllt sein:

- Körperaxiome (K):
  $(\mathbb{R}, +)$ bilden eine abelsche Gruppe mit der 0 als neutrales Element und $-x$ als Inversen zu x. $(R \setminus \{0\} \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit der 1 als neutrales Element und mit $\frac{1}{x}$ als Inversen zu x.
  Es gilt das **Distributivgesetz**: $x(y + z) = xy + xz \ \forall\ x,\, y,\, z \in \mathbb{R}$
- Anordnungsaxiome (A)
- Vollständigkeitsaxiom (V)

3.4.3 Körperaxiome

Zu gegebenen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $a + x = b.(x = b + (-a))$. Zu gegeben Zahlen $a \neq 0$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $ax = b$ $(x = \frac{1}{a}b)$. Nun gilt:

$\underline{a \cdot 0 = 0 \,\forall\, a \in \mathbb{R}}$; $\quad (x \neq 0, y \neq 0 \rightarrow xy \neq 0)$

$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a(1 + 0) = a \cdot 1 = a$

$a + x = a \Rightarrow x = a + (-a) = 0 = a \cdot 0$

$\underline{(-1)(-1) = -(-1) = 1}$

Wir betrachten nun folgende Gleichung:

$(-1) + x = 0 \qquad (\star)$

Diese soll nun gelöst werden:

- $(-1) + (-1)(-1) = (-1)(1 + (-1)) = (-1) \cdot 0 = 0 \quad (-1)(-1)$
- $(-1) + (-(-1)) = 0 \quad -(-1)$
- $(-1) + 1 = 0$

Die Gleichung wird durch $(-1)(-1)$, $-(-1)$ und 1 gelöst.

3.4.4 Anordnungsaxiome

Die Elemente von $\mathbb{R}^+$ heißen positive Zahlen. Diese sind durch die folgenden Axiome gekennzeichnet:

1. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Aussagen:

   $x \in \mathbb{R}^+, x = 0, -x \in \mathbb{R}^+$

2. $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$
3. $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow xy \ \in \mathbb{R}^+$

Bezeichnung: Für $x \in \mathbb{R}^+$ schreiben wir $x > 0$.

Definition:

Wir definieren folgendes:

- $x < y \ (y > x) \xrightarrow{\text{Def}} y - x > 0$
- $y \leq x \xrightarrow{\text{Def}} y < x$ oder $y = x$
- $x \leq y \leq z \xrightarrow{\text{Def}} x \leq y$ und $y \leq z$
- $x < y \leq z \xrightarrow{\text{Def}} x < y$ und $y \leq z$
- x heißt **negativ**, falls $x < 0$ gilt. Das heißt: $-x > 0$

Folgerungen:

1. $x < y < z \Rightarrow x < z$
2. $(x < y) \wedge (z > 0) \Rightarrow xz < yz$

   $y - x > 0,\ z > 0 \Rightarrow z(y - x) = zy - zx > 0$: $zx < zy$
3. $y < 0,\ z < 0 \Rightarrow -y > 0,\ -z > 0 \Rightarrow \underbrace{(-y)(-z)}_{\underline{yz > 0}} > 0$
4. $x < 0,\ z > 0 \Rightarrow xz < 0$ (Setze in 2: $y = 0$)

Beispiel:

Für welche x gilt $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$?

- 1.Möglichkeit:

  $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \,|\, + 2x \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \,\forall\, x$

Für $x \geq 0$ gilt: $x + \frac{1}{x} \geq 2$

$\left\{x | x + \frac{1}{x} \geq 2\right\} = \{x | x \geq 0\}$

- 2.Möglichkeit:

  $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow$ Alle x, die als Lösung möglich sind, sind ≥ 0.

  $x^2 + 1 \geq 2x \,|\, -2x \leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

  $\frac{1}{x} \geq 2 - x$

Beispiel:

Wir stellen folgende Behauptung auf:

$x, y > 0 :\; x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$

Diese Aussage ist nun zu beweisen:

$$\underbrace{\underbrace{y^2 - x^2}_{>0}}_{>0} = \underbrace{(y - x)}_{>0}\underbrace{(y + x)}_{>0}$$

„ $\Rightarrow$ “ Voraussetzung: $x < y$

„ $\Rightarrow$ “ Voraussetzung: $y^2 - x^2 > 0$

Übung:

Es ist folgende Aussage zu beweisen: Für $x < y$ gilt $x < \frac{x+y}{2} < y$.

3.5 Vollständigkeitsaxiom

$M \subset \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}$ heißt **untere** Schranke (**obere** Schranke) von M, falls gilt:

$$\underbrace{x \leq y \,\forall\, y \in M}_{\text{Abkürzung: } x \leq M} \quad \underbrace{(y \leq x \,\forall\, y \in M)}_{x \geq M}$$

Besitzt M eine untere (obere) Schranke, so heißt M **nach unten (oben) beschränkt**. Ist die Menge nach oben und unten beschränkt, so heißt sie **beschränkt**.

Beispiele:

$$\left.\begin{array}{l} [a,b] = \{x | a \leq x \leq b\}\} \text{ abgeschlossen} \\ \left.\begin{array}{l} [a,b) = \{x | a \leq x < b\} \\ (a,b] = \{x | a < x \leq b\} \end{array}\right\} \text{halboffene Intervalle} \\ (a,b) = \{x | a < x < b\}\} \text{ offen} \end{array}\right\} \textbf{beschränkt } M_1 = \{x | x < 0\}, M_2 = \left\{\frac{1}{x} | x > 0\right\}, M_3 = \{x | x > 0\}$$

Definition:

$M \subseteq \mathbb{R}: \quad m = \max(M) \xrightarrow{\text{Definition}} (m \in M) \wedge (M \leq m)$

$\tilde{m} = \min(M) \xrightarrow{\text{Definition}} (\tilde{m} \in M) \wedge (\tilde{m} \leq M)$

Nicht jede Menge besitzt ein Maximum oder ein Minimum.

1. Ist M nicht nach oben beschränkt, so besitzt sie kein Maximum.
2. Ist M nach oben beschränkt, so braucht sie kein Maximum zu besitzen.

M_1 ist nach oben beschränkt, hat kein Maximum.

Angenommen: x_0 ist Maximum: $x_0 \in M_1, M_1 \leq x_0$

$x_0 \in M_1 \rightarrow \frac{1}{2}x_0 \in M : \frac{1}{2}x_0 > x_0$

3.6 Rechnen mit Maxima/Minima

$M \subset \mathbb{R} \quad -M = \{x | -x \in M\}$

Satz:

M,$N \subset \mathbb{R}$ besitzen Maximum/Minimum. Es gelten:

1.) $\max(M \cup N) = \max(\max M, \max N)$

2.) $M \subset N \Rightarrow \max M \leq \max N$

3.) $\min M = -\max(-M)$

4.) $\max M$ und $M' = \max M \rightarrow m = m'$

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. γ heißt **obere Grenze/Supremum** von M, falls γ kleinste obere Schranke von M ist.

$\gamma = \sup(M) \xrightarrow{\text{Definition}}$

- $M \leq \gamma$
- Aus $M \leq S$, folgt $\gamma \leq S$

Satz:

Für die **untere Grenze/Infimum** gilt: $\inf(M) = -\sup(-M)$.

$\inf(M) = \sigma$ gibt die größte untere Schranke von M an.

$\sigma = \inf(M) \xrightarrow{\text{Definition}}$

- $\sigma \leq M$
- Aus $S \leq M$ folgt wiederum, daß $S \leq \sigma$.

Übung:

Zeige, daß folgende Ungleichung gilt:

$x < \frac{x+y}{2} < y$ für $x < y$

Beispiel:

$M \subset \mathbb{R} : -M = \{x| - x \in M\}$

x sei untere Schranke. $x \in M$ bedeutet dann, daß $x \leq y \; \forall \; y \in M$.

Beispiel:

Betrachten wir folgende Menge:

$M = [0, 1)$

Die Behauptung ist nun, daß $\underline{\sup(M) = 1}$ gilt.

1. Die Elemente der Menge M haben die Eigenschaft: $M \leq 1$
2. Wir wählen eine obere Schranke: $M \leq S$

Unser Ziel ist es nun, die obere Schranke so zu wählen, daß $1 \leq S$ gilt. Dazu nehmen wir folgendes an:

$$S < 1 \Rightarrow S < \underbrace{\frac{S+1}{2}}_{\in M} < 1 \Rightarrow S < \frac{1}{2}$$

Das geht nicht, da $y \leq S \; \forall \; y \in M$, was hier somit nicht erfüllt wäre. Es handelt sich also um einen Widerspruch und somit gilt $S \geq 1$.

Satz:

Für das Supremum (kleinste obere Schranke) einer Menge gilt folgendes:

1.) Aus $\gamma = \sup(M)$ folgt: $M \leq \gamma$

2.) Aus $\tilde{\gamma} < \gamma$ folgt: Es gibt ein $x \in M$ mit $\tilde{\gamma} < x \leq \gamma$

Für das Infimum (größte untere Schranke) wiederum folgt:

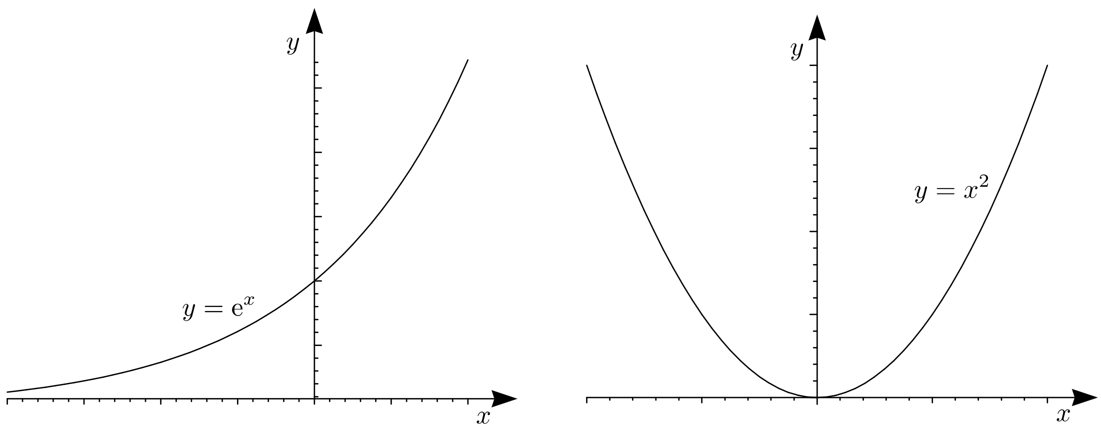
1.) Aus $\gamma = \inf(M)$ folgt: $M \geq \gamma$

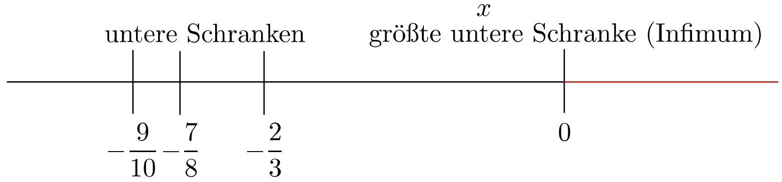
2.) Aus $\tilde{\gamma} > \gamma$ folgt: Es gibt ein $x \in M$ mit $\tilde{\gamma} > x \geq \gamma$

Bemerkung:

Besitzt M ein Maximum, dann gilt: $\sup(M) = \max(M)$ M ist nicht nach oben beschränkt, d.h. zu jeder Zahl k gibt es $x \in M$ mit $k < x$. Wenn M nicht nach unten beschränkt ist, gibt es zu jeder Zahl k ein $x \in M$ mit $x < k$. Ist M nicht nach **oben beschränkt**, so schreiben wir $\sup(M) = \infty$. Ist M nicht nach **unten beschränkt**, so schreiben wir $\inf(M) = -\infty$.

- M sei nicht nach unten beschränkt: $\inf M = -\sup(-M)$
- $-M$ ist nicht nach oben beschränkt: $-\sup(-M) = -\infty = \inf(M)$





Es ist bekannt, daß $g(x) = \mathrm{e}^x > 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}$, somit stellt 0 eine untere Schranke dar. 0 ist sogar die größte untere Schranke (Infimum). Des weiteren ist $g(x) = \mathrm{e}^x \neq 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Folglich ist 0 kein Minimum anders als bei $f(x) = x^2$. Dort ist 0 nämlich gleichzeitig größte untere Schranke und Minimum, da $f(0) = 0$.

Bemerkung zu ∞, $-\infty$:

∞, $-\infty$ sind Zeichen (keine Zahlen!), mit denen formal wie folgt „gerechnet“ wird: $(-\infty < x < \infty \ \forall\ x \in \mathbb{R})$

$$\begin{array}{ll} x > 0, y \in \mathbb{R}: & \frac{x}{0} = \infty = \infty \cdot \infty = \infty + y = \infty \cdot x = \infty \\ x < 0, y \in \mathbb{R}: & y - \infty = x \cdot \infty = \frac{x}{0} = -\infty \\ & \frac{x}{\pm\infty} = 0, \infty - (-\infty) = \infty, (-\infty)(-\infty) = \infty \end{array}$$

Folgende Ausdrücke besitzen keinen definierten Wert. Der Wert hängt vom mathematischen Zusammenhang ab („unbestimmte Ausdrücke“):

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{\infty}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, \infty^0$$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ heißt abgeschlossene Zahlengerade

Satz:

Jede nichtleere Menge reeller Zahlen, die nach oben beschränkt ist, besitzt ein Supremum.

$M \neq \Phi, M \leq X \Rightarrow$ es existiert $\sup(M) \in \mathbb{R}$

Für $\mathbb{Q}$ ist dies **falsch**!

Satz (Skript Seite 216):

Die Menge $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Beweis:

$\mathbb{N} \neq \Phi$. Wir zeigen dies indirekt. Wir nehmen an, es gelte: $\mathbb{N} \in X$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Dann folgt daraus, daß $\sup(\mathbb{N}) = \Gamma \in \mathbb{N}$ existiert. Dann gilt:

$n \leq \Gamma \,\forall\, n \in \mathbb{N}$

Mit n und mit $1 \in \mathbb{N}$ gelte $n+1 \leq \Gamma\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Dann folgt hieraus wiederum:

$\boxed{n \leq \Gamma - 1\, \forall x \in \mathbb{N}}$

Dabei handelt es sich also um einen Widerspruch: $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt.

Satz:

Zu jeder reellen Zahl x gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \leq n\ \forall\ n \geq n_0$.

Satz (Skript Seite 17, 18):

Zu jeder positiven Zahl ϵ gibt es eine natürliche Zahl n_0 mit:

$$\frac{1}{n} \leq \epsilon\ \forall\ n \geq n_0 \left(\text{Setze vorher } x = \frac{1}{\epsilon}\right)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \leq n | \cdot \frac{\epsilon}{n} \qquad \frac{1}{n} \leq \epsilon$$

Folgerung:

Es gelte für $a \in \mathbb{R} : a \geq 0, a \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}(n \geq n_0) \to 0 = 0$

Satz:

Für x,$y \in \mathbb{R}$ gelten: $x < y$ und $y - x > 1$. Dann gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $x < k < y$.

Satz:

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelte $x < y$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$. Die Dichtheit der rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$:

Für $n_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n_0} < \underbrace{y - x}_{>0} \cdot n_0$

$1 < n_0(y - x) = n_0 y - n_0 x$

$$n_0 x < k < n_0 y \quad | \cdot \frac{1}{n_0} \qquad x < \frac{k}{x_0} < y$$

Folgerung:

Zu x, $y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $y < \xi < y$.

$\Rightarrow x < r_1 < y \quad r_1 \in \mathbb{Q} \to x < r_1 < r_2 < y$ mit r_1, $r_2 \in \mathbb{Q}$

$$\xi = r_1 + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{<1}(r_2 - r_1)$$

$\sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow 2 > 1$

1. $r_1 < \xi < r_2$
2. $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = \frac{r_2 - r_1}{\xi - r_1} \in \mathbb{Q}$$

Wäre $\xi \in \mathbb{Q}$, so würde folgen: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dabei handelt es sich um einen Widerspruch.

Satz:

> $\mathbb{Q}$ genügt (V) **nicht**. Das heißt:
>
> Aus $M \subset \mathbb{Q}$, $M \neq \Phi$, M nach oben beschränkt folgt im allgemeinen nicht $\sup(M) \in \mathbb{Q}$.

Betrachte:
$$\left.\begin{array}{l} M = \{x \in \mathbb{Q} | (x > 0) \wedge (x^2 < 2)^2\} \\ M \neq \Phi : 1 \in M \\ M \leq 2 \end{array}\right\} (V) \sup M \text{ existiert } \in \mathbb{R}$$

Behauptung:

Es sei $S = \sup(M) = \sqrt{2}$. Dann gilt $S^2 \overset{?!}{=} 2$, das heißt, $S^2 > 2$ und $S^2 < 2$ müssen ausgeschlossen werden. Aus $M \leq S$ folgt dann $\underline{1 < S}$. Bilde anschließend mit S:

$$S' = \frac{2S+2}{S+2}$$

Übung:

Für S' gelten:

$$S' = S = \frac{2-S^2}{S+2}$$

$$S^2 - 2 = \frac{2}{(S+2)^2}(S^2-2)$$

Wir nehmen folgendes an:

$$S^2 > 2 \Rightarrow S > S' > 0 \Rightarrow S^2 > S'^2$$

$$S'^2 > 2 > x^2 \, \forall \, x \in M$$

$$\Rightarrow S' > x \, \forall \, x \in M$$

S' ist obere Schranke von M: $S' < S$. Dies ist ein Widerspruch, da S die kleinste obere Schranke ist.

1.) (V) Jede nicht leere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.

2.) (V) Jede nicht nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Infimum.

$$M = \{x | x > 0, x^2 < 2\}, \quad S = \sup(M), S' = \frac{2S+2}{S+2}$$
$$S' - S = \frac{2-S^2}{2+S}$$
$$S'^2 - 2 = \frac{2}{(S+2)^2}(S^2-2)$$

$$S^2 > 2 (S = 2) \Rightarrow \sqrt{2} < S' < S$$

$$S^2 < 2 \Rightarrow S < S' < \sqrt{2}$$

Setze $S_1 = 2$,berechne $S_2 = \dfrac{2S_1+2}{S_1+2}$

$$S_{n+1} = \frac{2S_n+2}{S_n+2}$$

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x \leq 0 \end{cases}$$

$x \leq M \Rightarrow -M \leq -x \rightarrow \sup(-M)$ existiert $\Rightarrow \inf M = -\sup(-M)$ existiert

3.7 Vollständige Induktion Fakultät, Binomialkoeffizient

Zunächst führen wir folgende nützliche Schreibweisen für die Summe und das Produkt ein. Im folgenden werden nur noch diese abkürzenden Schreibweisen verwendet, deshalb ist es wichtig, diese zu verstehen:

1.) Produkt:

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_k,\, \ldots :\; a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{j=1}^{n} a_j$$

2.) Summe:

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_k,\, \ldots :\; a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{l=1}^{n} a_l$$

Definition:

$M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **induktiv**, falls erfüllt sind:

1.) $1 \in M$

2.) Aus $x \in M$ folgt: $x + 1 \in M$

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ besitzen diese Eigenschaft.

$\mathbb{N}$, die Menge der natürlichen Zahlen, ist die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.

3.7.1 Induktionssatz

Ist M eine induktive Teilmenge der natürlichen Zahlen, so gilt: $M = \mathbb{N}$.

Begründung:

Gilt $\mathbb{N} \subset M \subset \mathbb{N}$, so ist $M = \mathbb{N}$. Das heißt, gelten für $M \subset \mathbb{N}$:

1. $1 \in M$
2. Aus $n \in M$ folgt $n + 1 \in M$

$\Rightarrow$ Dann hat man $M = \mathbb{N}$.

3.7.2 Beweisschema Vollständige Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt. Das Ziel ist es, zu zeigen, daß $A(n)$ richtig ist $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Folgende Aussagen können beispielsweise über vollständige Induktion überprüft werden:

- $2n + 1$ ist ungerade $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
- $n^2 - n + 41$ ist $\forall\, n$ eine Primzahl.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$

1.) 1.Schritt: Induktionsanfang

Man zeige, daß $A(1)$ richtig ist.

2.) 2.Schritt: Induktionsschluß

- ✳ Induktionsvoraussetzung:
  Man nimmt an, daß $A(k)$ richtig ist für beliebige $k \in \mathbb{N}$.
- ✳ Induktionsbedingung:
  Dann folgt daraus, daß $A(k+1)$ richtig ist.

Wenn dies gezeigt ist, dann ist $A(n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ richtig. M sei folgende Menge:

$$\boxed{M = \{n \in \mathbb{N} | A(n) \text{ ist richtig.}\}}$$

Da Element 1 befindet sich dann in M: $1 \in M$. Dann folgt natürlich aus $k \in \mathbb{N}$, daß $k+1 \in M$. Es kann auch sein, daß die Aussage erst ab einem bestimmen $n_0 > 1$ gilt, wie beispielsweise hier:

$2^n \geq n^2$ für $n \geq 5$

Dann muß man betrachten:

$M(n) = A(n + n_0 - 1)$ für $n = 1, 2, \ldots$

- ✳ Induktionsvoraussetzung:
  Es sei $k \geq n_0$ beliebig und $A(m)$ sei richtig für $n_0 \leq m \leq k$.
- ✳ Induktionsbehauptung:
  Dann ist $A(k+1)$ richtig.

Das Ergebnis ist, daß $A(n)$ für $n \geq n_0$ stimmt. Bei manchen der folgenden Beispiele fehlen die Induktionsanfänge; diese können als Übung vervollständigt werden.

Beispiel:

Es sei zu beweisen:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1) \text{ für } n = 1, 2, \ldots}$$

1.) Induktionsanfang:
Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Die linke und rechte Seite der Gleichung stimmen somit überein. Damit ist $A(n)$ für $n = 1$ gezeigt.

2.) Induktionsschluß:

- ✳ Induktionsvoraussetzung:
  Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ beliebig und setzen voraus:

$$\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k}{2}(k+1)$$

✳ Induktionsbehauptung:

$$\sum_{j=1}^{k+1} j = \frac{k+1}{2}(k+2)$$

Mittels der Induktionsvoraussetzung können wir nun die Gleichung beweisen:

$$\sum_{j=1}^{k+1} j = \sum_{j=1}^{k} +k+1 = \frac{k}{2}(k+1)+k+1 = (k+1)\frac{k+2}{2}$$

Beispiel:

Es sei zu beweisen:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{N}}$$

1.) Induktionsanfang:
Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{1} k\binom{n}{k} = 0+1 = 1$$

$1 \cdot 2^{1-1} = 1 \cdot 2^0 = 1$

Die linke und rechte Seite der Gleichung stimmen somit überein. Damit ist $A(n)$ für $n = 1$ gezeigt.

2.) Induktionsschluß:

✳ Induktionsvoraussetzung:
Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ beliebig und setzen voraus:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

✳ Induktionsbehauptung:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = (n+1) \cdot 2^n$$

Mittels der Induktionsvoraussetzung können wir nun die Gleichung beweisen:

$$S = \sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n+1}{k} + (n+1)$$

Es gilt die Beziehung:

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$$

Damit ergibt sich nun:

$$S = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n+1}{k} + (n+1) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n+1}{k} + (n+1) = \sum_{k=0}^{n} k\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] + (n+1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + (n+1) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + (n+1) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} - (n+1) + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + (n+1) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} =$$
$$= 2\cdot\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \overset{\text{IV}}{=} 2\cdot\left(n\cdot 2^{n-1}\right) + 2^n = n\cdot 2^n + 2^n = \boxed{2^n\,(n+1)}$$

Beispiel:

Es sei zu beweisen:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}}$$

1.) Induktionsanfang:
Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Die linke und rechte Seite der Gleichung stimmen somit überein. Damit ist $A(n)$ für $n = 1$ gezeigt.

2.) Induktionsschluß:

- Induktionsvoraussetzung:
  Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ beliebig und setzen voraus:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

- Induktionsbehauptung:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2+k} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Dann ergibt sich durch Transformation der Summation:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} + \frac{1}{(n+1)^2+(n+1)} \overset{\text{IV}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2+(n+1)} =$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{(n^2+3n+2)-(n+2)+1}{n^3+3n+2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2} =$$
$$= \frac{n^2+3n+2-(n+1)}{n^2+3n+2} = \frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+2} - \frac{n+1}{n^2+3n+2} = 1 - \frac{n+1}{n^2+3n+2} =$$
$$= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \boxed{1 - \frac{1}{n+2}}$$

Beispiel:

Es sei zu beweisen:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{x^{2^{i-1}}}{1-x^{2^i}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}} \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \neq 1}$$

1.) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt: Die linke und rechte Seite der Gleichung stimmen somit überein. Damit ist $A(n)$ für $n = 1$ gezeigt.

2.) Induktionsschluß:

✳ Induktionsvoraussetzung:

Wir wählen $i \in \mathbb{N}$ beliebig und setzen voraus:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x^{2^{i-1}}}{1-x^{2^i}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

✳ Induktionsbehauptung:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x^{2^{i-1}}}{1-x^{2^i}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}$$

Dann ergibt sich durch Transformation der Summation:

$$S = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x^{2^{i-1}}}{1-x^{2^i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{2^{i-1}}}{1-x^{2^i}} + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}} + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} =$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{2^{n+1}} - x^{2^n}\left(1-x^{2^n}\right)}{\left(1-x^{2^n}\right)\left(1-x^{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{2^{n+1}} - x^{2^n} + x^{2\cdot 2^n}}{1-x^{2^{n+1}} - x^{2^n} + x^{3\cdot 2^n}} =$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{2^{n+1}} - x^{2^n} + x^{3\cdot 2^n} + \left(x^{2\cdot 2^n} - x^{3\cdot 2^n}\right)}{1-x^{2^{n+1}} - x^{2^n} + x^{3\cdot 2^n}} = \frac{1}{1-x} - 1 + \frac{x^{3\cdot 2^n} - x^{2\cdot 2^n}}{\left(1-x^{2^n}\right)\left(1-x^{2^{n+1}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1-x} - 1 + \frac{-x^{2\cdot 2^n}\left(1-x^{2^n}\right)}{\left(1-x^{2^n}\right)\left(1-x^{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{1-x} - 1 - \frac{x^{2\cdot 2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{1}{1-x} + \frac{x^{2\cdot 2^n} - 1 - x^{2\cdot 2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}}$$

Beispiel:

Man zeige, daß gilt:

$$\boxed{2^n > n^2 \text{ für } n \geq 5}$$

1.) Induktionsanfang:

$2^5 = 32 > 5^2 = 25$

Die Aussage stimmt.

2.) Induktionsschluß:

* Induktionsvoraussetzung:
  Wir wählen $k > 5$ beliebig und setzen voraus:

  $2^k > k^2$

* Induktionsbehauptung:

  $2^{k+1} > (k+1)^2$

Für $k > 5$ folgt:

$k - 1 \geq 5 \Rightarrow (k-1)^2 = k^2 - 2x + 1 \geq 25 \Rightarrow k^2 \geq 2k + 24 > 2k + 1$

Damit ergibt sich nun die zu zeigende Beziehung:

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

Beispiel:

Man zeige, daß gilt:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}}$$

1.) Induktionsanfang:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$2 - \frac{1}{1} = 1$$

$1 = 1$

Die Aussage stimmt somit.

2.) Induktionsschluß:

* Induktionsvoraussetzung:
  Wir wählen $k \geq 1$ beliebig und setzen voraus:

  $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

* Induktionsbehauptung:

  $$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{\text{IV}}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2 + 2n + 1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2 + n}$$

Mittels Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Dann folgt durch Einsetzen:

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2 + n} = 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \boxed{2 - \frac{1}{n+1}}$$

Damit folgt also die Behauptung, womit die Ungleichung stimmt.

Beispiel:

Man zeige, daß gilt:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

1.) Induktionsanfang:

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$$

$$\frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = 1$$

Die Aussage stimmt somit.

2.) Induktionsschluß:

* Induktionsvoraussetzung:
  Wir wählen $k \geq 1$ beliebig und setzen voraus:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

* Induktionsbehauptung:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 \overset{\text{IV}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2 + 4(n+1)\right] =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2 + 4n + 4\right] = \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 = \boxed{\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}}$$

Beispiel:

Man zeige, daß gilt:

$$\boxed{\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} < n \text{ für } n \geq 2}$$

1.) Induktionsanfang: Die Aussage stimmt.

2.) Induktionsschluß:

* Induktionsvoraussetzung:
  Wir wählen $k \geq 2$ beliebig und setzen voraus:

$$\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} < n$$

✳ Induktionsbehauptung:

$$\frac{n+1}{2} < \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} < n+1$$

Wir zeigen zuerst die linke Ungleichung:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n+2^n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^n+2^n-1} \frac{1}{k} \overset{\text{IV}}{>} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^n+2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^n+2^n-1} \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{n}{2} + 2^n \cdot \frac{1}{2 \cdot 2^n} = \boxed{\frac{n+1}{2}}$$

Außerdem gilt für die rechte Ungleichung:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n+2^n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^n+2^n-1} \frac{1}{k} \overset{\text{IV}}{<} n + \sum_{k=2^n}^{2^n+2^n-1} \frac{1}{k} < n + \sum_{k=2^n}^{2^n+2^n-1} \frac{1}{2^n} = n + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \boxed{n+1}$$

Damit ist die Ungleichungskette bewiesen.

Beispiel:

Man zeige, daß gilt:

$$\boxed{\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}}$$

1.) Induktionsanfang: Die Aussage stimmt.

2.) Induktionsschluß:

✳ Induktionsvoraussetzung:
Wir wählen $k \geq 2$ beliebig und setzen voraus:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$$

✳ Induktionsbehauptung:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) \overset{\text{IV}}{\leq} \frac{a^n+b^n}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{a^{n+1}+ab^n+ba^n+b^{n+1}}{4} =$$

$$= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{4} + \frac{ab^n+ba^n}{4} = \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} - \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{4} + \frac{ab^n+ba^n}{4} =$$

$$= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} + \frac{1}{4}\left(ab^n+ba^n-a^{n+1}-b^{n+1}\right) =$$

$$= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2} + \frac{1}{4}\underbrace{(b^n-a^n)(a-b)}_{\leq 0} \leq \boxed{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}}$$

Beispiel:

Man zeige, daß gilt:

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)}$$

1.) Induktionsanfang: Die Aussage stimmt.

2.) Induktionsschluß:

* Induktionsvoraussetzung:
Wir wählen $n \geq 1$ beliebig und setzen voraus:

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$$

* Induktionsbehauptung:

$$\prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k) = 2^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)$$

Nun folgt durch Transformation des Summationsindex:

$$\prod_{k=1}^{n+1}(n+k+1) = \prod_{k=2}^{n+2}(n+k) = \prod_{k=1}^{n+2}(n+k)\cdot\frac{1}{n+1} = \prod_{k=1}^{n}(n+k)\frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \overset{\text{IV}}{=}$$

$$= 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot\frac{(2n+1)\cdot 2\cdot(n+1)}{n+1} = 2^n \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)\cdot 2\cdot\frac{2n+1}{2n+1} =$$

$$= 2^n \prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\cdot 2 = \boxed{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)}$$

Beispiel:

Man zeige schließlich noch die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

$$\boxed{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

1.) Induktionsanfang: Die Aussage stimmt.

2.) Induktionsschluß:

* Induktionsvoraussetzung:
Wir wählen $k \geq 1$ beliebig und setzen voraus:

$$\sqrt[2^k]{\prod_{i=1}^{2^k} a_i} \leq \frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k} a_i$$

✳ Induktionsbehauptung:

$$\sqrt[2^k+1]{\prod_{i=1}^{2k+1} a_i} \leq \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{i=1}^{2^k+1} a_i$$

3.) Induktionsbeweis:

$$\sqrt[2^k+1]{\prod_{i=1}^{2^{k+1}} a_i} = \sqrt{\sqrt[2^k]{\prod_{i=1}^{2^{k+1}} a_i}} = \sqrt{\sqrt[2^k]{\prod_{i=1}^{2k} a_i} \cdot \sqrt[2^k]{\prod_{2^k+1}^{2^{k+1}} a_i}} \leq \sqrt{\frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{2^k} a_i \cdot \frac{1}{2^k} \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{2k}} \sum_{i=1}^{2^k} a_i \cdot \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i} = \frac{1}{2^k} \sqrt{\sum_{i=1}^{2^k} a_i \cdot \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i} \leq \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{2^k} a_i + \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i \right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2^{k+1}} \left(\sum_{i=1}^{2^{k+1}} a_i \right)}$$

Nun haben wir die Ungleichung für beliebige Zweierpotenzen gezeigt. Nun zeigen wir außerdem, daß $A(n) \mapsto A(n-1)$.

$$\sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right)^{\frac{1}{n-1}} = \sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right)^{\frac{n}{n-1}}} = \sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right)^{\frac{n-1+1}{n-1}}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right)^{\frac{1}{n-1}}} \leq$$

$$\leq \boxed{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i + \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \right)}$$

Damit ergibt sich nun durch Multiplikation der erhaltenen Ungleichung mit n:

$$n \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i}$$

Wir bringen den einen Term auf die linke Seite:

$$n \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} - \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

$$(n-1) \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

Division durch $n-1$ ergibt dann schließlich unsere zu beweisende Aussage $A(n-1)$:

$$\boxed{\sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \leq \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i}$$

Übung:

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

3.7.3 Definition durch Induktion/Rekursive Definition

$D(n)$ sei Größe, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt. $D(n)$ soll für alle n definiert werden.

1. Man definiere $D(1)$.
2. $D(k)$ sei für $k \in \mathbb{N}$ beliebig und schon definiert.
   Dann definiere man hiermit $D(k+1)$.

Beispiele:

- Die Fakultät:

  Man definiere $1! := 1$. Dann folgt daraus:

  $$\boxed{(k+1)! := (k+1) \cdot k!}$$

  Damit berechnet sich also die Fakultät folgendermaßen:

  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$

- Das Summenzeichen:

  Man definiere $\sum\limits_{j=1}^{1} a_j := a_1$. Damit haben wir:

  $$\boxed{\sum_{j=1}^{k+1} a_j := \left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right) + a_{k+1}}$$

- Potenzen:

  Man definiere $a^1 := a$. Dann resultiert:

  $$\boxed{a^{k+1} := (a^k) \cdot a}$$

$M_1 = \{x | x \geq 0\}, M_2 = \{x | -1 \leq x \leq 0\}$

Es seien $x_1, \ldots, x_n \in M_1$ (oder $\in M_2$)

Satz:

$$\boxed{\prod_{j=1}^{n} (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n \text{ für } n \in \mathbb{N}}$$

Beweis:

1.) Induktionsanfang:

$1 + x_1$ links $\quad 1 + x_1$ rechts (w)

2.) Induktionsschluß:

$$\prod_{j=1}^{k} (1 + x_j) \geq 1 + x_1 + \ldots + x_k$$

- Induktionsvoraussetzung:
  Es gelte für $j > 1$:
  $$\prod_{j=1}^{k}(1+x_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^{k} x_j$$
- Induktionsbehauptung:
  $$\prod_{j=1}^{k+1}(1+x_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^{k+1} x_j$$

$$\prod_{j=1}^{k+1}(1+x_j) = \left(\prod_{j=1}^{k}(1+x_0)\right)\underbrace{(1+x_{k+1})}_{\geq 0} \geq \left(1+\sum_{j=1}^{k} x_j\right)\underbrace{(1+x_{k+1})}_{\geq 0} = 1+\sum_{j=1}^{k+1} x_j + \underbrace{x_{k+1}\sum_{j=1}^{k} x_j}_{\geq 0} \geq 1+\sum_{j=1}^{k+1} x_j$$

3.7.4 Bernoullische Ungleichung

Satz:

Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$(1+x)^n \geq 1 + nx$

Beweis:

Wir benutzen oben bewiesene Ungleichung:

$\prod_{j=1}^{n}(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ für $n \in \mathbb{N}$

Setze nun $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$. Damit folgt:

$\prod_{j=1}^{n}(1+x) = (1+x)^n \geq 1 + nx$

Damit ist die Bernoullische Ungleichung bewiesen.

3.7.5 Geometrische Summe

$q \neq 1$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$$

Setze:

$$\left.\begin{array}{lllll} S & = & \sum_{k=0}^{n} q^k & = & 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \\ qS & = & & = & q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1} \end{array}\right\} S - qS = 1 - q^{n+1} = S(1-q)$$

Übung:

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\dfrac{5n+\frac{1}{2}}{5n-\frac{1}{2}} > 1 + \dfrac{1}{5^5}$ $\qquad 2^n > n^2$

Dies gilt nur für $1 \leq n \leq 625$

Satz:

n verschiedene Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lassen sich auf $n!$ verschiedene Arten anordnen.

1.) Induktionsanfang:

Nach der Formel gibt es $P_1 = 1! = 1$ Möglichkeiten, um ein einziges Element anzuordnen. Dies ist wohl war.

2.) Induktionsschluß:

- ✳ Induktionsvoraussetzung:
  Für ein $n > 1$ gelte $P_n = n!$.
- ✳ Induktionsbehauptung:

  $$P_{n+1} = (n+1)!$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}$$

Betrachte alle Anordnungen, bei denen a_k am Anfang steht: $n!$. Wegen $k = 1, 2, \ldots, n+1$ erhält man insgesamt $(n+1)n! = (n+1)!$.

3.7.6 Binomialkoeffizient

$a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}, \binom{\alpha}{0} = 1$$

Übung:

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$$

Es sei speziell $\alpha = n \in \mathbb{N}$. Dann gelten:

$$\binom{n}{k} = 0 \quad k > n$$

$$\binom{3}{5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)}{5!} = 0$$

Für $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-k+1) \overbrace{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{(n-k)!}}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Satz (Lotto/Kombinationen):

Es seien k, $n \in \mathbb{N}$, $k \in n$. Die Anzahl K_n^k der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$.

Beweis mit Vollständiger Induktion:

1.) Induktionsanfang:

$$n = 1 (\Rightarrow k = 1) \qquad K_n^k = 1 = \binom{1}{1} \text{ (wahr)}$$

2.) Induktionsschluß:

✳ Induktionsvoraussetzung:

$$K_n^k = \binom{n}{k} \text{ für } 1 \le k \le n \text{ und } n, k \in \mathbb{N}$$

✳ Induktionsbehauptung:

$$K_{n+1}^k = \binom{n+1}{k} \text{ für } 1 \le k \le n+1$$

3.) Induktionsbeweis:

✳ 1.Fall:

$$k = n+1 : K_{n+1}^{n+1} = 1 = \binom{n+1}{n+1} \qquad\qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

✳ 2.Fall:

$$k \le n : K_{n+1}^k = \binom{n+1}{k}$$

Teile alle Teilmengen in zwei Klassen T_1, T_2 wie folgt:

a.) In T_1 liegen alle k-elementigen Teilmengen, zu denen a_{n+1} gehört. $\binom{n}{k-1}$

b.) In T_2 liegen alle k-elementigen Teilmengen, die a_{n+1} nicht enthalten. $\binom{n}{k}$

3.8 Der binomische Satz

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt folgende Beziehung:

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \text{ mit } \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}\right]$$

Für $n = 6$ gilt:

$$(1+t)(1+t)(1+t)(1+t)(1+t)(1+t) = \binom{6}{0} \cdot t^0 + \binom{6}{1} t^1 + \binom{6}{2} t^2 + \binom{6}{3} t^3 + \binom{6}{4} t^4 + \binom{6}{5} t^5 + \binom{6}{6} t^6$$

Es sei x, $y \in \mathbb{R}$. Setze oben $t = \dfrac{x}{y}$:

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{-k}$$

Wir multiplizieren mit y^n durch und erhalten:

$$y^n \left(1 + \frac{x}{y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Dann kann die Gleichung noch folgendermaßen umgeformt werden, wobei folgt:

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$$

3.8.1 Pascalsches Dreieck

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$$

- $t = 1$:

  $$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \quad (\star)$$

- $t = -1$:

  $$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} \quad (\star\star)$$

Wir addieren die Ausdrücke $(\star)$ und $(\star\star)$:

$$2^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(1 + (-1)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \binom{n}{2k}$$

$$2^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k}$$

Die Ausdrücke $(\star)$ und $(\star\star)$ werden subtrahiert:

$$2^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(1 - (1)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \binom{n}{2k+1}$$

Übung:

Es sei zu zeigen, daß für $n,\, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=k=1}^{n+k-1} \binom{j}{k-1} = \binom{n+k}{k}$$

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{n+l}{l} = \binom{n+k+1}{k}$$

Nun notieren wir uns das **Pascalsche Dreieck**:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}}$$

$\binom{\alpha}{k}, \alpha \in \mathbb{R}, \binom{\alpha}{0} := 1,\ 0! = 1$

Es gilt, wie wir zeigen sollten:

$$\boxed{\sum_{j=k-1}^{n+k-1} \binom{j}{k-1} = \binom{n+k}{k}}$$

Für $k-1=2$, $n=3$ folgt durch Einsetzen:

$$\sum_{j=2}^{5} \binom{j}{2} = \binom{6}{3}$$

Weiterhin gilt:

$$\boxed{\sum_{l=0}^{k} \binom{n+l}{l} = \binom{n+k+1}{k}}$$

Auch hier folgt für $n=2$, $k=4$ durch Einsetzen:

$$\sum_{l=0}^{4} \binom{2+l}{l} = \binom{7}{4}$$

3.9 Betrag einer reellen Zahl/Ungleichungen

3.9.1 Vorzeichenfunktion

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} +1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{sign(x): } \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

3.9.2 Betragsfunktion

Es sei die Funktion $\mathbb{R} \mapsto \{x|x \geq 0\}$ als sogenannte Betragsfunktion definiert. Für die gibt es verschiedene Schreibweisen:

$$|x| := \left\{ \begin{array}{lll} x & \text{für} & x \geq 0 \\ -x & \text{für} & x \geq 0 \end{array} \right\} = \operatorname{sign}(x) \cdot x = \max\{x, -x\}$$

Des weiteren gelten folgende Beziehungen:

$$+x \leq |x|, -x \leq |x| \xrightarrow{\cdot(-1)} x \geq -|x| : -|x| \leq x \leq |x|$$

$$|x^2| = x^2 = x^2(\operatorname{sign}(x))^2 = (x \cdot \operatorname{sign}(x))^2 = |x|^2$$

$$|x^2| = x^2 = |x|^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x|$$

Satz:

Es seien x, $y \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

a.) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $(|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0)$

b.) $|xy| = |x| \cdot |y|$

Insbesondere: $|-x| = |x|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

Beweis:

$$(xy)^2 = x^2y^2$$

$$|xy|^2 = |x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2$$

$$|-x| = |(-1)x| = |-1||x| = |x|$$

$$|x| = \left|\frac{x}{y}y\right| \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| |y| \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\frac{5 + \frac{1}{2}\frac{1}{n}}{5 - \frac{1}{2}\frac{1}{n}} = \frac{5n + \frac{1}{2}}{5n - \frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{5^5} \qquad 1 \leq n \leq 625 \qquad „\frac{1}{\infty} = 0“$$

$$\underbrace{\frac{5n + \frac{1}{2}}{5n - \frac{1}{2}} - 1}_{\frac{1}{5n - \frac{1}{2}}} > \frac{1}{5^5} \qquad \epsilon > 0 : \frac{1}{n} < \epsilon\, n \geq n_0$$

$$\frac{1}{5n - \frac{1}{2}} > \frac{1}{5^5}$$

Satz:

Es seien x,$y \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Gleichungen bzw Ungleichungen:

a.) $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

b.) $|xy| = |x||y|$, $|-x| = |x|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

c.) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

Die letzte Ungleichung bezeichnet man als **Dreiecksungleichung**.

Beweis der Dreiecksungleichung:

Wir verwenden für den ersten Teil einen Trick:

$x = (x \pm y) \mp y : |x| \leq |x \pm y| + |y|$

$(y \pm x) \mp x : |y| \leq |x \pm y| + |x|$

$\pm(|x| - |y|) \leq |x \pm y|$

$\Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x \pm y|$

Weiterhin folgt:

$\underbrace{\pm x \leq |x| \text{ und } \pm y \leq |y|}_{\pm(x \pm y) \leq |x| + |y|} \Rightarrow |x \pm y| \leq |x| + |y|$

Daraus ergibt sich nun der zweite Teil der Ungleichung:

$|x + y| \leq |x| + |y|$

Folgerung:

Es sei $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$:

$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j| \text{ für } k = 1, 2, \ldots$$

Beweis:

1.) Induktionsanfang:
Für $k = 1$ folgt die Identität $|a_1| = |a_1|$. Diese Aussage ist wohl wahr.

2.) Induktionsschluß:

* Induktionsvoraussetzung:

$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j|$$

* Induktionsbehauptung:

$$\left|\sum_{j=1}^{k+1} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{k+1} |a_j|$$

3.) Induktionsbeweis:
Durch Anwenden der Dreiecksungleichung ergibt sich schließlich:

$$\left|\sum_{j=1}^{k+1} a_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} a_j + a_{K+1}\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{k} a_j\right| + |a_{k+1}| \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j| + |a_{k+1}|$$

Bemerkung:

$x, y \leq 0 : x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$

Für x, $y \in \mathbb{R}$ gilt $|x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$.

$$y^2 - x^2 = (|y| - |x|)\underbrace{(|y| + (|x|)}_{\geq 0}$$

Gegeben sind $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x - a| \leq \epsilon$?

1. Fallunterscheidung:

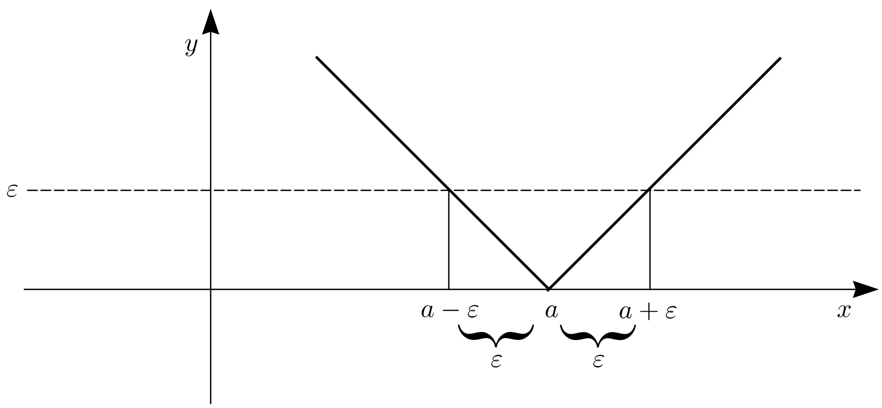
   $x \geq a \qquad |x - a| = x - a \leq \epsilon \Rightarrow a \leq x \leq a + \epsilon$

   $x \leq a \qquad |x - a| = -(x - a) \leq \epsilon \Rightarrow a - \epsilon \leq x \leq a$

   Daraus folgt dann:

   $a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$

2. Geometrisch:



3. $(|x|^2 = x^2)$
   Quadriere die Ungleichung $|x - a| \leq \epsilon$: $(x - a)^2 \leq \epsilon^2$

   - Quadratische Ungleichung
   - $\epsilon^2 - (x - a)^2 = (\epsilon - (x - a))(\epsilon + (x - a)) \geq 0$
     $\Rightarrow \epsilon \geq x - a$ und $\epsilon \geq (x - a) \Rightarrow a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$
     $\Rightarrow \epsilon \leq x - a$ und $\epsilon \leq -(x - a)$ Dies ist unmöglich!

Satz:

Gegeben sind $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |x - a| \leq \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad -\epsilon \leq x - a \leq \epsilon \end{aligned}$$

3.9.3 Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel (GAM-Ungleichung)

1. $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2); x, y \in \mathbb{R}$
   Gleichheit gilt **nur** für: $|x| = |y|$.

2. $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y); x \leq 0, y \leq 0$
   Gleichheit gilt **nur** für: $x = y$.

Beweis:

1. $(|x| - |y|)^2 \geq 0 \leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2|x||y|$

2. Setze in $\star$ $x \mapsto \sqrt{x}, y \mapsto \sqrt{y} : \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y)$

3.10 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Gegeben sind a_1, a_2, …, a_k, b_1, …, $b_k \in \mathbb{R}$. Dann gilt die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{k} |a_j b_j| \leq \underbrace{\left[\sqrt{\sum_{j=1}^{k} a_j^2}\right]}_{\alpha} \underbrace{\left[\sqrt{\sum_{j=1}^{k} b_j^2}\right]}_{\beta}}$$

Beweis:

Wir können schreiben: $\frac{1}{\alpha\beta} \sum_{j=1}^{k} |a_j b_j| \leq 1$ für $a_j = \frac{1}{j}$ und $b_j = j$. Aus $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ folgt $a_j = 0 \ \forall\ j$ oder $b_j = 0 \ \forall\ j$. In diesem Fall ist nichts zu beweisen. Wir ziehen die Konstanten α und β in die Summe:

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \frac{a_j}{\alpha} \frac{b_j}{\beta} \right| \leq 1$$

Es gilt die Dreiecksungleichung:

$$x,\, y \in \mathbb{R} :\ |x| \leq |y| \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

Außerdem gilt folgende Abschätzung:

$$x \geq 0, y \geq 0 : \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y)$$

Mit diesen Erkenntnissen folgt nun mit $x = \frac{a_j^2}{\alpha^2}$ und $y = \frac{b_j^2}{\beta^2}$:

$$\left| \frac{a_j}{\alpha} \frac{b_j}{\beta} \right| \leq \left| \frac{1}{2} \Big(\frac{a_j^2}{\alpha^2} + \frac{b_j^2}{\beta^2} \Big) \right|$$

Wir summieren diese Ausdrücke auf und erhalten:

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \frac{a_j \cdot b_j}{\alpha\beta} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{k} \left| \frac{a_j^2}{\alpha^2} \right| + \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{b_j^2}{\beta^2} \right| \right)$$

Für $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{l=1}^{k} |a_l b_l| \leq \left[\sqrt{\sum_{l=1}^{k} a_l^2}\right] \left[\sqrt{\sum_{n=1}^{k} b_n^2}\right]$$

3.11 Komplexe Zahlen

Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Wir wollen folgendes Gleichungssystem lösen:

$10 = u + v$

$41 = u \cdot v$

$\Rightarrow u = 5 + 4\sqrt{-1}$

$\Rightarrow v = 5 - 4\sqrt{-1}$

$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)^2} = -1$ Hoppla!

Da Gleichungssystem besitzt also in $\mathbb{R}$ keine Lösung. $\mathbb{R}$ soll zu $\mathbb{C}$ erweitert werden ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) derart, daß:

1. $x^2 + 1 = 0$ lösbar ist: Eine Lösung wird durch i bezeichnet ($\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$).
2. $\mathbb{C}$ soll mit „+“ und „·“ einen Körper bilden.
   Diese Operationen sollen - eingeschränkt auf $\mathbb{R}$ - die schon bekannte Multiplikation und Addition liefern.

Solch eine Erweiterung muß notwendig folgende Elemente enthalten:

x, y, i mit $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \subset \underbrace{\{z = x + \mathrm{i}y | x, y \in \mathbb{R}\}}_{\tilde{\mathbb{C}}} \subset \mathbb{C}$

In $\tilde{\mathbb{C}}$ wird wie im Reellen gerechnet, zu beachten ist zusätzlich $\mathrm{i}^2 = -1$.

1. $z = x + \mathrm{i}y,\ w = u + \mathrm{i}v\ (x,\ y,\ u,\ v \in \mathbb{R}) \in \tilde{\mathbb{C}}$
   Dann folgt für die Gleichheit $z = w$ von z und w: $(x = u) \wedge (y = v)$

   Beweis:

   $x + \mathrm{i}y = u + \mathrm{i}v$

   Wir nehmen an,daß $y \neq v$. Dann folgt daraus für i:

   $\mathrm{i} = \dfrac{x - u}{v - y} \in \mathbb{R}$

   Die imaginäre Einheit i wäre also im Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, was ein Widerspruch darstellt. Daraus ergibt sich also:

   $y = v \Rightarrow x = u$

   $z \in \tilde{\mathbb{C}}$ sind eindeutig x und y mit $z = x + \mathrm{i}y$ zugeordnet. Hier liegt also eine beliebige Zuordnung zwischen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $z = x + \mathrm{i}y \in \tilde{\mathbb{C}}$ vor.

3.11.1 Definition von Addition und Multiplikation in $\tilde{\mathbb{C}}$

Es seien $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ mit $x,\ y,\ u,\ v \in \mathbb{R}$. Dann wird Addition und Multiplikation folgendermaßen definiert:

Addition:

- $z + w := x + u + \mathrm{i}(y + v) \in \tilde{\mathbb{C}}$
- $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} v$
  $\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} v$

Multiplikation:

- $z \cdot w = xu - yv + \mathrm{i}(yu + xv) \in \tilde{\mathbb{C}}$
- $0 = 0 + \mathrm{i}0$ ist neutral bezüglich der Addition: $z + 0 = z \forall z$
- $-z = (-x) + \mathrm{i}(-y)$ ist invers zu z bezüglich der Addition: $z + (-z) = 0$

$\Longrightarrow (\tilde{\mathbb{C}}, +)$ ist abelsche Gruppe.

- $(0 \neq)1 = 1 + \mathrm{i}0$ ist neutral bezüglich der Multiplikation: $1z = z \,\forall\, z$.
- $z \neq 0$, $z = x + \mathrm{i}y$ hierzu bezüglich der Multiplikation ist $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2}\right)$ invers zu z
- $(\tilde{\mathbb{C}} \subset \{0\} \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

$\Longrightarrow (\tilde{\mathbb{C}}, +)$ ist abelsche Gruppe.

- Zusätzlich gilt für z,w,$\zeta \in \tilde{\mathbb{C}}$: $z(w + \zeta) = zw + z\zeta$.
- $\tilde{\mathbb{C}}$ ist ein Körper, der die Forderungen 1./2. erfüllt.

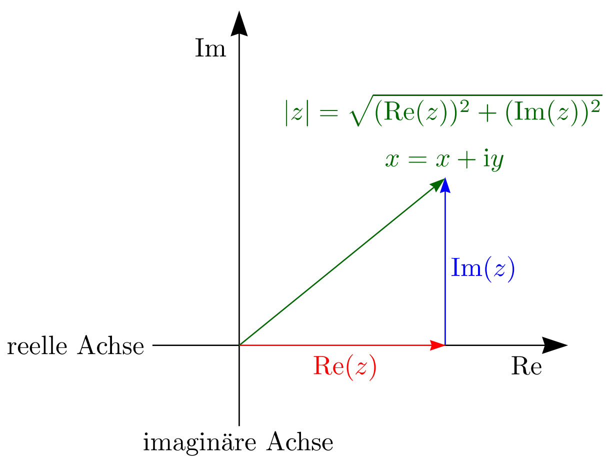
$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ ist der Körper der komplexen Zahlen.

Weitere Rechenregeln:

- Der **Betrag** $|z|$ einer komplexen Zahl ist festgelegt durch:

  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

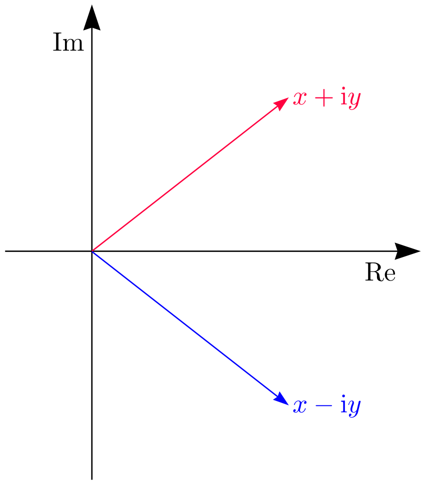
  Der Betrag von z ist der Abstand von z zum Ursprung O der Gaußschen Zahlenebene.



- Konjugiert komplexe Zahl:

  $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$

  $\overline{z}$ ist „z gespiegelt an der reellen Achse“.



- Mit $z = x + \mathrm{i}y$ und $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ folgt:

  $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

  $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$

  $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\overline{z})$

  $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$

  $\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) = \mathrm{Re}\,\left(\overline{z\overline{w}}\right) = \mathrm{Re}\,(\overline{z}w)$

  $\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) = \frac{1}{2}\left(z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}\right) = \frac{1}{2}\left(z\overline{w} + w\overline{z}\right) = \mathrm{Re}\,(\overline{z}w)$

- Rechnen mit Beträgen:

  1.) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
  2.) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
  3.) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$
  4.) $\overline{\overline{z}} = z$, $|\overline{z}| = |z|$, $(|\overline{z}|)^2 = \overline{z}\overline{\overline{z}} = \overline{z}z = |z|^2$
  Im Reellen gilt $|x^2| = x^2$, aber im Komplexen ist im allgemeinen $|z^2| \neq z^2$.
  5.) $z \neq 0$: $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2 + y^2}$
  6.) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z}{z\overline{z}} = \frac{1}{z} \qquad \overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$

Satz 1:

z,w seien komplexe Zahlen. Dann gelten:

1.) $|wz| = |w||z|$

2.) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \Rightarrow \left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$

3.) $|\mathrm{Re}(z) \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

4.) $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$

5.) $|z + w| \leq |z| + |w|$, $||z| - |w|| \leq |z + w|$
(Dreiecksungleichung)

1. Abstände:

   $|z-w|$ ist der Abstand zwischen z und w. Es sei $a \in \mathbb{C}$:

   a.) Gesucht sind die Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| = 3$: Kreis um a mit Radius 3
   b.) Gesucht sind die Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| \leq 3$: Inneres des obigen Kreises
   c.) Gesucht sind die Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| \geq 3$: Äußeres des obigen Kreises

   Betrachten wir folgendes Beispiel: Was bedeutet $\{z \in \mathbb{C} || z+4| \leq |2z+2|\}$ geometrisch?

   $|z+4|^2 \leq 4| + 1|^2$

   $|z|^2 + 16 + 2 \cdot 4\mathrm{Re}(z) \leq 4(|z|^2 + 1 + 2\mathrm{Re}(z)) = 4|z|^2 + 4 + 8\mathrm{Re}(z)$

   $12 \leq 3|z|^2 \rightarrow 4 \leq |z|^2 \rightarrow 2 \leq |z|$

2. Kehrwerte

   $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{|z|^2}\mathrm{Re}(z),\ \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{|z|^2}(-\mathrm{Im}(z))$

   $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|\overline{z}|}{|z|^2} = \frac{|\overline{z}|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$

3. Satz 1

4. Folgerung aus Satz 1

   $|\mathrm{Re}(z)|^2 \leq (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 = |z|^2 \rightarrow |\mathrm{Re}(z)| = |z|^2 \rightarrow |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

   $a \in \mathbb{R}, \epsilon \geq 0, b \in \mathbb{C}:$

   $|a| \leq \epsilon \leftrightarrow -\epsilon \leq a \leq \epsilon$

   $|a| \leq |b| \leftrightarrow -|b| \leq a \leq |b|$

   $-|z| \leq \pm\mathrm{Re}(z) \leq |z| \qquad -|z| \leq \pm\mathrm{Im}(z) \leq |z|$

   $|z \pm w|^2 = (z \pm w)(\overline{z} \pm \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} \pm w\overline{z} \pm z\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \qquad (\overline{w\overline{z}} = z\overline{w}, \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$

5. Dreiecksungleichung

   $|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2$

   $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |\mathrm{Re}(z\overline{w})| \leq |z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w|$

   $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \geq -|z\overline{w}| = -|z||w|$

3.11.2 Polardarstellung komplexer Zahlen

φ wird zur positiven reellen Achse gerechnet.

Definition:

Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, (x, y \in \mathbb{R})$. Es gibt genau eine Zahl φ mit den Eigenschaften $x = |z|\cos\varphi$, $y = |z|\sin\varphi$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Diese Zahl φ heißt das Argument von z: $\arg(z)$

Ergebnis:

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ kann in der Form $z = r(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ dargestellt werden, wobei $r = |z|$ und $\psi = \arg(z) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ ist.

Es sei $z = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$ und $w = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$ gegeben. Dann gilt:

a.) Multiplikation:

$$r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)$$

b.) Additionstheorem:

$$r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Insbesondere gilt:

$$z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + \mathrm{i}\sin(2\varphi))$$

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))$$

c.) Division:

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)}{r_2^2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Satz 2 (Satz 6.10, Seite 65):

$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ seien gegebene komplexe Zahlen $(r = |z| > 0, \rho = |w| > 0)$. Es gelten:

1.) $z = w \leftrightarrow r = \rho$ und $\varphi = \psi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z})$

2.) $\overline{z} = r(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$

3.) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi))$

4.) $zw = r\rho(\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i}\sin(\psi + \varphi))$

5.) $z^n = r^n(\cos(n\cdot\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\cdot\varphi))$ mit $n \in \mathbb{Z}$
Dies ist die sogenannte MOIVREsche Formel.

Beweise:

Vorausgesetzt werden:

$$\cos(\varphi) = \cos(-\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = -\sin(-\varphi)$$

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi)$$

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi)\sin(\psi) - \sin(\varphi)\cos(\psi)$$

- Zu 1.:

$$r\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi) = \rho\cos(\psi) + \mathrm{i}\rho\sin(\psi)$$

$$r\cos(\varphi) = \rho\sin(\psi)$$

$$r\sin(\varphi) = \rho\sin(\varphi)$$

$$\rightarrow \varphi = \psi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Zu 2.:

$$\overline{z} = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) = \frac{z\overline{z}}{z} = \frac{r^2}{r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))} = \frac{r}{\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)} = r(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi))$$

- Zu 3.:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi))$$

- Zu 3.:

$$zw = r\rho(\underbrace{(\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)}_{\cos(\varphi+\psi)}) + \mathrm{i}(\underbrace{\sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi)}_{\sin(\varphi+\psi)})$$

- Zu 4.:
  - 1.Schritt:

    $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} 1 = 1,\ n = 0$ (wahr)

    a.) Voraussetzung: Formel für ein beliebiges $n \geq 0$

    b.) Behauptung: Formel für $n + 1$

    $$z^{n+1} = z^n z = r^n(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$$

    $$r^{n+1}(\cos((n+1)\varphi) + \mathrm{i}\sin((n+1)\varphi))$$

  - 2.Schritt:

    $n \in \mathbb{Z}, n < 0 \rightarrow n \in \mathbb{N}$

    $$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{r}(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)\right)^{-n} = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$$

Geometrische Übung:

Es ist zw zu konstruieren (ähnliche Dreiecke).
Gegeben sei $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Gesucht sind alle $u \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$. Jede Lösung dieser Gleichung heißt n-te Wurzel aus a.

$$\left.\begin{array}{l} a = |a|(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)), \alpha = \arg(a) \in [0, 2\pi) \\ z \text{ wird in Polarform zu } z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) \text{ gerechnet.} \end{array}\right\} r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi) = |a|(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha))$$

r und φ sind gesucht!

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a|}, n\varphi = \alpha + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k}{n}\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Satz:

Es seien $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Gleichung $z^n = a$ hat genau n verschiedene Lösungen und zwar:
$\sqrt[n]{a} = z_k = \frac{n}{|a|}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$, wobei $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ und $\alpha = \arg(a)$ ist.

Satz:

Es sei $a = |a|\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha) \in \mathbb{C} \neq 0$; $\alpha = \arg(a)$; $n \in \mathbb{N}$.
Die Zahlen $z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$ mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sind die (verschiedenen) Lösungen der Gleichung $z^n = a$. Die Zahlen z_k liegen auf dem Kreis um O mit dem Radius $\sqrt[n]{|a|}$. Sie bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks.

Beispiel:

$\sqrt[n]{1}:\ z^n = 1 \qquad |1| = 1,\ \arg(1) = 0$

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ mit } k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

Dies sind die n-ten Einheitswurzeln der Zahl 1.

Beispiel:

$z^3 = \mathrm{i} \qquad n = 3,\ a = -\mathrm{i},\ |-\mathrm{i}| = 1, \arg(-\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{2}$

$$\sqrt[3]{-\mathrm{i}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi\right) \text{ mit } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
z^2 + 2az + b &= 0 \qquad (a, b, \in \mathbb{C})\\
z^2 + 2az + a^2 &= a^2 - b\\
(z+a)^2 &= a^2 - b\\
z &= -a + \sqrt{a^2 - b}
\end{aligned}$$

Das sind **zwei** Zahlen.

$z^2 + 2z + 5 = 0$

$a = 1, b = 5 \qquad a^2 - b = -4$

$z = -1 + \sqrt{-4} = -1 + 2\sqrt{-1} = -1 \pm 2\mathrm{i}$

Verboten sind Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen!

Kapitel 4

Vektorrechnung

4.1 Der Vektorraum

Definition:

Die Menge $V (\neq \Phi)$ heißt **reeller (komplexer Vektorraum)**, wenn es im Vektorraum

1.) eine Verknüpfung „+“ gibt derart, daß $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist:

- $x + y = y + x$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $x + 0 = x$
- $x + (-x) = 0$

2.) eine Vorschrift gibt, die jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedem $x \in V$ eindeutig ein $\alpha x \in V$ zuordnet und die folgenden Gesetze erfüllt:

- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ mit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ x \in V$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ mit $\alpha \in \mathbb{R},\ x,\ y \in V$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x \in V$
- $1x = x$ für $x \in V$

Beispiele:

1. $F = \{f | f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}\}$

   $f, g \in F : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad x \in [0, 1]$

   $\alpha \in \mathbb{R}, f \in F : (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \qquad x \in [0, 1]$

2. $\mathbb{C}$ ist ein reeller Vektorraum:

   $w, z \in \mathbb{C} \qquad w + z \in \mathbb{C}$ genügt 1.)

   $\alpha \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \qquad \alpha \in \mathbb{C}$ genügt 2.)

   „Vektoren sind Elemente eines Vektorraums“. $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) in der Definition von V heißt **Skalarbereich**. Die Vorschrift unter 2.) heißt **skalare Multiplikation**.

3. $\mathbb{R}^n = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \xi_i \in \mathbb{R}\}$

$$\vec{x} = (\xi_i)_j)_j, \vec{y} = (\eta_j)_j : \vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \vdots \\ \xi_n + \eta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -\vec{x} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ -\xi_2 \\ \vdots \\ -\xi_n \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation: $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha\xi_1 \\ \alpha\xi_2 \\ \vdots \\ \alpha\xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{x} = \vec{y} \leftrightarrow \xi_j = \eta_i (j = 1, 2, \ldots, n)$

4.1.1 Geometrische Deutung ($n = 2$, 3)

$\mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$

Wähle kartesisches Koordinatensystem: Die gerichtete Strecke $\vec{OP}$ ist Bild für $\vec{x}$ und ebenso jede aus $\vec{x}$ durch Parallelverschiebung, hervorgehende Strecke.

Verschiebung von $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1 \\ \beta_2 - \alpha_2 \\ \beta_3 - \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$

Umgekehrt sei im $\mathbb{R}^3$ eine gerichtete Strecke gegeben: Wie wird $\vec{x}$ ein Tripel $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ zugeordnet?

$\xi_1 = \beta_1 - \alpha_1$
$\xi_2 = \beta_2 - \alpha_1$
$\xi_3 = \beta_3 - \alpha_1$

$\vec{a}, \vec{b}$ mit gleicher oder entgegengesetzter Richtung heißen kolinear.

4.1.2 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Definition:

V sei reeller Vektorraum. Ein Ausdruck der Form $\underbrace{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n}_{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j} \quad (\lambda_j \in \mathbb{R}, x_j \in V) \in V$ heißt Linearkombination (LK) der $x_1, \ldots, x_n$.

Definition:

$x_1,x_2,\ldots,x_n \in V$ heißen **linear unabhängig**, falls aus $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j = 0$ folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Sind die $x_1,x_2,\ldots,x_n$ nicht linear unabhängig, so heißen sie **linear abhängig**, d.h. es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2 \neq 0$ und $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j - x_j = 0$.

Beispiel aus $\mathbb{R}^2$:

Es ist zu zeigen, daß folgende Vektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

Es muß also gelten:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix}2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3\\ + \lambda_2 + 2\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Damit folgt die Lösung:

$$\lambda_2 = -2\lambda_3$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda_3$$

$$\lambda_3 = 1$$

Also sind die Vektoren linear abhängig.

Übung:

$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

Sätzchen:

$\vec{a}, \vec{b}$ sind kollinear. $\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}$ sind **linear abhängig**.
$\vec{a} = \lambda\vec{b} \Leftrightarrow 1\vec{a} + (-\lambda)\vec{b} = \vec{o}$

Beweis:

„ $\Leftarrow$“ $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=\vec{o}$ mit $\lambda_1 \neq 0 \rightarrow \vec{a_3} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{b}$

Damit sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear.

$\mathbb{R}^3 = \{\vec{x} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}\}$

$\vec{x} = (\xi_i), \vec{y} = (y_j) : \vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix}\xi_1+\eta_1\\ \xi_2+\eta_2\\ \xi_3+\eta_3\end{pmatrix}, \lambda\vec{x} = \begin{pmatrix}\lambda\xi_1\\ \lambda\xi_2\\ \lambda\xi_3\end{pmatrix} (\lambda in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3 \text{ kolinear: } \vec{a}\|\vec{b} \quad &\leftrightarrow \vec{a},\vec{b} \text{ sind linear abhängig.}\\ &\leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1-\alpha_1\\ \beta_2-\alpha_2\\ \beta_3-\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}$$

Vektoren: Kraft, Geschwindigkeit, elektrisches Feld **Skalare**: Temperatur, Masse

4.1.3 Geraden

Gegeben sei ein Punkt A in $\mathbb{R}^3$ und eine Richtung $\vec{m}(\neq\vec{o})$

g : $\vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{m} \qquad t\in\mathbb{R}\,(\vec{x}:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^3)$

Wir suchen die **Parameterdarstellung** der Geraden g durch A mit der Richtung $\vec{m}$. Dazu betrachten wir eine Gerade durch 2 Punkte A und B:

$\vec{m} = \vec{b} - \vec{a}$

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a}), t\in\mathbb{R}\\ &= \vec{b} + t(\vec{b}-\vec{a}), t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Beispiel:

Im Parallelogramm schneiden sich die Diagonalen in dem Punkt, der beide Diagonalen halbiert.

$\vec{x} = t(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{b} + \tau(\vec{a}-\vec{b})$

$(t-\tau)\vec{a} + (t-1+\tau)\vec{b} = \vec{o}$

Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{r} t-\tau=0\\ \underline{t-1+\tau=0}\\ t=\tau\\ 2\tau=1\end{array}$$

$\Rightarrow \tau = t = \frac{1}{2}$

4.1.4 Ebenen

Gegeben sei ein Punkt A mit $\vec{a}$ und 2 Richtungen $\vec{u}, \vec{v}$ (linear unabhängig).

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v} \qquad s, t \in \mathbb{R} \\ &= \vec{x}(s,t) \end{aligned}$$

$$\vec{x} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$$

Gesucht ist die Parameterdarstellung der Ebene durch A, die von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird. Gegeben seien 3 Punkte A, B, C mit den Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. (A, B, C liegen nicht auf einer Geraden.) $\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{c} - \vec{a}$ sind Vektoren (in der Ebene), welche die Ebene aufspannen.

$$\vec{x}(s,t) = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a}) \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Für jedes Paar $s, t \in \mathbb{R}$ ist das der Ortsvektor eines Punktes der Ebene.

4.2 Skalarprodukt zweier Vektoren $\in \mathbb{R}^3$ (Länge/Winkel zwischen Vektoren)

Wähle kartesisches Koordinatensystem:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

Die Länge von $\overrightarrow{OP}$ (von $\vec{x}$) – man bezeichnet diese auch als Norm von $\vec{x}$ – ist folgendermaßen definiert:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

Außerdem besitzt sie folgende Eigenschaften:

- $\|\lambda\vec{x}\| = \|\lambda\|\|\vec{x}\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\|\vec{x}\| > 0$ ($\vec{x} \neq \vec{o}$)
- $\|\vec{x}\| = 0 \leftrightarrow \vec{x} = \vec{o}$
- $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Es sei $\vec{x} = (\xi_j)$ und $\vec{y} = (\eta_j)$. Dann definiert man das Skalarprodukt (inneres Produkt) zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ folgendermaßen:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := \sum_{j=1}^{3} \xi_j \eta_j = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$$

Man findet in Büchern verschiedene Bezeichnungen für das Skalarprodukt: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $[\vec{x}, \vec{y}]$, $(\vec{x}, \vec{y})$. Dieses besitzt nun folgende **Eigenschaften**:

1.) $\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$ für $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$; $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$ nur für $\vec{x} = \vec{o}$

2.) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

3.) $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \cdot \vec{z} = \alpha\vec{x}\vec{z} + \beta\vec{y}\vec{z}$ für (α, $\beta \in \mathbb{R}$; $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$)

Die Länge der Strecke PQ berechnet sich durch:

$$\vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} \xi_1 - \eta_1 \\ \xi_2 - \eta_2 \\ \xi_3 - \eta_3 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} (\xi_j - \eta_j)^2}$$

Das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ läßt sich geometrisch interpretieren. Dazu betrachten wir ein Parallelogramm mit den Seiten $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} - \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 4\vec{x} \cdot \vec{y} \rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} \leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \vec{e'} = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$$

$$0 = (\vec{e'} - \lambda \vec{e}) \cdot \vec{e} = \vec{e'} \cdot \vec{e} - \lambda \vec{e} \cdot \vec{e}$$

$$\cos\varphi = \lambda = \vec{e} \cdot \vec{e'}$$

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \cos\varphi \qquad \vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\rho}{\|\vec{y}\|} \Rightarrow \rho = \|\vec{y}\| \cos\varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|}$$

Hat $\vec{x}$ die Länge 1, so gibt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ die Länge der orthogonalen Projektion von $\vec{y}$ auf $\vec{x}$ an.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} : \vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \eta_j = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos\varphi$$

Definition:

V sei Vektorraum:

1.) 0 ist linear abhängig: $\lambda 0 = 0$ z.B. für $\lambda = 1$

2.) $x_1, x_2, \ldots, x_k$ seien linear unabhängig. Dann ist $x_1, x_2, \ldots, x_l$ $(l \leq k - 1)$ linear unabhängig.

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \ldots + \lambda_l x_l + 0 x_l + \ldots + 0 x_k = 0 \rightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_l = 0$$

3.) $x_1, \ldots, x_k \in V$: $x_1, \ldots, x_l$ seien linear abhängig $(l \leq k - 1) \rightarrow x_1, \ldots, x_s$ sind linear abhängig $(l \leq k)$
Begründung: Widerspruchsbeweis und 2.)

4.) $x_1, \ldots, x_k \in V$ mit $x_1 = 0 \rightarrow x_1, \ldots, x_k$ sind linear abhängig.

5.) 3 Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$, die in einer Ebene liegen, sind linear abhängig.

Beweis zu 5.):

Es seien $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear abhängig.

$$\Rightarrow \vec{x}(s,t) = \vec{x}_0 + s\vec{b} + t\vec{c}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{x}(s,t) - \vec{x}_o}_{\vec{a}} = s\vec{b} + t\vec{c}$$

$$\vec{a} = s_0 \vec{b} + t_0 \vec{c}$$

Anwendungen:

1.) Höhen in einem Dreieck:

Die drei Höhen in einem Dreieck schneiden sich in einem Punkt. Zu zeigen ist $\vec{h} \perp \vec{a} - \vec{b}$. $\vec{h}$ kann folgendermaßen dargestellt werden:

$\vec{h} = \vec{a} + \lambda \vec{b}^{\perp} = \vec{b} + \gamma \vec{a}^{\perp}$

Damit ergibt sich durch Multiplikation mit $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{h} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{h} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \end{array}\right\} \vec{h} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

2.) Hesseform:

Wir wollen die Hesse-Normalform für Gerade g (im $\mathbb{R}^2$) und Ebene E (im $\mathbb{R}^3$) herleiten.

a.) Gerade g:
Wähle $\vec{n} \perp \vec{m}$. Daraus folgt $\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$ für jeden Ortsvektor von g. $\vec{x} \cdot \vec{n} = \alpha$ ist die Hesse-Normalform für g (Geradengleichung), falls $\|\vec{n}\| = 1$ und $\vec{n}$ von 0 zu g gerichtet ist.

b.) Ebene E:
Wähle $\vec{n} \perp \vec{u}$ und $\vec{v}$. Dann ist $\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n} = \alpha$ Hesse-Normalform der Ebene.

Satz:

$g(E)$ seien in Hesse-Normalform $\vec{x} \cdot \vec{n} = \alpha$ gegeben. Betrachte für $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ die Funktion $d(\vec{y}) := \vec{y} \cdot \vec{n} - \alpha$ ($d : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$. Dann gelten:

1.) $d(\vec{y}) = 0 \leftrightarrow \vec{y}$ ist der Ortsvektor eines Punktes auf $g(E)$.

2.) Liegen $\vec{y}$ und $\vec{o}$ auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{verschiedenen} \\ \text{gleichen} \end{array} \right\}$ Seiten von $g(E)$, so gibt $\left\{ \begin{array}{c} d(\vec{y}) \\ -d(\vec{y}) \end{array} \right\}$ den Abstand von $\vec{y}$ zu $g(E)$ an.

Im kartesischen Koordinatensystem sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ gegeben.

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \xi_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + \xi_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} + \xi_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_3} = \xi_1 \vec{e}_1 + \xi_2 \vec{e}_2 + \xi_3 \vec{e}_3$$

Hierbei gilt $\delta_{jk} = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k$ für $j = 1, 2, 3$. Das Kroneckersymbol δ_{jk} ist dabei folgendermaßen definiert:

$$\delta_{jk} := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{array} \right.$$

Aus $\vec{x} = \xi_1 \vec{e}_1 + \xi_2 \vec{e}_2 + \xi_3 \vec{e}_3$ folgt $\xi_j = \vec{x} \cdot \vec{e}_j$ für $j = 1, 2, 3$.

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \vec{e}_j \text{ und } \vec{y} = \sum_{j=1}^{3} \eta_k \vec{e}_k \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{j,k=1}^{3} \xi_j \eta_k \cdot \underbrace{\vec{e}_j \vec{e}_k}_{\delta_{jk}} = \sum_{k=1}^{3} \xi_j \eta_j$$

Für eine **Ebene** gilt beispielsweise:

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \alpha \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} : xn_1 + yn_2 + zn_3 = \alpha \qquad xn_1 + yn_2 = \alpha$$

4.3 Vektorprodukt (im $\mathbb{R}^3$)

Definition:

Zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ wird der Vektor $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$ wie folgt zugeordnet:

1.) $\vec{p} \perp \vec{a}$ und $\vec{p} \perp \vec{b}$

2.) $\varphi = \text{Winkel}(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, 2\pi]$, $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin\varphi$

3.) Im Falle $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{o}$ bilden $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem.

Auch für Anwendungen: Bwg/Haf/Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure (5 Bände), 2. Band

4.3.1 Eigenschaften des Vektorproduktes

1. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
3. $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos^2\varphi = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$
4. $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ = Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
5. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ seien Rechtssystem:
   Volumen dieses Parallelepipeds (Spats):
   $$V = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \underbrace{\text{Höhe } h}_{\|\vec{c}\| \cos\gamma} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit

1.) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$

2.) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\varphi(\vec{a}, \vec{b})$

3.) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem.

4.) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ = Flächeninhalt eines Parallelogramms

5.) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$

6.) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =: (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ Spatprodukt

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

$-(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem, wenn $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$ ist.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \delta_{jk} : \vec{x} = \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{e}_1)}_{\delta_1} \vec{e}_1 + \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{e}_2)}_{\delta_2} \vec{e}_2 + \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{e})}_{\delta_3} \vec{e}_3$$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ und $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1$ und $\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ bilden ein Rechtssystem.

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$

$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$

$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$

7.) Weitere Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \\ (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{array}\right\} \to (\lambda\vec{a} + \gamma\vec{b}) \times \vec{c} = \lambda\vec{a} \times \vec{c} + \gamma\vec{b} \times \vec{c}$$

$\lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c})$

$[\lambda(\vec{a} \times \vec{b})] \cdot \vec{c} = [(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}] \cdot \vec{c}$

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{b}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$

$(\vec{a}, \vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}_2, \vec{c})$

$(\vec{a}, \vec{b}_1\vec{c}_1 + \vec{c}_2) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2)$

Übung:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \underbrace{\lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a})}_{=0} + \underbrace{\mu(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b})}_{=0}$$

8.) $\vec{a}, \vec{b}$ sind linear abhängig $\leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$

„ $\rightarrow$ “ $\vec{a} = \lambda\vec{b} \to \vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{o}$

„ $\leftarrow$ “ $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\varphi = 0 \to \varphi = 0, \pi \to \vec{a}, \vec{b}$ sind kolinear!

9.) Entwicklungssatz

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Diese Formel nennt man auch Grassmann-Identität. Wir finden einen geometrischen Beweis auf Seite 93f im Skript. Wir benötigen:

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$

$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$

$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

$\vec{a} \times \vec{b}$ in Koordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \vec{e}_j\right) \times \left(\sum_{k=1}^{3} \beta_k \vec{e}_k\right) = \sum_{j,k=1}^{3} (\alpha_j \beta_k \vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \sum_{j \neq k}^{3} (\alpha_j \beta_k \vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \\ &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{e}_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\vec{e}_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\vec{e}_3 = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10.) Jakobi-Identität

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{o}$ mit 10

11.) Lagrange-Identität

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{a}\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})] = \vec{a}\cdot[(\vec{b}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}] = (\vec{a}\cdot\vec{c}(\vec{b}\cdot\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

12.) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}\vec{c}-(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\vec{d} = (\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$

$$(\vec{c}\times\vec{d})\times(\vec{c}\times\vec{b}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b})\vec{a}-(\vec{c},\vec{d},\vec{a})\vec{b}$$

$$-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}+(\vec{c},\vec{d},\vec{b})\vec{a}+(\vec{d},\vec{c},\vec{a})\vec{b}+(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}=0\text{bzw.}\ +\underbrace{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}_{\alpha\neq 0}\vec{d} = \underbrace{(\vec{c},\vec{d},\vec{b})}_{\beta\neq 0}\vec{a}+\underbrace{(\vec{d},\vec{c},\vec{a})}_{\gamma\neq 0}\vec{b}+\underbrace{(\vec{a},\vec{b},\vec{d})}_{\delta\neq 0}\vec{c}=0$$

Satz:

> Je vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}\in\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig.

Beweis:

Wir können annehmen, daß je drei dieser Vektoren linear unabhängig sind.

$\Rightarrow \alpha\neq 0, \beta\neq 0, \gamma\neq 0, \delta\neq 0$

$$\vec{d} = \frac{\beta}{\alpha}\vec{a}+\frac{\gamma}{\alpha}\vec{b}+\frac{\delta}{\alpha}\vec{c}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix},\ \vec{c}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}:\ (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\\ \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1\beta_2\gamma_3+\alpha_2\beta_3\gamma_1+\alpha_3\beta_1\gamma_2-\alpha_2\beta_1\gamma_3-\alpha_3\beta_2\gamma_1-\alpha_1\beta_3\gamma_2$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b})$$

Satz:

> $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind linear abhängig. $\Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$

Beweis „⇒“:

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c} = \vec{o}$ mit $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$

$|\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\qquad \alpha(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$

$|\cdot(\vec{c}\times\vec{a})\qquad \beta(\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = 0 = \beta(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

$|\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\qquad \gamma(\vec{a},\vec{a},\vec{b}) = 0 = \gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

Beweis „⇐“:

$\|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot\|\vec{c}\|\cdot\cos\varphi(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}) = 0$

a.) $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \xrightarrow{8} \vec{a}$, $\vec{b}$ sind linear abhängig. $\Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind linear abhängig!

b.) $\vec{c} = \vec{o} \Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind linear abhängig!

c.) $\vec{a}\times\vec{c}\perp\vec{c} \Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ liegen in einer Ebene. $\Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind linear abhängig!

Nachtrag:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} \xi_j \eta_j \overset{n=3}{=} \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\varphi$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$

1.) SCHWARZ-Ungleichung:

$$\boxed{\left|\sum_{j=1}^{3} \xi_j \eta_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{3} \eta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

2.) Dreiecksungleichung:

$$\boxed{\|\vec{x}\pm\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|}$$

Übung:

Beweis mit SCHWARZ-Ungleichung
Für x, $b \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ läßt sich eine ϵ-Umgebung von b definieren durch $|x-b| < \epsilon \leftrightarrow b-\epsilon < x < b+\epsilon$. Gleichzeitig definieren wir für $c \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$ eine ϵ-Umgebung von c nach $\{x|x-c| < \epsilon\}$. Für $x \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt die BERNOULLI-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$. Sind a und $b > 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $na \geq b\ \forall\ n \geq n_0$. Zu jedem $x > 0$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{x}{n} \leq \epsilon\ \forall\ n \geq n_0$. Für $x > 0$, $\epsilon > 0$ gilt $\frac{x}{n} \leq \epsilon$ für fast alle n.

Satz:

Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.

Definition:

Fast alle natürlichen Zahlen sind alle bis auf endlich viele.

- Aussage 1:
  Es sei $a > 1$ und $b > 0$ gegeben. Dann gilt $a^n \geq b$ für fast alle n.

  $a = 1 + \underbrace{a-1}> 0$

  $a^n = (1+\underbrace{a-1}>0)^n \geq 1 + n(a-1) > n\underbrace{(a-1)}_{>0} \geq b$ für fast alle n

- Aussage 2:
  Es sei $\epsilon > 0$ und $0 < q < 1$. Dann gilt $q^n \leq \epsilon$ für fast alle n.

Übung:

Setze bei Aussage 1 $a = \frac{1}{q}$, $b = \frac{1}{\epsilon}$.

Kapitel 5

Zahlenfolgen

5.1 Grenzwerte

Definition:

Eine Zahlenfolge ist eine Funktion $f_{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{C}$. Für $f(n)$ schreibt man a_n (Folgenglieder). Anstelle von f wird geschrieben: $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$. (a_n) sei eine reelle Zahlenfolge:

- (a_n) ist monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $(a_n) \leq a_{n+1}\ \forall\ n$
- (a_n) ist streng monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $(a_n) < a_{n+1}\ \forall\ n$
- (a_n) ist monoton fallend $\Leftrightarrow$ $(a_{n+1}) \leq a_n\ \forall\ n$
- (a_n) ist streng monoton fallend $\Leftrightarrow$ $(a_{n+1}) < a_n\ \forall\ n$
- (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, falls es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq K\ \forall\ n$
- (a_n) heißt **nach unten beschränkt**, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $M \leq a_n\ \forall\ n$
- (a_n) ist **nicht nach oben beschränkt**, falls es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein a_n mit $K \leq a_n$ gibt.
  (... falls es unendlich viele a_n mit $K \leq a_n$ gibt.
- Die Zahlenfolge (a_n) heißt **beschränkt**, falls es ein $S > 0$ gibt mit $|a_n| \leq S$

Beispiele:

1.) a_n: $a_n = (-1)^n \qquad -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

2.) $$a_n = \mathrm{i}^n \begin{cases} 1 & n = 4k \\ \mathrm{i} & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ -\mathrm{i} & n = 4k+3 \end{cases} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

3.) $a_n = n(-1)^n$

4.) $a_n = 2 \qquad 2, 2, 2, \ldots$

5.) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

Diese Folge ist streng monoton fallend und beschränkt.

6.) $a_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k}$

Die einzelnen Folgenglieder stellen die harmonische Reihe dar.

$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}, \ldots$

7.) $a_n = \frac{n}{2^n}\mathrm{i}$

$a_1 = \frac{1}{2}\mathrm{i},\ a_2 = \frac{1}{2}\mathrm{i},\ a_3 = \frac{3}{8}\mathrm{i}, \ldots$

Die Folge ist beschränkt für $n \geq 3$ $(2^n > n)$.

8.) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + d$: $a_1 = 1,\ a_2 = 1 + d,\ a_3 = 1 + 2d$: $a_n = 1 + (n-1)d$ für $n = 1, 2, \ldots$

9.) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = qa_n$: $a_1 = 1,\ a_2 = q,\ a_3 = q^2, \ldots, a_n = q^{n-1}$ für $n = 1, 2, \ldots$

10.) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$: $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{n-1}}}}$

11.) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$: $a_2 = \sqrt{2},\ a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{2}},\ a_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}$

12.) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n = 3, 4, \ldots$

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_8 = 8, \ldots$

14.) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & n = 2k - 1 \\ 1 - \frac{1}{k} & n = 2k \end{cases}$

Definition:

Die Zahl $c \in \mathbb{C}$ heißt **Häufungspunkt** (HP) der Folge (a_n), falls für jedes $\epsilon > 0 |a_n - c| < \epsilon$ für unendlich viele n gilt.

Definition:

Eine reelle nicht nach oben (nicht nach unten) beschränkte Folge hat den uneigentlichen Häufungspunkt $+\infty$, $(-\infty)$. Jede reelle Zahl ist Häufungspunkt der rationalen Zahlen.

5.1.1 Satz von Bolzano-Weierstrass

Jede reelle Folge besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis:

1. Ist die Folge nicht beschränkt, so hat sie den Häufungspunkt $+\infty$ (oder $-\infty$).
2. Es sei (a_n) beschränkt $|a_n| \leq S\,\forall\, n$

Betrachte $M = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a_n$ für unendlich viele $n\}$

1. $M \neq \Phi$
2. nach oben beschränkt

1. $-S \in M$
2. $S + 1$ ist obere Schranke von

$\Rightarrow H = \sup(M)$
Es sei $q \in \mathbb{C}$: $a_n = q^n$. a_n konvergiert für $|q| < 1$ und $q = 1$, divergiert für $|q| = 1$ (außer $q = 1$) und $|q| > 1$. Betrachten wir außerdem $\lambda \in \mathbb{C}$: Die Folge $a_n = \frac{\lambda}{n}$ geht gegen 0 für $n \mapsto \infty$.
Es gilt $\lim_{n\mapsto\infty} a_n = g$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ derart gibt, daß aus $n \geq N(\epsilon)$ folgt: $|a_n - g| < \epsilon$. Falls für jedes $\epsilon > 0$ $|a_n - g| < \epsilon$ gilt für fast alle a_n. Konvergenz bedeutet, daß die Folge beschränkt ist und genau ein Häufungspunkt vorliegt.

Satz:

(a_n) monoton wachsend, nach oben beschränkt. Dann konvergiert (a_n).

Beispiel:

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \mapsto 1 \text{ für } n \mapsto \infty$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

(a_n) ist monoton wachsend. Außerdem zeigen wir, daß die Folge beschränkt ist:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

(a_n) ist somit konvergent.

5.2 Teilfolge

Es sei die Folge (a_n) gegeben mit den Folgengliedern a_1, a_2, a_3, ... Betrachte Folge von natürlichen Zahlen n_1, n_2, n_3, ... mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Es sei $b_j := a_{n_j}$. Dann stellt (b_j) eine Teilfolge von (a_n) dar.

Beispiele:

$$\left.\begin{array}{l} n_j = 2j \\ n_j = 2j - 1 \\ n_j = 2^j \end{array}\right\} n_j \geq j$$

Satz:

(a_n) sei konvergent. $a_n \mapsto g$ $(n \mapsto \infty)$. Es gilt:
Jede Teilfolge konvergiert und zwar gegen g. Gibt es **eine** divergente Teilfolge, so divergiert die Ausgangsfolge.

Die Voraussetzung besagt: Für jedes $\epsilon > 0$ gilt: $|a_n - g| < \epsilon$ für $n \geq N(\epsilon)(= n_0)$. (a_{n_k}) sei Teilfolge. Sei $\epsilon > 0$: $|a_n - g| < \epsilon$ für $k \geq N$ $(\mapsto n_k$ für $k \geq N)$

5.2.1 Die harmonische Reihe

Die harmonische Reihe ist divergent:

$$(s_n) : s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Des weiteren gilt:

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} \, n = 1, 2, \ldots$$

Die Teilfolge (S_{2^n-1}) ist unbeschränkt, divergiert also.

Satz:

„Fast alle Glieder einer Teilfolge sind unendlich viele Glieder der Ausgangsfolge“. (a_n) sei eine Folge. Ist H ein Häufungspunkt von (a_n), so gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$, die gegen H konvergiert. Das heißt: $|a_n - H| < \epsilon$ für fast alle k, das sind unendlich viele (a_n).

$$|a_n - H| < 1$$

$$n_2 > n_1 : a_{n_2} - H| < \frac{1}{2}$$

$$n_3 > n_2 : a_{n_3} - H| < \frac{1}{3}$$

$$a_{n_1},\, a_{n_2},\, a_{n_3},\, \ldots \text{ mit } |a_{n_k} - H| < \frac{1}{k} \text{ mit } k = 1,\, 2,\, \ldots$$

Übung:

$a_{n_k} \mapsto H(k \mapsto \infty)$

Jede reelle Zahl ist Häufungspunkt rationaler Zahlen. Jede reelle Zahl ist Grenzwert rationaler Zahlen.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \mapsto \mathrm{e}$$

Satz:

(a_n), (b_n) seien konvergent: $a_n \mapsto a$ $(n \mapsto \infty)$, $b_n \mapsto b$ $(n \mapsto \infty)$. Es gelte: $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $a \leq b$.

Falsch ist: $a_n < b_n$ für fast alle $n \rightarrow a < b$.

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \mapsto 0$$

Satz:

(a_n), (c_n) seien konvergente Folgen mit demselben Grenzwert g. (b_n) sei Folge mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle n. Dann konvergiert (b_n) und es gilt $b_n \mapsto g$ $(n \mapsto \infty)$.

$g - \epsilon < a_n < g + \epsilon, g - \epsilon < c_n < g + \epsilon$ für fast alle n.

$g - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < g + \epsilon$ für fast alle$n$.

Satz:

$a_n \mapsto g$ $(n \mapsto \infty)$ und $b_n \mapsto b$ $(n \mapsto \infty)$. Dann konvergieren die Folgen $(a_n \pm b_n)_n$, $(\lambda a_n)_n$, $(a_n b_n)_b n$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ $(b_n \neq 0, b \leq 0)$ $(|a_n|)_n$, $(\sqrt{a_n})_n$, $(a_n \geq 0)$, $(a_n^k)_n$ $(k \in \mathbb{N})$ und zwar gegen:

$\boxed{a_n \pm b_n \mapsto a \pm b}$ $\boxed{|a_n| \mapsto |a|}$

$\boxed{\lambda a_n \mapsto \lambda a}$ $\boxed{\sqrt{a_n} \mapsto \sqrt{a}}$

$\boxed{a_n b_n \mapsto ab}$ $\boxed{a_n^k \mapsto a^k}$

$\boxed{\frac{a_n}{b_n} \mapsto \frac{a}{b}}$

Beweis für $a_n^k \mapsto a^k$:

$a_n^k \mapsto a^k (n \mapsto \infty); k = 1, 2, \ldots$

Wir führen den Beweis durch Vollständige Induktion:

1.) Induktionsanfang:

Für $k = 1$ ist die Aussage wahr (Voraussetzung im Satz).

2.) Induktionsschluß:

Es gilt für ein beliebiges $k \geq 1$:

$a_n^k \mapsto a^k$ für $n \mapsto \infty$

- Induktionsvoraussetzung:

  $a_n^k \mapsto a^k$ für $n \mapsto \infty$

- Induktionsbehauptung:

  $a_n^{k+1} \mapsto a^{k+1}$ für $n \mapsto \infty$

3.) Induktionsbeweis:

$$|a_n^{k+1} - a^{k+1}| = |a_n^{k+1} \underbrace{-a_n a^k + a_n a^k}_{=0} - a^{k+1}| = |a_n(a_n^k - a^k) + a^k(a_n - a)| \leq \underbrace{|a_n|}_{\leq C} \underbrace{|a_n^k - a^k|}_{\mapsto 0 (n \mapsto \infty)} + |a^k| \underbrace{|a_n - a|}_{\mapsto 0} |$$

Beispiele:

- 1.Beispiel:

  Bei den folgenden (a_n), (b_n) und (c_n) handelt es sich allesamt um **Nullfolgen**:

  $\boxed{a_n = \frac{1}{n} \mapsto 0 \text{ für } n \mapsto \infty}$

  $\boxed{b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \mapsto 0 \text{ für } n \mapsto \infty}$

  $\boxed{c_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \mapsto 0 \text{ für } n \mapsto \infty}$

- 2.Beispiel:

$$\boxed{a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

Wir verwenden zur Umformung die 3.binomische Formel und schätzen geschickt ab:

$$0 \leq a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Damit resultiert für den Grenzwert:

$$\lim_{n \mapsto \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0 \qquad \text{„}(\infty - \infty)\text{“}$$

- 3.Beispiel:

Wir untersuchen die Folge $\boxed{a_n = n - \sqrt{n}}$ auf Konvergenz. Dazu formen wir diese zunächst um und schätzen anschließend ab:

$$a_n = n - \sqrt{n} = \sqrt{n}\underbrace{\left(\sqrt{n} - 1\right)}_{\geq 0} \geq \sqrt{n}$$

Da $\sqrt{n}$ für $n \mapsto \infty$ divergent ist, ist somit auch (a_n) divergent.

- 4.Beispiel:

$$\boxed{a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}}}$$

Wir formen die Folge um und bilden den Grenzwert für $n \mapsto \infty$:

$$a_n = \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n \mapsto \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1$$

Damit ist (a_n) konvergent für $n \mapsto \infty$ und besitzt den Grenzwert 1.

- 5.Beispiel: Der Grenzwert folgender Folge soll berechnet werden:

$$\boxed{a_n = (1 + (-1)^n)^n}$$

Hierbei muß man zwischen geradem und ungeradem n unterscheiden:

1.) n sei gerade:

$$a_{2n} = (1 + (-1)^{2n})^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} = 4^n$$

$$\lim_{n \mapsto \infty} a_{2n} = \lim_{n \mapsto \infty} 4^n = \infty$$

$$\boxed{\limsup = \infty}$$

2.) n sei ungerade:

$$a_{2n+1} = (1 + (-1)^{2n+1})^{2n+1} = (1-1)^{2n+1} = 0^{2n+1} = 0$$

$$\boxed{\liminf = 0}$$

$$\boxed{\liminf \neq \limsup}$$

Daraus folgt, daß die Folge keinen Grenzwert besitzt.

6.Beispiel: Wir betrachten die Folge:

$$\boxed{a_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)}$$

Zur Berechnung des Grenzwertes nehmen wir einige Umformungen vor:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k-1)}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n} k+1}{\prod\limits_{k=2}^{n} k}\cdot\frac{\prod\limits_{k=2}^{n} k-1}{\prod\limits_{k=2}^{n} k} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{k=3}^{n+1} k}{\prod\limits_{k=2}^{n} k}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} k}{\prod\limits_{k=2}^{n} k} = \frac{(n+1)\cdot\prod\limits_{k=3}^{n} k}{2\cdot\prod\limits_{k=3}^{n} k}\cdot\frac{1\cdot\prod\limits_{k=2}^{n-1} k}{n\cdot\prod\limits_{k=2}^{n-1} k} = \frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Nun können wir den Grenzwert berechnen:

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

7.Beispiel:

Folgende Folge sei gegeben:

$$\boxed{a_n = \frac{\binom{n}{2}+(-1)^n\cdot\frac{n^2}{2}}{n+3}}$$

Wir formen um:

$$a_n = \frac{\binom{n}{2}+(-1)^n\cdot\frac{n^2}{2}}{n+3} = \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}+(-1)^n\cdot\frac{n^2}{2}}{n+3} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}+(-1)^n\frac{n^2}{2}}{n+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2(1+(-1)^n)-n}{n+3}$$

Nun ergibt sich für den Grenzwert:

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2(1+(-1)^n)-n}{n+3} = \lim_{n\mapsto\infty}\frac{1}{2}\frac{1+(-1)^n-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}$$

- n sei gerade:

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{1}{2}\frac{1+1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{2}\frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = \boxed{\infty}$$

- n sei ungerade:

$$\lim_{n\mapsto\infty}\frac{1}{2}\frac{-n}{n+3} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Die beiden Häufungspunkte lauten somit:

$$\boxed{\limsup = \infty, \liminf = -\frac{1}{2}}$$

Da $\limsup \neq \liminf$ existiert kein Grenzwert der Folge.

Kapitel 6

Reihen

Definition:

(a_n) sei Zahlenfolge: Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist die Folge der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ mit $n = 1, 2, \ldots$.
Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls die Folge (s_n) konvergiert. Gilt $s_n \mapsto s$ $(n \mapsto \infty)$, so schreibt man $\sum\limits_{k=1}^{\infty} = s = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. s heißt Wert der Reihe.

Beispiel: Geometrische Reihe:

Es sei $q \in C$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k : s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \mapsto \frac{1}{1-q} \text{ für } n \mapsto \infty \text{ und } |q| < 1)$$

Für $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$$0,\overline{9} = 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + \ldots = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k - 1\right) = 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1\right) = 9 \left(1\frac{1}{9} - 1\right) = 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}; \; (1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k, n \in \mathbb{N}$$

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$ ist konvergent mit dem Wert s, falls die Folge (s_n): $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ gegen s konvergiert. Konvergiert die Folge (s_n) nicht, so heißt die Reihe divergent.

Beispiele:

- Harmonische Reihe:

  $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

Dies wollen wir mittels eines Widerspruchbeweises zeigen. Angenommen, die Reihe ist konvergent und habe den Grenzwert s:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \mapsto s$$

Außerdem gilt

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}_{>\frac{1}{3}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}}_{>\frac{1}{n}} \mapsto s\,(n \mapsto \infty)$$

Somit folgt nun:

$$s_{2n} > s_n + \frac{1}{2} \xrightarrow[n\mapsto\infty]{} s \geq s + \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{2}$$

Dies ist ein Widerspruch, die Reihe ist also divergent.

- Geometrische Reihe:

  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist konvergent mit dem Wert $\frac{1}{1-q}$, falls $|q| < 1$ ist.

  $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ ist konvergent.}$$

  $$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \underbrace{q^0}_{=1} + q^1 + q^2 + \ldots |q| < 1$$

Übung (ehemalige Klausuraufgabe):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n$$

0^0 ist unbestimmt.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots$$

$$(a_n) : (|a_n| \mapsto 0\,(n \mapsto \infty)) \leftrightarrow (a_n \mapsto 0(n \mapsto \infty)) \qquad |a_n| = ||a_n|| \mapsto 0\,(n \mapsto \infty)$$

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \ldots$$

Es gilt $s_n < s_{n+1}$, damit ist (s_n) monoton steigend.

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \underbrace{\frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}}_{\frac{1}{2^2}} + \underbrace{\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}_{\frac{1}{2^3}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n}}_{\frac{1}{2^{n-1}}} < 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k < 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3$$

Das heißt, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist konvergent mit dem Grenzwert e, wobei feststeht, daß $\frac{5}{2} < \mathrm{e} < 3$ sein muß.

Beispiel:

Es sei $c > 0$ fest.

$\lim\limits_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{c} = 1$

Es gilt bekanntlich:

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ für } x_1 > 0,\, x_2 > 0$$

Dies ist ein Spezialfall der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischen Mittel, welche als Übung gezeigt werden kann:

$$\boxed{\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \text{ für } x_j > 0}$$

- 1.Fall: $c > 1$

  $$\sqrt[n]{c \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1}} \leq \frac{c + (n-1)}{n} = \frac{c}{n} + 1 - \frac{1}{n}$$

  $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{c} = 1, c \geq 1$

- 2.Fall: $c < 1$

  $$\sqrt[n]{\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}} \mapsto 1 \text{ für } n \mapsto \infty : \sqrt[n]{c} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{c}}} \mapsto 1 \text{ für } n \mapsto \infty$$

  Für $a_n > 0$ gelte $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K$ für fast alle $n \geq \mathbb{N}$.

Aufgabe:

$a_n \leq K^{n-N} a_N$ für $n \geq N$

Man kann dies durch vollständige Induktion beweisen:

1.) Induktionsanfang: $n = N$ für $a_N \leq a_N$

2.) Induktionsschluß:

   - Induktionsvoraussetzung:

     $a_n \leq K^{n-N} a_N$ für $n \geq N$

   - Induktionsbehauptung:

     $a_{n+1} \leq K^{n+1-N} a_N$

     $a_{n+1} \leq K a_n \leq K K^{n-N} a_N$

     $\sqrt[n]{a_n} \leq K \sqrt[n]{K^{-N} a_N}$

Satz:

Es sei $a_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \leq \underbrace{\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}}_{\alpha}$$

Für $\alpha < \infty$ gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underbrace{\alpha + \epsilon}_{K}$ für $n \geq N$ und $\sqrt[n]{a_n} \leq (\alpha + \epsilon) \sqrt[n]{(\alpha+\epsilon)^{-N} a_n}$.

$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha + \epsilon \, \forall \, \epsilon > 0 \rightarrow \limsup \sqrt[3]{a_n} \leq \alpha$

Satz (Folgerung aus vorhergehendem Satz):

Sei (a_n) eine Folge positiver Zahlen und existiert $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, dann existiert $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{a_n}$ und beide Grenzwerte sind gleich.

Beispiele:

$$\lim_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{n} = 1 : a_n = n, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \mapsto 1$$

$$\lim_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty : a_n = n! : \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \mapsto \infty \text{ (bestimmt divergent)}$$

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}; \lim_{n \mapsto \infty} \underbrace{(1 + \frac{1}{n})^n}_{t_n} = \mathrm{e}$$

Satz:

Die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen e.

Möglichkeiten zum Beweis:

1.) $t_n \leq s_n$ für $n = 1, 2, \ldots$

2.) $\lim\limits_{n \mapsto \infty} (s_n - t_n) = 0$

Aus 1.) und 2.) folgt:

$$\lim_{n \mapsto \infty} t_n = \lim_{n \mapsto \infty} ((t_n - s_n) + s_n) = \lim_{n \mapsto \infty} (t_n - s_n) + \lim_{n \mapsto \infty} s_n = \mathrm{e}$$

$a_n = s_n - t_n \qquad \lim\limits_{n \mapsto \infty} a_n = 0 \qquad |a_n| \mapsto 0$

$\lim\limits_{n \mapsto \infty} (-a_n) = 0 \qquad |-a_n|$

$a_n \mapsto g \qquad \lambda a_n \mapsto \lambda g$

6.1 Intervallschachtelung

$(\alpha_n)\uparrow$ und $(\beta_n)\downarrow$ genügen den Bedingungen:

1.) $\alpha_n \leq \beta_n$ für $n = 1, 2, \dots$

2.) $\lim\limits_{n\mapsto\infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$

Dann gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$, $n = 1, 2, \dots$. Es gilt: $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \beta_n = x$.

$I_n = [\alpha_n, \beta_n]$, $I_{n+1} < I_n$, $\lim |I_n| = 0$

$(\alpha_n)\uparrow$, $\alpha_n < \beta_1 \,\forall n \xrightarrow{\text{Satz3}} \lim\limits_{n\mapsto\infty} \alpha_n = \sup\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\} = g$, $\alpha_n \leq g \,\forall n$

$(\beta_n)\downarrow$, $\alpha_1 \leq \beta_n \,\forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\mapsto\infty} \beta_n = \inf\{\beta_n, n \in \mathbb{N}\} = g'$, $g' \leq \beta_n \,\forall n$

$\alpha_n \leq g \leq g' \leq \beta_n$

$|g - g'| = |(g - \alpha_n) + (\alpha_m - \beta_n) + (\beta_n - g')| \leq |g - \alpha_n| + |\alpha_n - \beta_n| + |q - \beta_n| \xrightarrow[n\mapsto\infty]{} 0$

$g = g'$, $g = g' = x$

6.2 Alternierende Reihen

6.2.1 Leibniz-Kriterium

Satz (alternierende Reihen):

Es sei die Folge (a_j) gegeben mit $a_j > 0$, $a_j \geq a_{j+1}$, $a_j \mapsto 0$ für $j \mapsto \infty$. Dann konvergiert die Reihe $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \ldots = \sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \underbrace{\left(\sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j a_j\right)}_{s_n}$ mit dem Wert s. Es gelten:

1.) $\underbrace{s_{2k+1}}_{\alpha_k} \leq s \leq \underbrace{s_{2k}}_{\beta_k}$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

2.) $|s - s_n| \leq a_{n+1}$

6.2.2 Die alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j+1} = \ln 2$$

Die alternierende harmonische Reihe ist somit konvergent.

$$a_j = \frac{1}{j+1} \qquad \frac{1}{2} = s_1 \leq \ln 2 \leq x_0 = 1$$

$$\frac{7}{12} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = s_3 \leq \ln 2 \leq s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{10}{12}$$

$$\mathrm{e} = \sum_{k=}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\mapsto\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \frac{5}{2} < \mathrm{e} < 3$$

$$\lim_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \text{ für } c > 0$$

$\lim_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Die letzte Reihe ist bestimmt divergent.

Satz (Intervallschachtelung):

(α_n) sei monoton steigend, (β_n) monoton fallend, $\alpha_n \leq \beta_n \; \forall \; n$ und es sei $\lim_{n \mapsto \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$. Dann gelten: $\lim_{n \mapsto \infty} \alpha_n = \lim_{n \mapsto \infty} \beta_n = x$ und $\alpha_n \leq x < \beta_n \; \forall \; n$

6.2.3 Leibnizkriterium

Satz:

Für die Folge (a_j) gelte $a_j > 0$, $a_j \geq a_{j+1}$ und $a_j \mapsto 0$ für $j \mapsto \infty$. Dann hat man:

$$s = \underbrace{\lim_{n \mapsto \infty} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j}_{s_n} + a_0 - a_1 + a_2 \mp \dots$$

Es ist $s_{2k+1} \leq s \leq s_{2k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ und $|s - s_n| \leq a_{n+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Satz:

$s = \sum_{k=0}^{n} a_k$ sei konvergent. Dann gilt $a_k \mapsto 0$ für $k \mapsto \infty$.

$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mapsto s \, (n \mapsto \infty)$

$\tilde{s}_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mapsto s \, (n \mapsto \infty)$

Aus $|a_k| \geq C > 0$ für fast alle k folgt, daß $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent ist. Die geometrische Reihe ist konvergent für $|q| < 1$. Für $|q| \geq 1$ folgt Divergenz. Aus $a_k \mapsto 0$ für $k \mapsto \infty$ folgt im allgemeinen nicht, daß $\sum a_k$ konvergiert (wie man anhand der harmonischen Reihe erkennt).

$(s =) a_0 - a_1 \pm \dots + a_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} \pm \dots$

Es gilt $s_{2k+1} \leq s_{2k+3}$ und $s_{2k} \geq s_{2k+2}$; damit ist (s_{2k+1}) monoton steigend und (s_{2k}) monoton fallend. Somit ist $s_{2k+1} \leq s_{2k}$ erfüllt und es ergibt sich $s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1} \mapsto 0$ für $k \mapsto \infty$. Daraus folgt der angegeben Satz:

Satz:

Gilt $s_{2k+1} \leq s \leq s_{2k}$ für $k = 0, 1, 2, \dots$, so gilt $\lim_{k \mapsto \infty} s_{2k+1} = \lim_{k \mapsto \infty} s_{2k} = s$.

$0 \leq |s - s_{2k+1}| = a_{2k+2} - a_{2k+3} \pm \dots \leq a_{2k+2}$

$0 \leq s_{2k} - s = a_{2k-1} - a_{2k+2} + \dots \leq a_{2k+1}$

$|s_n - s| \leq a_{n+1}$

6.3 Cauchy-Kriterium

Satz (Skript Seite 820):

(a_n) sei Zahlenfolge. (a_n) ist konvergent $\Leftrightarrow$ Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \epsilon$, falls n, $m \geq N(\epsilon)$. $\Leftrightarrow$ $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n > m \geq N(\epsilon)$.

Beweis als Übung:

- 1.Schritt:

  (a_n) ist beschränkt. Es gilt $|a_n - a_{N(\epsilon)}| < \epsilon$ für $n > N(\epsilon)$. Anwendung der Dreiecksungleichung führt auf $|a_n| < \epsilon + a(\epsilon)$.

- 2.Schritt:

  H ist Häufungspunkt. Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $(a_{n_k})_k$ mit $a_{n_k} \mapsto H$. Ziel: $a_n \mapsto H$ für $n \mapsto \infty$

Anwendung bei Reihen:

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent $\leftrightarrow$ Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - s_m| < \epsilon$ für alle $n > m \geq N(\epsilon)$.

$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n} a_k\right| < \epsilon$ für alle $n > m \geq N(\epsilon)$

Satz:

Es seien folgende Reihen konvergent mit den Grenzwerten a und b:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a, \sum_{k=0}^{\infty} b_k = b.$$

Addiert man die beiden Reihe, so addieren sich auch die Grenzwerte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b$$

Bei Multiplikation der Reihe mit einer Konstante λ, wird auch der Grenzwert mit dieser Konstante multipliziert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = \lambda a \left(= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right)$$

(z_k) sei komplexe Folge:

$z_k = x_k + \mathrm{i} y_k$ mit $x_k = \mathrm{Re}(z_k)$, $y_k = \mathrm{Im}(z_k)$

$z_k \mapsto z(k \mapsto \infty) \leftrightarrow x_k \mapsto \underbrace{\mathrm{Re}(z)}_{x}; y_k \mapsto \underbrace{\mathrm{Im}(z)}_{y}(k \mapsto \infty)$

$|z_k - z|^2 = |x_k - x|^2 + |y_k - y|^2$

Zu Satz 1:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k}_{(\star\star\star)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{Re}(a_k))}_{(\star)} + \mathrm{i} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{Im}(a_k))}_{(\star\star)}$$

Falls $(\star)$ und $(\star\star)$ konvergieren, dann konvergiert $(\star\star\star)$ und es gilt die Gleichheit.

Definition:

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent, da $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ divergiert. Wenn $\sum a_k$ konvergiert, so folgt daraus nicht, daß $\sum a_k$ absolut konvergent ist.

Satz:

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

$$\tilde{s}_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ derart, daß $\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon$ gilt für $n > m \geq N(\epsilon)$ (Voraussetzung). Es sei $\epsilon > 0$: Wähle $N(\epsilon)$ wie oben:

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon \text{ für } n > m \geq N(\epsilon)$$

Dies ist so nach der Dreiecksungleichung.

Bemerkungen:

1.) Ist $\sum_{k=0}^{\infty}$ konvergent, so erhält man durch Klammersetzen wieder eine konvergente Reihe mit demselben Wert.

$$a = a_0 + a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{\tilde{a}_2} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6)}_{\tilde{a}_3} + \underbrace{(a_7 + a_8 + a_9 + a_{10})}_{\tilde{a}_4} + \ldots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 + \tilde{a}_3 + \tilde{a}_4 + \ldots$$

$\tilde{s}_0 = s_0, \tilde{s}_1 = s_1, \tilde{s}_2 = s_3, \tilde{s}_3 = s_6, \tilde{s}_4 = s_{10}$

$(\tilde{s}_n)$ ist Teilfolge von (s_n). $\tilde{s}_n \mapsto a$ für $n \mapsto \infty$, da Teilfolgen von (s_n).

2.) Es ist im allgemeinen nicht erlaubt, in einer unendlichen Reihe, Klammern wegzulassen oder zu versetzen. (Assoziativität) ohne den Wert der Reihe oder das Konvergenzverhalten zu verändern.

Beispiel:

$$\underbrace{(1-1)}_{0}+\underbrace{(1-1)}_{0}+\underbrace{(1-1)}_{0}+\ldots=0$$

$$\underbrace{1}_{b_0}-\underbrace{1}_{b_1}+\underbrace{1}_{b_2}-1+1-1\pm\ldots=\text{divergent}$$

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1$$

3.) Umordnen der Summanden einer Reihe verändert im allgemeinen den Wert oder das Konvergenzverhalten.
(„Umordnung“ bedeutet häufig „Unordnung“.)

Beispiel:

$$s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\mp\ldots$$

$$\frac{1}{2}s=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}+0\ldots$$

$$\frac{3}{2}s=1+\frac{1}{3}-\frac{2}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\ldots$$

Satz (ohne Beweis):

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ sei eine absolut konvergierende Reihe. Dann konvergiert jede Umordnung gegen denselben Wert. $\left(\sum a_{\sigma(k)}\right.$ nennt man die σ-Umordnung.$\left.\right)$

Satz:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ seien absolut konvergent. Dann konvergieren $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_j b_k$.

$$(a_n), a_n>0, \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)(a\geq 0, b\geq 0),\ \lim_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{c}=1(c>0),\ \lim_{n\mapsto\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}(|q|<1)$$

Satz:

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

Satz:

Jede durch Umordnung einer absolut konvergenten Reihe entstehende Reihe ist wieder absolut konvergent und hat denselben Wert.

$$\begin{array}{ccccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & a_0b_4 \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & \dots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Satz:

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} = a$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = b$ seien absolut konvergent. Dann konvergent die Produktreihe $\sum\limits_{k,j=0}^{\infty}$ absolut gegen ab.

$$a_0 \sum_{k=0}^{\infty} b_k + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} b_k + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \Big[a_j \sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big]$$

$$b_0 \sum_{j=0}^{\infty} a_j + b_1 \sum_{j=0}^{\infty} b_j + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[b_k \sum_{k=0}^{\infty} a_j\Big]$$

Für das CAUCHY-Produkt der Reihen gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k : ab = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{b=0}^{n} a_{n-l} b_l\Big)$$

Satz:

Mit den Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes gilt $\Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\Big) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Big(\sum\limits_{l=0}^{n} a_{n-l} b_l\Big)$.

Beispiel:

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\Big)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{2^{n-l}} \frac{1}{2^l}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{2^n} = 4$$

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{n} 1 = (n+1) \frac{1}{2^n}$$

6.4 Majorantenkriterium

Satz:

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ sei konvergent. $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sei Zahlenfolge mit $|a_n| \leq c_n$ für alle n. Dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.
$\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \text{ heißt konvergente Majorante für } \sum\limits_{k=}^{\infty} a_k.\right)$

$\sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$, $(\sigma_n) \uparrow$, $\sigma_n \mapsto \sigma$ für $n \mapsto \infty$, $\sigma_n \leq \sigma \, \forall \, n$

$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$: $(s_n) \uparrow$: $s_n \leq \sigma_n \leq \sigma$ ist nach oben beschränkt. Daraus folgt, daß s_n konvergent ist.

Beispiel:

$k^2 \leq k^3 : \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^3} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.

Satz (Majorantenkriterium):

(c_n), (a_n) seien reelle Zahlenfolgen mit $0 \leq c_n \leq a_n \; \forall \; n$. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ sei divergent. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent. $\sum c_n$ ist divergente Minorante für $\sum a_n$.

Beweis:

Negation von Satz 6

Beispiel:

$\sqrt{k} \leq k : \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k} > 0 : \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist divergent.

Beispiel:

Vorbemerkung: $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}} \geq 2 \sum\limits_{n=0}^{n} \frac{1}{n+2} = 2\frac{n+1}{n+2} \mapsto 2$ für $n \mapsto \infty$

Nach $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$ folgt:

$\sqrt{(n-k+1)(k+1)} \leq \frac{1}{2}(n+2)$

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} = s$ ist konvergent nach LEIBNIZkriterium, aber nicht absolut konvergent (siehe oben)! Folgende Reihe ist divergent:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} \frac{1}{\sqrt{n-l+1}} (-1) \frac{1}{\sqrt{l+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-l+1}\sqrt{l+1}}}_{a_n \not\to 0 (n \mapsto \infty)}$$

6.4.1 Quotientenkriterium und Wurzelkriterium

Satz (Kapitel 9 im Skript):

Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \neq 0$. Dann gilt:

$\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, $r = \liminf \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, $R = \limsup \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} : \rho = r = R = 1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} : \rho = r = R = 1$

Beispiele:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}, r = 0, R = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \ldots \qquad \rho = r = R = 1$$

$r \leq \rho \leq R$

Satz (Wurzelkriterium):

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ liegt vor. $\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ Es gelten:

1.) $\rho < 1$: absolute Konvergenz der Reihe $\sum a_k$.

2.) $\rho > 1$: Divergenz

3.) $\rho = 1$: keine allgemein verbindliche Aussage hinsichtlich Konvergenz/Divergenz möglich

Beweis des Wurzelkriteriums:

Wähle q mit $\rho < q < 1$. Aus der Definition von ρ folgt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \ \forall \ n \geq N$. Damit ergibt sich $|a_n| \leq q^n$ für $n \geq N$. Mit dem Majorantenkriterium folgt die Behauptung, da $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ wegen $0 < q < 1$ konvergiert. Für $\rho > 1$ (das heißt nach $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n) gilt $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele n. Daraus ergibt sich, daß $a_n \mapsto 0$ für $n \mapsto \infty$ nicht möglich ist und hieraus wiederum folgt die Divergenz.

Satz:

Quotientenkriterium: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ soll untersucht werden. $r = \liminf \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, $R = \limsup \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.
Dann gelten:

1.) $R < 1$: Absolute Konvergenz liegt vor.

2.) $r > 1$: Divergenz liegt vor.

3.) $r \leq 1 \leq R$: Keine verbindliche Aussage ist möglich.

Beweis:

$r \leq \rho \leq R : R < 1 \to \rho < 1 \to$ absolute Konvergenz

$r > 1 \to \rho > 1 \to$ Divergenz

1.) und 2.) sind Reihen, die wegen $\rho < 1$ nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent sind. Für 1.) und 2.) liefert das Quotientenkriterium wegen $r < 1 < R$ keine Aussage.

Bemerkungen:

Existieren $g_W = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{|a_n|} (= g)$ oder $g_Q = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| (= r = R)$, so hat man:

$g_W < 1$	absolute Konvergenz	$g_Q < 1$
$g_W > 1$	Divergenz	$g_Q > 1$
$g_W = 1$	keine Aussage	$g_Q = 1$

Betrachten wir die Sonderfälle 1.) und 2.) Für $r < \rho < 1 < R$ ist das Wurzelkriterium besser als Quotientenkriterium. Für $r < 1$, $\rho < R$ ist sowohl das Quotientenkriterium als auch das Wurzelkriterium anwendbar. Für die absolute Konvergenz von $\sum a_k$ ist zu zeigen:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \\ \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1 \end{array}\right\} \text{für fast alle } n,\ \text{wobei } q \text{ eine feste Zahl ist.}$$

Es liefert Divergenz vor, falls $\left\{\begin{array}{ll} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq q > 1 & \text{für fast alle } n \\ \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 & \text{für unendlich viele } n \end{array}\right\}$ gilt.

Zum Quotientenkriterium: Gilt $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

6.4.2 Cauchy-Produkt absolut konvergenter Folgen

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\Big) = \sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{s} a_{s-l} b_l\Big)$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ für } n,\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

6.5 Die Exponentialfunktion

Es sei $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann betrachten wir folgende Reihe:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Wir untersuchen die Reihe auf **Konvergenz**:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!|z^{k+1}|}{(k+1)!|z^k|} = \frac{1}{k+1}|z| \mapsto 0 \text{ für } k \mapsto \infty$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt, daß $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

Satz:

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$ absolut konvergent. Die Zuordnung $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{kl!}$ heißt **Exponentialfunktion**. Es wird geschrieben:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n \mapsto \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

$\mathrm{e} = \exp(1)$, $1 = \exp(0)$

Satz:

Für $|z| < Z$ gilt $|\exp(z) - 1| \leq \frac{2|z|}{2-|z|}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
|1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots - 1| = \left| z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right| &\leq |z| \left(1 + \frac{|z|}{2!} + \frac{|z|^2}{3!} \dots \right) = \\
&= |z| \left(1 + \frac{|z|}{2} + \frac{|z|^2}{3 \cdot 2} + \frac{|z|^3}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots \right) \leq \\
&\leq |z| \left(\left(\frac{|z|}{2}\right)^0 + \left(\frac{|z|}{2}\right)^1 + \left(\frac{|z|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|z|}{2}\right)^3 + \dots \right) = \\
&= |z| \frac{1}{1 - \frac{|z|}{2}} = \frac{2|z|}{2-|z|} \text{ geometrische Reihe für } |z| < 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z, w \in \mathbb{C} : \exp(z)\exp(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!} &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{p} \frac{z^{p-j}}{(p-j)!} \frac{w^j}{j!} \right) = \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\sum_{j=0}^{p} p! \frac{z^{p-j}}{(p-j)!} \frac{w^j}{j!} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} z^{p-j} w^j}_{(z+w)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(z+w)^p}{p!} = \exp(z+w)$$

6.5.1 Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Satz 3:

$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w); z, w \in \mathbb{C}$

$1 = \exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z)\exp(-z), z \in \mathbb{C}$

Korollar:

1. $\exp(z) \neq 0 \, \forall \, z \in \mathbb{C}$

2. $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$

6.5.2 Die reelle Exponentialfunktion

Satz:

a.) $\exp(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

b.) exp ist streng monoton wachsend.

c.) $\exp(n) = e^n$, $n \in \mathbb{Z}$

d.) $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \mapsto \infty} n^k \exp(-n) = 0$

Beweis:

a.) $\exp(x) = \left(\exp\dfrac{x}{2}\right)^2 > 0$ (wahr)

b.) $x_1 > x_2$, **Ziel**: $\exp(x_1) > \exp(x_2)$

$$x > 0 : \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots > 1$$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow x_1 x_2 > 0 \rightarrow \exp(x_1 - x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2) = \frac{\exp(x_1}{\exp(x_2)} > 1 \rightarrow \exp(x_1) > \exp(x_2)$$

c.) $\mathrm{e}^n = \exp(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ Wir beweisen dies mit vollständiger Induktion:

$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n = 0 : \mathrm{e}^0 = \exp(0), n = 1; \mathrm{e}^1 = \exp(1)$$

$$n \mapsto n+1 : \exp(n+1) = \exp(n)\mathrm{e} = \mathrm{e}^n \cdot \mathrm{e} = \mathrm{e}^{n+1}$$

$$n = -1, -2, \ldots : -n = 1, 2, \ldots ; \exp(-n) = \mathrm{e}^{-n} = \frac{1}{\exp(n)} \rightarrow \exp(n) = \mathrm{e}^n$$

d.) Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\dfrac{n^k}{\mathrm{e}^n}}_{a_n}$?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{\mathrm{e}^{n+1}} \cdot \frac{\mathrm{e}^n}{n^k} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \rightarrow \frac{1}{\mathrm{e}} < 1 (n \mapsto \infty)$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^k}{\mathrm{e}^n}$ ist konvergent.

$\Rightarrow \lim\limits_{n \mapsto \infty} n^k \exp(-n) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \mapsto \infty} \dfrac{\exp(n)}{n^k} = \infty$ bestimmt divergent!

$y = \exp(x)$

6.6 Stetige Funktionen/Grenzwert von Funktionen

Es sei f: $\mathbb{D} \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. z_0 sei ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches $\mathbb{D}$. z_0 sei Grenzwert von (z_n), $z_n \in \mathbb{D}$. Unser Ziel ist es zu klären, was $\lim_{z \mapsto z_0} f(z)$ mathematisch bedeutet (Grenzwert von f bei Annäherung $z \mapsto z_0$).

1.) $\lim_{n \mapsto \infty} a_n = a$: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so daß aus $n \geq N(\epsilon)$ folgt: $|a_n - a| < \epsilon$.

2.) $\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = A$: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Umgebung $U_{\delta(\epsilon)}$ von z_0, so daß aus $z \in U_{\delta(\epsilon)}$ $(|z - z_0| < \delta(\epsilon))$ folgt: $|f(z) - A| < \epsilon$.

Definition:

$\lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z) = A$ bedeutet: Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon, z_0) > 0$ derart, daß aus $0 < \underbrace{|z - z_0|}_{z \in \mathbb{D}} < \delta$ folgt

$|f(z) - A| < \epsilon$.

Satz:

$\lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z) = A \leftrightarrow$ für **jede** Folge $(z_n) \subset \mathbb{D}$, $z_n \mapsto z_0$ gilt: $f(z_n) \mapsto A$ $(n \mapsto \infty)$.

Anwendung:

$\lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z)$ existiert **nicht**, falls es eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{D}$ mit $z_n \mapsto z_0$ so gibt, daß $f(z_n)$ nicht konvergiert.

$\lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z)$ existiert **nicht**, falls es zwei Folgen (z_n), $(z'_n) \subset \mathbb{D}$ gibt, für die $z_n \mapsto z_0$ und $z'_n \mapsto z_0$ konvergieren mit $f(z_n) \mapsto A_1$ $(n \mapsto \infty)$ und $f(z'_n) \mapsto A'$.

f ist in $z_0 \in \mathbb{D}$ stetig $\leftrightarrow \lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z) = f(z_0)$

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(z_0, \epsilon) > 0$ derart, daß aus $z \in \mathbb{D}$ und $|z - z_0| < \delta$ folgt:

$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \leftrightarrow$ Für jede Folge $(z_n) \subset \mathbb{D}$ mit $\lim\limits_{n \mapsto \infty} z_n = z_0$ gilt: $\lim\limits_{n \mapsto \infty} f(z_n) = f(z_0)$.

Es sei $C^0(D) = \{f | f \text{ stetig für jedes } z \in \mathbb{D}\}$:

1.) id: $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$: $\text{id}(z) = z$ stetig für jedes z_0:

$$|\text{id}(z) - \text{id}(z_0)| = |z - z_0| < \epsilon \qquad \delta = \epsilon$$

2.) $f(z) = \exp(z)$ ist stetig für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{z \mapsto z_0} \exp(z) = \lim_{z \mapsto z_0} \exp((z - z_0) + z_0) = \lim_{z \mapsto z_0} \exp(z - z_0)\exp(z_0) = 1\exp(z_0)$$

3.) $f(z) = |z|$ ist stetig für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$:

$||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|$ (Dreiecksungleichung)

Wähle $\delta = \epsilon$

4.) $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$: $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig für alle $x_0 > 0$.
Stetig bei x_0: $\epsilon > 0$ sei gewählt. $\delta = \epsilon\sqrt{x_0}$

$$x > 0 \wedge |x - x_0| < \delta \xrightarrow{!} |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{(x - x_0)}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{1}{\sqrt{x_0}}|x - x_0| < \frac{1}{\sqrt{x_0}}\delta < \epsilon$$

Satz:

f, g: $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{D}$. f, g seien in z_0 stetig. Dann sind $f+g$, $\lambda f (\lambda \in \mathbb{C})$, $f \circ g$, $\frac{f}{g}$: $\{z \in \mathbb{D} | g(z) \neq 0\}$ $(g(z_0) \neq 0)$ in z_0 stetig.
Sei (z_n) eine Folge mit $z_n \mapsto z_0$ $(n \mapsto \infty)$. Ziel: $(f+g)(z_n) \mapsto (f+g)(z_0)$ $(n \mapsto \infty)$.

a.) $f(z_1) + g(z_1) \mapsto f(z_0 + g(z_0)$

b.) $f(z_n) \mapsto f(z_0), g(z_n) \mapsto g(z_0)(n \mapsto \infty)$ (Sätze über Folgen)

Bemerkung:

g sei in z_0 stetig und $g(z_0) \neq 0$. Dann gilt: $g(z) \neq 0$ für $|z - z_0| < \eta$. (in Umgebung von z_0)

Wähle $\epsilon = \frac{1}{2}|g(z_0)| > 0$. Es gibt $\delta > 0$ mit $|z - z_0| < \delta \to |g(z) - g(z_0)| < \frac{1}{2}|g(z_0)|$

$|g(z_0)| - |g(z)| < \frac{1}{2}|g(z_0)| \to 0 < \frac{1}{2}|g(z_0)| < |g(z)|$

Ziel:

$(g \circ f)(x_n) \mapsto (g \circ f)(x_0)(n \mapsto \infty)$.

$g(f(x_n)) \mapsto g(f(x_n))(n \mapsto \infty)$.

Dies gilt für $y_n = f(x_n)$.

Beispiele:

1.) $|\cdot|$ ist stetig und f ist stetig. Dann ist auch $|f|$ stetig.
Aus der Stetigkeit von $\exp(z)$ folgt die Stetigkeit von $|\exp(z)|$.

2.) f sei stetig auf $\mathbb{R}$ für $f(x) > 0$.
Aus der Stetigkeit von $\exp(x)$ und $\sqrt{f}$ ergibt sich die Stetigkeit von $\sqrt{\exp(x)}$.

3.) Da $(x) = x$ stetig ist, folgt auch die Stetigkeit von $g(x) = x^2$ und damit auch die Stetigkeit von $h(x) = \exp(x^2)$.

4.) f, g seien stetig auf I. Dann ist $M(x) = \max(f(x), g(x))$ und $m(x) = \min(f(x), g(x))$ stetig auf I.

$$\frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|) = M(x)$$

$$\frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|) = m(x)$$

Satz:

$[a, b]$ sei abgeschlossenes, beschränktes Intervall: $f \in C^0[a, b]$ mit $f(a) < 0, f(b) > 0$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.

Beweis:

Konstruiere eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$: $a_n \leq b_n$, $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$, $b_n - a_n \mapsto 0$. Induktiv setzen wir $a_0 = a$, $b_0 = b$ (Anfang). Für $n \geq 0$ seien $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ..., $[a_n, b_n]$ schon konstruiert. Das Problem ist die Definition von $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. Bilde $m = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ und berechne $f(m)$:

1.) $f(m) = 0$ mit $m = x_0$

2.) $f(m) < 0$, wähle: $a_{n+1} = m, b_{n+1} = b_n$

3.) $f(m) > 0$, wähle: $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = m$

$a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n \rightarrow a_n \mapsto x_0$ für $n \mapsto \infty$

$b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_0 - a_0) \rightarrow b_n \mapsto x_0$ für $n \mapsto \infty$

$\Rightarrow a_n \leq b_n$, $a_n \leq x_0 \leq b_n$

$f(a_n) < f(b_n)$

$\lim\limits_{n \mapsto \infty} f(x_0) \leq 0 \leq f(x_0) \rightarrow f(x_0) = 0$

Folgerung 1 (Zwischenwertsatz):

$f \in C^0[a,b]$ $(f(a) - c)(f(b) - c)) < 0$. ($c$ liegt zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = c$.

Beweis:

Wende für $g(x) = f(x) - c$ den vorherigen Satz an.

Beispiele:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$. $x^n = \alpha$ hat genau eine positive Lösung $x_0 = \sqrt[n]{\alpha}$.

$f(x) = x^n - \alpha$

$f(0) = -\alpha < 0$, $f(1+\alpha) = (1+\alpha)^n$; $\alpha \geq 1 > 0 \geq 1 + n\alpha - \alpha$

$$(1+\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k > \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \alpha^1 = 1 + n\alpha$$

Daraus folgt, daß in $(0, 1+\alpha)$ die Funktion f eine Nullstelle $x_0 > 0$ mit $x_0^n = \alpha$ besitzt.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0^n = \alpha \\ x_1^n = \alpha \end{array} \right\} x_0^n - x_1^n = \underbrace{(x_0^{n-1} + x_0^{n-2} x_1 + x_0^{n-3} x_1^2 + \ldots + x_1^{n-1})}_{>0} (x_0 - x_1) = 0$$

Folgerung 2:

$f \in C^0[a,b]$ sei streng monoton. Dann bildet f das Intervall $[a,b]$ **injektiv** und **surjektiv** auf $[f(a), f(b)]$ $(\uparrow)$ bzw. $[f(b), f(a)]$ $(\downarrow)$ ab.

6.6.1 Zwischenwertsatz

Definition:

$[a,b]$ ist beschränktes abgeschlossenes Intervall, $f \in C^0[a,b]$. C liege zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = c$.

Folgerung:

Ist $f \in C^0[a,b]$ streng monoton wachsend, so ist $f[a,b] \mapsto [f(a), f(b)]$ bijektiv. Stetigkeit in x_0 bedeutet: $lim_{n\mapsto\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\mapsto\infty} x_n)$ ($x_n \mapsto x_0$ für $n \mapsto \infty$)

Satz:

f, g seien stetig in z_0. Dann folgt daraus:

1.) $f+g$ ist stetig in z_0.

2.) λf ist stetig in z_0.

3.) $C^0(\mathbb{D})$ bilden mit „+“ und „skalarer“ Multiplikation einen Vektorraum.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{für} \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & \text{für} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Die Funktion ist in $x = 1$ unstetig!

6.6.2 Stetigkeit der Umkehrfunktion

Satz:

Es sei $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Die dann definierte Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \mapsto [a,b]$ ($f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y$) ist stetig und streng monoton wachsend.

Satz:

$f \in [a,b]$. Dann gelten:

1.) Es gibt eine Zahl $k > 0$ mit $|f(x)| \leq k \ \forall \ x \in [a,b]$.

2.) f nimmt den größten und kleinsten Wert an. Das heißt: Es gibt $x_0, y_1 \in [a,b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$ $\forall \ x \in [a,b]$.

Beweis:

1.) $f(x) \leq k, a \leq x \leq b$. Angenommen, der Satz ist falsch: Zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_n \in [a,b]$:

$f(x_n) > n$.

(x_n) ist beschränkte Folge, die somit einen Häufungspunkt $x_0 \in [a,b]$ besitzt. Es gibt eine Teilfolge $(x_{nk})_k$ mit $x_{nk} \mapsto x_0(k \mapsto \infty)$.

a.) $f(x_{nk}) > n_k$

b.) $f(x_{nk}) \mapsto f(x_0)$ für $k \mapsto \infty$

2.) $\{f(x), a \leq x \leq b\}$ ist beschränkt, $\neq \Phi$

Es gibt ein $\alpha = \sup\{f(x), a \leq x \leq b\}$. Ziel: Es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = \alpha$. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es damit ein $x \in [a,b]$ mit $\alpha - \epsilon < f(x)$, $\alpha - f(x) < \epsilon$ ($\star$). **Angenommen**, es ist $f(x) \neq \alpha \ \forall \ x \in [a,b]$, dann folgt, daß $g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}$ in $f[a,b]$ stetig ist. g ist beschränkte Funktion: Aus ($\star$) ergibt sich, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x \in [a,b]$ gibt mit $g(x) < \frac{1}{\epsilon}$. Dabei handelt es sich um einen Widerspruch. Damit ist der Satz bewiesen.

6.7 Funktionenfolgen/-reihen, gleichmäßige Konvergenz/Potenzreihe-Konvergenzradius

6.7.1 Cauchy-Kriterium/Majorantenkriterium

1. $f_n(x) = x^n, 0 \leq x \leq 1 \qquad n = 0, 1, 2, \dots$

   $$\lim_{n\mapsto\infty} f_n(x) = \left.\begin{cases} 0 \text{ für} & 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ für} & x = 1 \end{cases}\right\} f(x)$$

   $f_n \in C^0[0,1]$

   $f \notin C^0[0,1]$

2. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k := \lim_{n\mapsto\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}}_{f_n(z)}, z \in \mathbb{C}$$

3. $f_n(x) = \max\left(n - n^2 \left| x - \frac{1}{n} \right|, 0\right)$ für $n = 2, 3, \dots$ und $0 \leq x \leq 1$

   $$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \text{für} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{für} \quad \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   Diese Funktion ist stetig für alle n.

   $f(x) = \lim_{n\mapsto\infty} f_n(x) = 0 \,\forall\, x \in [0,1]$

   Sei $x > 0$: Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{N} \leq x$

   $\Rightarrow \frac{2}{n} \leq x \;\; \forall\, n \geq N \rightarrow f_n(x) = 0 \,\forall\, n \geq N$

4. Ausnutzung der geometrischen Reihe:

   $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{k=0}^{n} x \in \mathbb{R} =$$

   $$= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^k} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 & \text{für} \quad x \neq 0 \text{ (geometrische Reihe)} \end{cases}$$

5. $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ für $x \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$

   $$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n}\left[1 - \frac{1}{1+nx}\right] \qquad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$$

   $\lim_{n\mapsto\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$

Definition:

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n : D \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}\ n = 1, 2, \ldots$

Punktweise Konvergenz:

$f_n \mapsto f_{n \mapsto \infty}$ punktweise. $\xrightarrow{\text{Definition}}$ $f_n(x) \mapsto f(x)$ $(n \mapsto \infty)$ für jedes $x \in \mathbb{D}$.
$f_n \mapsto f$ punktweise: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\epsilon, x)$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ n \geq N$.

Gleichmäßige Konvergenz:

$f_n \mapsto f$ $(n \mapsto \infty)$ gleichmäßig auf $\mathbb{D}$ $\xrightarrow{\text{Definition}}$ $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \sup\{|f(z) - f(z)|, z \in \mathbb{D}\} = 0$
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\epsilon) \subset \mathbb{N}$ mit $(|f_n(z) - f(z)|) \leq \sup\{|f_n(z) - f(z)|,\ z \in \mathbb{D}\} < \epsilon$, falls $n \geq N(\epsilon)$ $(\forall\, z \in \mathbb{D})$.

Wurzelkriterium: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent/divergent, falls $\begin{cases} \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \\ \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \end{cases}$

$(a_n), a_n > 0$. Existiert: $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, so existiert auch $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{a_n}$ und beide

Die Grenzwerte sind gleich.

Definition:

Die Grenzfunktion einer auf $\mathbb{D}$ gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.

Satz:

Aus $|f_j(z)| \leq a_j\ \forall\ j, \forall\ z \in \mathbb{D}$ und daraus, daß $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergent ist, folgt daß $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ auf $\mathbb{D}$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Beispiel:

Wir betrachten die Exponentialfunktion:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ ist nicht gleichmäßig konvergent für $|z| < 1$.

$$|s_n|(z) - \frac{1}{1-z} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r} \text{ für } |z| \leq r$$

Dies ist Gleichmäßig konvergent für $|z| \leq r$ $(r < 1)$. Wir wenden den Satz 2 an:

$$f_n(z) = z^n \quad |z^n| \leq r^n$$

Da $r < 1$, ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r^k$ konvergent.

6.8 Potenzreihen

(a_n) sei eine komplexe Zahlenfolge und z_0 Entwicklungspunkt.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt Potenzreihe um z_0 (mit Entwicklungspunkt z_0). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt für $z_0 = 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \qquad (P)$$

(P) konvergiert sicher in $z = 0$. Substituiere $z \mapsto z' := z - z_0$ $(z' = z)$.

Lemma:

1.) Konvergiert die Reihe (P) für $z = z_1$, dann konvergiert (P) für alle z: $|z| \leq |z_1|$ absolut und für alle z mit $|z| \leq \rho < |z_1|$ gleichmäßig und absolut.

2.) Ist (P) in $z = z_0$ divergent, so ist (P) divergent für $z : |z| > |z_2|$

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n};$$

$z = 1 : 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ Konvergenz für $|z| < 1$

$z = -1 : -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right)$ Divergenz für $|z| > 1$

Konvergenz für $|z| < 1$.

Beweis:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$ sei konvergent. $\Rightarrow a_k z_1^k \mapsto 0$ für $k \mapsto \infty \Rightarrow |a_k z_1^k| \leq C \, \forall \, k$

Es sei $|z| < |z_1|$. Unser Ziel ist zu zeigen, daß $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergent ist.

$$\left|a_k z^k\right| = \left|a_k z_1^k \frac{z^k}{z_1^k}\right| = \left|a_k z_1^k\right| \left|\frac{z^k}{z_1^k}\right| \leq C \left|\frac{z}{z_1}\right|^k$$

Dies ist konvergent nach dem Majorantenkriterium, da $\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$. Für $|z| < \rho < |z_1|$ gilt $\left|a_k z^k\right| \leq C \left|\frac{\rho}{z_1}\right|^k$ und nach Satz 2 folgt gleichmäßige Konvergenz für $|z| \leq 1$. Angenommen, (P) konvergiert gegen $\tilde{z}$ mit $|\tilde{z}| > |z_2|$.

1. (P) konvergiert für alle z mit $z < |\tilde{z}|$, also insbesondere z_2 Widerspruch
2. Ist (P) in $z = z_0$ divergent, so ist (P) divergent für $z : |z| > |z_2|$

Definition:

Gegeben sei: $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. $r := \sup\{|z| \, (P) \text{ konvergiert in } z\}$. r heißt Konvergenzradius von (P). $\{(z) | |z| < r\}$ nennt man **Konvergenzbereich** und $\{x, |x| < r\}$ ist das **Konvergenzintervall**.

Beispiel:

Für $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ gilt $r = 1$.

Satz:

> r sei der Konvergenzradius von P.
>
> 1.) $r = 0$: Konvergenz nur in $z = 0$
>
> 2.) $r > 0$: P konvergiert für $z{:}|z| < r$ absolut und für $|z| \leq \rho$ $(0 < \rho < r)$ absolut und gleichmäßig. Für $|z| > 1$ liegt Divergenz vor.
>
> 3.) $r = 0$: Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ und gleichmäßige Konvergenz für $|z| \leq \rho$ für jedes ρ.

Folgerung:

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k = p(z)$ sei konvergent für $|z| < r$. $p(z)$ ist stetig für jedes z_0 mit $|z_0| < r$. Da $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ stetig und für $|z| \leq \rho$ gleichmäßig konvergent ist, ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ stetig für $|z| \leq \rho$, also in z_0.

Satz:

> Es liegt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ vor. Es sei $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt:
>
> 1.) $r = \frac{1}{\alpha}$, $r = \infty$, falls $\alpha = 0$, $r = 0$, falls $\alpha = \infty$
>
> 2.) Sind alle $a_n = 0$ und wenn $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existiert, so gilt: $r = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^k|} = |z|, \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |z|\alpha < 1$ absolut Konvergenz

$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^k|} = |z|, \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |z|\alpha > 1$ Divergenz

1.) Für $|z| < \frac{1}{\alpha}$ liege Konvergenz vor, für $|z| > \frac{1}{\alpha}$ liege Divergenz vor.

Das heißt: $r = \frac{1}{\alpha}$

2.) Voraussetzung: $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \beta$ existiert.

$\lim\limits_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} = r = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Satz:

Hat P den Konvergenzradius $r > 0$ ($r \neq \infty$), so kann bezüglich Konvergenz oder Divergenz für $|z| = c$ keine allgemeine Aussage gemacht werden. (Dann ist eine zusätzliche Untersuchung notwendig.)

Beispiele:

- Anwendung 1:

  $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$$

  Der Konvergenzradius beträgt $r = 1$. Für $z = -1$ liegt Divergenz und für $z = 1$ Konvergenz vor.

- Anwendung 2:

  $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

  Es gilt $r = 1$. Divergenz liegt für alle z mit $|z| = 1$ vor.

- Anwendung 3:

  $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$$

  Es gilt $r = 1$; die Reihe ist somit für alle z mit $|z| < 1$ konvergent.

- Anwendung 4:

  $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k+2}}{\sqrt{k-1}}z^k$$

  Wir schätzen folgendermaßen ab:

  $$1 \leq \sqrt[k]{\sqrt{k-1}} = \sqrt{\sqrt[k]{k-1}} \leq \sqrt{\sqrt[k]{k}} \mapsto 1 \text{ für } k \mapsto \infty$$

  Sodann gilt:

  $$\sqrt[k]{\sqrt{k-1}} \mapsto 1 \text{ für } k \mapsto \infty$$

  Damit folgt nun der Grenzwert:

  $$\alpha = \limsup\left[\sqrt[k]{\frac{2^{2k+2}}{\sqrt{k-1}}}\right] = \limsup\left[4 \cdot \frac{\sqrt[k]{4}}{\sqrt[k]{\sqrt{k-1}}}\right] = 4$$

  Die Reihe hat den Konvergenzradius $r = \frac{1}{4}$.

- Anwendung 5:

  $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}z^k$$

  $$\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[k]{\left|\frac{1}{2^k}\right|} = \limsup\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

  Somit folgt:

  $$r = \frac{1}{\alpha} = 2$$

Anwendung 6:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k \text{ mit } \alpha\in\mathbb{R} \text{ und } \alpha\notin\mathbb{N}\neq 0$$

$$r=\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\cdot(k+1)!}{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)(\alpha-k)\cdot k!}\right|=\left|\frac{k+1}{\alpha-k}\right|\xrightarrow{k\mapsto\infty}1$$

Anwendung:

Wir wollen den Wert folgender Potenzreihe bestimmen:

$$\boxed{P=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\frac{1}{4}}{n}x^n}$$

Wir spalten die Reihe auf:

$$P=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\frac{1}{4}}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}n\binom{\frac{1}{4}}{n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{4}}{n}x^n$$

Nun gilt ja bekanntlich:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n=(1+x)^r}$$

Also folgt damit für den zweiten Term:

$$P_2=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{4}}{n}x^n=(1+x)^{\frac{1}{4}}=\boxed{\sqrt[4]{1+x}}$$

Den ersten Term formen wir zunächst um, woraus dann folgt:

$$P_1=\sum_{n=0}^{\infty}n\binom{\frac{1}{4}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\frac{1}{4}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}!}{(n-1)!\left(n-\frac{1}{4}\right)!}x^n=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{3}{4}!}{(n-1)!\left(n-\frac{1}{4}\right)!}x^n=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac{3}{4}}{n-1}x^n=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{3}{4}}{n}x^{n+1}=\frac{1}{4}x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{3}{4}}{n}x^n=\frac{1}{4}x(x+1)^{-\frac{3}{4}}=\boxed{\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt[4]{(1+x)^3}}}$$

Somit gilt nun für den Wert der Potenzreihe:

$$P=P_1+P_2=\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt[4]{(x+1)^3}}+\sqrt[4]{x+1}=\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)^3}}\left[x+4\sqrt[4]{(x+1)^4}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt[4]{(x+1)^3}}[x+4x+4]=\boxed{\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}[5x+4]}$$

6.8.1 Identitätssatz für Potenzreihen

$\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$ sind für $|z|<r$ konvergent.

Es gelte $\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$ für $|z|\leq\rho(0<\rho<1)$

Dann gelten, wie man durch Koeffizientenvergleich findet:

$a_k = n_k, k = 1, 2, \ldots$

$r = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Für $|z| < r$ stellt die Reihe eine stetige Funktion $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < r$ dar. Für $|z| > r$ ist die Reihe divergent. Für $|z| = r$ kann sie konvergent sein.

Satz:

Die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ seien für $|z| < R$ konvergent.

Es gelte: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ für $|z| \leq \rho(< R)$. Dann folgt $a_n = b_n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Beweis:

Wir nehmen an, daß die Behauptung falsch ist. Dann gibt es ein kleinstes $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} \neq b_{n_0}$.

$\Rightarrow (a_{n_0} - b_{n_0}) z^{n_0} - (a_{n_0+1} - b_{n_0+1}) z^{n_0+1} + \ldots = 0$

$z^n \left[(a_{n_0} - b_{n_0}) + (a_{n_0+1} - b_{n_0+1}) z + (a_{n_0+2} - b_{n_0+2}) z^2 + \ldots\right] = 0$

Wähle $z_k = \frac{1}{k} R$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$ und $|z_k| < R$.

$\underbrace{z_k^{n_0}}_{\neq 0} [h(z_k)] = 0 \Rightarrow h(z_k) = 0$

$0 = \lim\limits_{k \mapsto \infty} h(z_k) = h(\lim\limits_{k \mapsto \infty} z_k) = h(0) = a_{n_0} - b_{n_0}$

Die Reihen sind konvergent, wenn:

$$\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k\right)}_{\text{absolut konvergent}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} \alpha_{k-l}\beta_l\right)$$

Dies ist das sogenannte **Cauchy-Produkt**.

$$\underbrace{\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right)}_{r_a}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)}_{r_b}}_{r=\min(r_a, r_b)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right) z^k$$

$(z - z_0)^n, f(z_0) = a_0$

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < r : f(0) = a_0$

Beispiel:

Es sei folgende Potenzreihe gegeben:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ für } |z| < r \text{ und } a_0 \neq 0$$

$f(0) \neq 0 \Rightarrow f(z) \neq 0$ für $|z| \leq \rho \, (0 < \rho < r)$

Wir bilden den Kehrwert der Funktion und wollen von dieser neuen Funktion die Potenzreihe wissen:

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_n z^k \text{ für } |z| \leq \rho$$

Gibt es b_0, b_1, …? Dazu berechnen wir das Cauchy-Produkt der beiden Potenzreihen, womit dann folgt:

$$1 = f(z) \cdot \left(\frac{1}{f(z)}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right)}_{c_k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Damit haben wir nun:

$$1 = c_0 z^0 + c_1 z^1 + c_2 z^2 + \ldots$$

Wir führen einen **Koeffizientenvergleich** durch. Nur c_0 hat den Wert 1; alle anderen c_k fallen weg:

$$\boxed{1 = c_0}$$

$$\boxed{0 = c_k = \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l \text{ für } k = 1, 2, \ldots}$$

Der Koeffizient b_0 folgt nun aus:

$$1 = c_0 = a_0 b_0 \Rightarrow \boxed{b_0 = \frac{1}{a_0}}$$

Damit können wir nun die Koeffizienten b_k berechnen:

$$\boxed{0 = b_0 a_k + b_1 a_{x-1} + b_2 a_{k-2} + \ldots + a_{k-1} a_1 + b_k a_0 \text{ für } k = 1, 2, \ldots}$$

Für $k = 1$ gilt die Gleichung, womit wir b_1 berechnen können:

$$0 = b_0 a_1 + b_1 a_0 \Rightarrow b_1$$

Für $k = 2$ können wir b_2 berechnen:

$$0 = b_0 a_2 + b_1 a_1 + b_2 a_2 \Rightarrow b_2$$

$$\boxed{b_k = -\frac{1}{a_0}\left[b_0 a_k + b_1 a_{k-1} + \ldots + a_{k-1} a_1\right] \text{ für } k = 1, 2, \ldots}$$

$f(z) = 1 - 2x + z^2 = (1-z)^2 \quad a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 1, a_k = 0$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z}$$

Beispiel:

Betrachten wir die Potenzreihe der Exponentialfunktion:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, a_0 = 1 \neq 0$$

Für die Exponentialfunktion gilt:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

Wir vermuten nun:

$$\boxed{b_k = (-1)^k \frac{1}{k!}}$$

$$b_0 = 1, b_1 = -1, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = -\frac{1}{3!}, \ldots$$

Unser Ziel ist es nun, diese Formel für b_k zu zeigen: Mit der obigen Beziehung folgt dann:

$$b_k = -\frac{1}{a_0} \left[b_0 a_k + b_1 a_{k-1} + \ldots + a_{k-1} a_1\right] = \boxed{-\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{1}{j!} \frac{1}{(k-j)!}}$$

Des weiteren gelten folgende Beziehungen:

1.) $\boxed{\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}}$ für $n \leq m$ und $m, n \in \mathbb{N}$

2.) $\boxed{\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j = (a+b)^k}$

Mit diesen Beziehungen folgt nun:

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{k!}{j!(k-j)!} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j 1^{k-j} = (1-1)^k = 0^k = 0$$

Dann folgt endgültig mit dieser Gleichung das zu beweisende Resultat:

$$b_k = -\sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{(-1)^j \frac{1}{j!}}_{b_j} \frac{1}{(k-j)!} = \underbrace{-\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{1}{j!} \frac{1}{(k-j)!}}_{=0} + (-1)^k \frac{1}{k!} = \boxed{(-1)^k \frac{1}{k!}}$$

Beispiel:

Es soll folgendes Cauchy-Produkt berechnet werden:

$$\boxed{P = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right)}$$

$$P = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!}x^{2n-2k}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{1}{(2k+1)!(2n-2k)!}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)!(2n-2k)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(2n-2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n}{2k}+\binom{2n}{2k+1}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{l=0}^{n}\binom{2n}{l} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}(1+1)^{2n} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}4^n}$$

Kapitel 7

Elementare Funktionen

7.0.2 Die Exponentialfunktion

Die EULERsche Zahl e kann entweder durch den Grenzwert einer Folge oder der Reihe für die Exponentialfunktion dargestellt werden:

$$\mathrm{e} = \lim_{n \mapsto \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \mapsto \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Die Reihenentwicklung für die Exponentialfunktion lautet:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, a_k = \frac{1}{k!}, \limsup \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = 0, r = \frac{1}{\limsup \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}} = \infty$$

Damit kann man also die Reihenentwicklungen aller auf der Exponentialfunktion basierenden Funktionen angeben, wie beispielsweise:

$$\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} \mp \ldots$$

Mittels dieser hilfreichen Entwicklungen lassen sich auch manche Grenzwerte elegant berechnen:

Beispiel:

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 1 + x^2}{x^4} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{\frac{x^4}{2!} \mp \ldots}{x^4} = \frac{1}{2!} \lim_{x \mapsto 0} \left(x^2 \ldots\right) = \frac{1}{2}$$

Beispiel:

Es sei gegeben:

$$\boxed{c_n = n \cdot \left(f\left(2 + \frac{1}{n}\right) - f(2)\right) \text{ mit } f(x) = \mathrm{e}^{4-x^2}}$$

Den Grenzwert berechnen wir mittels einer Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \ldots$$

$$\mathrm{e}^{4-x^2} = 1 + \left(4 - x^2\right) + \frac{1}{2}\left(4 - x^2\right)^2 + \ldots$$

Damit gilt nun:

$$g = \lim_{n\mapsto\infty} c_n = \lim_{n\mapsto\infty} n \cdot \left(1 + \left(4 - \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2\right) + \ldots - 1\right) = n \cdot \left(4 - 4 - \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= \lim_{n\mapsto\infty} n \cdot \left(-\frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\mapsto\infty} -4 - \frac{1}{n} = \boxed{-4}$$

$\exp(0) = 1 = \mathrm{e}^0, \exp(1) = \mathrm{e} = \mathrm{e}^1$

Das Additionstheorem für die Exponentialfunktion lautet:

$\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w), z, w \in \mathbb{C}$

Des weiteren gelten folgende Rechenregeln:

$\exp(z) \neq 0 \,\forall\, z, \exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$

$\exp(n) = \mathrm{e}^n, n \in \mathbb{Z}$

$\exp(r) = \mathrm{e}^r, r \in \mathbb{Q}, \mathrm{e}^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\underbrace{\mathrm{e} \cdot \mathrm{e} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}}_{m}}$

$\exp(mz) = \exp(\underbrace{z + z + z + \ldots + z}_{m}) = (\exp(z))^m, m \in \mathbb{N}$

Dies kann man durch vollständige Induktion zeigen.

$r = \dfrac{n}{m}$ mit $n, m \in \mathbb{N} : \mathrm{e}^r = \exp(r) = \exp\left(m \cdot \dfrac{n}{m}\right) = \left[\exp\left(\dfrac{m}{n}\right)\right]^m$

$\sqrt[n]{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{\frac{n}{m}} = \exp\left(\dfrac{n}{m}\right)$

$r = \dfrac{n}{m} : \exp\left(-\dfrac{n}{m}\right) = \exp\left(n + \left(-\dfrac{1}{m}\right)\right) = \left[\exp\left(-\dfrac{1}{m}\right)\right]^n = \left(\dfrac{1}{\exp\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n - \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{m}}}\right)^n = \mathrm{e}^{-\frac{1}{m}n}$

$\exp(\alpha) = \mathrm{e}^x (x \in \mathbb{R})$

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Wähle (r_n), $r_n \in \mathbb{Q}$ mit $r_n \mapsto x$ für $n \mapsto \infty$.

$\mathrm{e}^{r_n} = \exp(r_n) \mapsto \exp(x)(n \mapsto \infty)$

Die Exponentialfunktion ist stetig und bijektiv (injektiv und surjektiv). Für komplexe Zahlen z gilt:

$\mathrm{e}^z = \exp(z) = \exp(x + \mathrm{i}y) = \exp(x)\exp(\mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = \mathrm{e}^x$ streng monoton wachsend und $\mathrm{e}^x > 0$.

Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\mapsto\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^k} = \infty, \lim\limits_{x\mapsto\infty} x^k\mathrm{e}^{-x} = 0, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Zum Beweis führen wir folgende Abschätzung durch:

$\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^k}{k!} + \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \ldots > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ für $x > 0$

Wir bringen diesen Ausdruck auf die gewünschte Form:

$\mathrm{e}^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}, \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^k} > \dfrac{x}{(k+1)!}$

Die Exponentialfunktion geht somit schneller gegen unendlich als jede noch so große Potenz von x.

Injektivität:

Die Funktion ist injektiv, da sie streng monoton wachsend ist.

Surjektivität:

Gegeben ist $\alpha \in (0,\infty)$. Gesucht ist $x \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{e}^x = \alpha$. Wir argumentieren mit Stetigkeit: $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \mathrm{e}^x = \infty$ und mit dem Zwischenwertsatz: Da exp:$\mathbb{R} \mapsto (0,\infty)$ bijektiv ist, gibt es eine Funktion $\exp^{-1} =: \ln$. Dabei handelt es sich um den natürlichen Logarithmus, der das Intervall $(0,\infty)$ auf $\mathbb{R}$ abbildet.

$\mathrm{e}^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$

Die ln-Funktion ist stetig und streng monoton wachsend.

$\mathrm{e}^{\ln y} = y$ für $y > 0$

$\ln(\mathrm{e}^x) = x,\ x \in \mathbb{R}$

$\ln(\mathrm{e}) = 1,\ \ln 1 = 0 \Rightarrow \ln x < 0$ für $0 < y < 1$

$\lim\limits_{x\mapsto 0+} \ln x = -\infty,\ \lim\limits_{x\mapsto\infty} \ln x = \infty$

Satz:

Für den Logarithmus gilt:

a.) $\ln(x,y) = \ln(x) + \ln(y),\ \ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$ für $x,\ y > 0$

b.) $\lim\limits_{x\mapsto\infty} x^{-k}\ln x = 0,\ \lim\limits_{x\mapsto 0+} x^k \ln x = 0$ für $k = 1,\ 2,\ \ldots$

Beweis:

a.) $\ln(xy) = \left(\ln \mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{e}^{\ln y}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{\ln x + \ln y}\right) = \ln x + \ln y$

$\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \ln \mathrm{e}^{-\ln x} = -\ln x$

b.) $x > 0$: $x^k = \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^k = \mathrm{e}^{k\ln x} = 1 + k\ln x + \dfrac{k^2(\ln x)^2}{2!} + \ldots > \dfrac{k^2(\ln x)^2}{2!}$ für $x > 1$

$0 < \dfrac{\ln x}{x^k} < \dfrac{2!\ln x}{k!(\ln x)^2} = \dfrac{2!}{k!\ln x} \mapsto 0\,(x \mapsto \infty)$

$\lim\limits_{x\mapsto 0+} x^k \ln x = \lim\limits_{t\mapsto\infty} t^{-k}\ln t = 0$ (siehe oben)

7.1 Die allgemeine Exponentialfunktion

Für die allgemeine Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktion, dem Logarithmus, gelten folgende Regeln:

$a > 0$ fest, $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}, x \in \mathbb{R}$

$a^x > 0, a^{x+y} = a^x a^y$

$\ln a^x = x\ln a$

$1^x = \mathrm{e}^{x\ln 1} = 1$

$a^0 = \mathrm{e}^{0 \cdot \ln a} = 1 \, (a^x)^y = \mathrm{e}^{y \ln a^x} = a^{xy}$

$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}, x \in \mathbb{R}(a > 0)$

$\ln \sqrt[n]{n} = \ln n^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n} \ln n \mapsto 0$ für $n \mapsto \infty$

$\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\ln \sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n \mapsto \infty]{} \mathrm{e}^0 = 1$

Es sei $0 < a = x = y$. Dann gilt:

$(x^x)^x \neq x^{(x^x)}$

$x^{(x^x)} = \mathrm{e}^{x^x \ln x} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x \ln x} \ln x}$

Für die Reihenentwicklung von a^x ergibt sich mittels der Entwicklung für die Exponentialfunktion:

$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \ldots = \ln a$$

Damit können wir beispielsweise folgenden Grenzwert berechnen:

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \mapsto 0} \left(\ln a + \frac{x (\ln a)^2}{2!} + \ldots \right) = \ln a$$

$$y = f(x) = a^x : \mathbb{R} \mapsto (0, \infty) \text{ ist } \begin{cases} \text{streng monoton wachsend} & \text{für} \quad a > 1 \\ \text{streng monoton fallend} & \text{für} \quad a < 0 < 1 \end{cases}$$

$$\left\| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \mapsto \infty} a^x = \infty \\ \lim\limits_{x \mapsto -\infty} a^x = 0 \end{array} \right. \text{ für } a > 1$$

$y = \log_a(x)$ ist die zugehörige Umkehrfunktion $x > 0 \mapsto \mathbb{R}$. Für diese Umkehrfunktion gilt:

$\log_a (a^x) = x, x \in \mathbb{R}$

$a^{\log(x)} = x, x > 0$

a.) $x > 0$, $a > 0$:

$$x = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{\ln a} \cdot \ln a} = a^{\frac{\ln x}{\ln a}} \Rightarrow \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} : \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

b.) $a > 0$, $b > 0$: $\log_a(x)$, $\log_b(x)$

$$\left. \begin{array}{l} \log_a(b) = \dfrac{\ln b}{\ln a} \\[2em] \log_b(x) = \dfrac{\ln x}{\ln b} \\[2em] \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{array} \right\} \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln b} \frac{\ln b}{\ln a} = \log_b(x) \log_a(b)$$

7.2 Die Hyperbelfunktionen

Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann werden folgende Funktionen definiert:

- Kosinushyperbolikus:

  $$\cosh(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}\right)$$

- Sinushyperbolikus:

  $$\sinh(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}\right)$$

- Tangenshyperbolikus:

  $$\tanh(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}$$

Die Reihenentwicklung des Kosinushyperbolikus folgt mittels der Reihen der Exponentialfunktion:

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+(-1)^k\right)\frac{1}{k!}z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

Die ungeraden Koeffizienten sind gleich Null, die geraden gleich $\frac{1}{(2k)!}$:

$$a_{2k+1} = 0, a_{2k} = \frac{1}{(2k)!}$$

Der Konvergenzradius ist gleich unendlich:

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}} = \infty$$

Für die Reihenentwicklung des Sinushyperbolikus ergibt sich:

$$\sinh(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-(-1)^k\right)\frac{1}{k!}z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

$\cosh(z)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

$$\cosh(z) = \cosh(-z), \cosh(0) = 1$$

$\sin(z)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung:

$$\sinh(z) = -\sinh(-z), \sinh(0) = 0$$

$$z = x \in \mathbb{R} : \cosh(x) \geq 1 \forall\, x$$

Satz:

$\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$
$\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$ für x, $w \in \mathbb{C}$

$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$, $(x^2 - y^2 = 1)$

Setze oben $w = -z$: $1 = \cosh(0) = \cosh(z)\cosh(-z) + \sinh(z)\sinh(-z) = \cosh^2(z) - \sinh^2(z)$

Übung:

$e^{z+w} = e^z e^w$ und Definition

Wo kommt der Name Hyperbelfunktion her?

7.2.1 Die reelle Hyperbolikusfunktion

Satz:

a.) $y = \sinh(x)$ ist streng monoton wachsend.

b.) $y = \cosh(x)$ ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$ und streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$.

c.) $y = \tanh(x)$ ist streng monoton wachsend.

Begründungen:

- Begründung zu a.)

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$\left.\begin{cases} e^x \text{ ist monoton wachsend} \\ \dfrac{1}{e^x} = e^{-x} \text{ ist monoton fallend} \\ -e^{-x} \text{ ist monoton wachsend} \end{cases}\right\} \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \text{ ist streng monoton wachsend}$$

- Begründung zu b.)

$$\begin{aligned} \cosh(x_2) - \cosh(x_1) &= \frac{\cosh(x_2) - \cosh(x_1)}{\cosh(x_2) + \cosh(x_1)} \cdot (\cosh(x_2) + \cosh(x_1)) = \\ &= \frac{\cosh^2(x_2) - \cosh^2(x_1)}{\cosh(x_2) + \cosh(x_1)} = \frac{1 + \sin^2(x_2) - 1 - \sin^2(x_1)}{\cosh(x_2) + \cosh(x_1)} = \\ &= \frac{\sin^2(x_2) - \sin^2(x_1)}{\cosh(x_2) + \cosh(x_1)} > 0 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist für $x_2 > x_1 \geq 0$ offenbar auch größer 0, was aus der Monotonie des Sinushyperbolikus folgt. Damit haben wir die Monotonie des Kosinushyperbolikus auf dem Intervall $[0; \infty]$ gezeigt.

- Begründung zu c.)

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{1 + e^{2x}}$$

$$1 + e^{2x} \text{ ist monoton wachsend, } \frac{1}{1 + e^{2x}} \text{ ist monoton fallend, daher ist } -\frac{1}{1 + e^{2x}} \text{ monoton wachsend}$$

Des weiteren gilt:

$$\boxed{\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \left\{\begin{matrix} \mapsto \infty & (x \mapsto \infty) \\ \mapsto -\infty & (x \mapsto -\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sinh : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}}$$

$$\boxed{1 \leq \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \mapsto \infty \text{ für } x \mapsto \infty}$$

Der Kosinushyperbolikus bildet $\mathbb{R}$ auf das Intervall $[1, \infty)$ ab.

$$\boxed{0 < \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x} \mapsto 0 \text{ für } x \mapsto \infty}$$

Also nähern sich der Sinus- und Kosinushyperbolikus für $x \mapsto \infty$ beliebig. Darüber hinaus betrachten wir den Tangenshyperbolikus:

$$\boxed{\tanh(x) = 1 - \frac{2}{1 + e^{2x}} \begin{cases} \mapsto 1 & (x \mapsto \infty) \\ \mapsto -1 & (x \mapsto -\infty) \end{cases}}$$

$\left|e^x - e^{-x}\right| < e^x + e^{-x} \Rightarrow |\sinh(x)| < \cosh(x)$

$$\boxed{\left|\frac{e^{+x} - e^{-x}}{e^{+x} + e^{-x}}\right| = |\tanh(x)| < 1}$$

7.2.2 Umkehrfunktionen der Hyperbolikusfunktionen

$\sinh : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R} : \sinh^{-1}(x) = \operatorname{arsinh}(x)$

Die Umkehrfunktion nennen wir den Areasinushyperbolikus. Die Verknüpfung dieser beiden Abbildungen ergibt gerade wieder die Identität:

$$\boxed{\operatorname{arsinh}(\sinh(x)) = x, \sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = x}$$

$y = \cosh(x) : [0, \infty) \mapsto [1, \infty) : y = \operatorname{arcosh}(x)$

$y = \cosh(x) : (-\infty, 0] \mapsto [1, \infty) : y = \operatorname{arcosh}(x)$

Die Umkehrfunktion heißt Areakosinushyperbolikus. Auch für sie gilt:

$$\boxed{\operatorname{arcosh}(\cosh(x)) = x, \cosh(\operatorname{arcosh}(x))}$$

Wir leiten den expliziten Ausdruck für den Areakosinushyperbolikus her. Dazu lösen wir $\cosh(y) = x$ nach y auf und erhalten:

$\frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right) = x \,|\cdot 2e^y$

$e^{2y} + 1 = 2e^y x \Rightarrow x \pm \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$$\boxed{y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \operatorname{arcosh}_+(x)}$$

$$\boxed{y = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = \operatorname{arcosh}_-(x)}$$

$x \geq 1 \leftrightarrow 0 < x - \sqrt{x^2 - 1} \leq 1$

7.3 Die komplexe Exponentialfunktion

Satz:

Für die komplex konjugierte Exponentialfunktion gilt:
$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}),\ z \in \mathbb{C}$

Beweis:

Wir können die Exponentialfunktion als unendliche Reihe schreiben:

$$\exp(z) = \lim_{n\mapsto\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}}_{s_n(z)}$$

Hier ist dann ersichtlich, daß für die Partialsummen $s_n(z)$ gilt:

$$\lim_{n\mapsto\infty} \overline{S_n(z)} = S_n\left(\overline{z}\right)$$

Daraus folgt also:

$$\overline{\exp(z)} = \exp\left(\overline{z}\right)$$

z sei eine komplexe Zahl mit $\mathrm{Im}(z) = 0$. Dann gilt:

$$z = \mathrm{i}x, x \in \mathbb{R}, \overline{z} = -\mathrm{i}x, \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\overline{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$$

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = 1 \Rightarrow \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right| = 1, x \in \mathbb{R}$$

$$\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = x$$

An dieser Stelle muß man jedoch aufpassen:

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-y)}\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y}\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|\left|\mathrm{e}^{-y}\right| = \mathrm{e}^{-y}$$

Nun gilt ja:

$$\mathrm{i}^{2k} = (-1)^k, \mathrm{i}^{2k+1} = \mathrm{i}\,(-1)^k$$

Wir wollen nun eine Beziehung zwischen der komplexen Exponentialfunktion und dem reellen Sinus und Kosinus herleiten. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ konvergiert absolut für alle z:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathrm{i}^k z^k = 1 + \mathrm{i}z - \frac{1}{2!}z^2 + \mathrm{i}\frac{1}{3!}z^3 \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\mathrm{i}^{2k}\mathrm{e}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\mathrm{i}^{2k+1}z^{2k+1} = \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k z^{2k}}_{\cos(z)} + \underbrace{\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k z^{2k+1}}_{\mathrm{i}\sin(z)} = \cos z + \mathrm{i}\sin z
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z \text{ für } z \in \mathbb{C}}$$

Damit haben wir nun die Reihendarstellung des Sinus und des Kosinus erhalten:

$$\boxed{\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \text{ für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } r = \infty}$$

Daraus ist dann ersichtlich:

$$\cos z = \cos(-z), \cos(0) = 1, \boxed{\lim_{z\mapsto\infty} \frac{\cos z - 1}{z} = 0}$$

$$\boxed{\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \text{ für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } r = \infty}$$

Aus hier sieht man:

$$\sin z = -\sin(-z), \sin 0 = 0, \boxed{\lim_{z \mapsto 0} \frac{\sin z}{z} = 1}$$

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right)^n = (\cos z + \mathrm{i} \sin z)^n$$

An dieser Stelle kann man nun viele hilfreiche Beziehungen herleiten:

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nz} = \cos(nz) + \mathrm{i}\sin(nz)}$$

$$\cosh(\mathrm{i}z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k \mathrm{i}^{2k} z^{2k} = \cosh(z)$$

$$\sinh(\mathrm{i}z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \underbrace{(-1)^k \mathrm{i}^{2k+1}}_{\mathrm{i}} z^{2k+1} = \mathrm{i}\sinh(z)$$

$$\boxed{\cos z = \cosh(\mathrm{i}z), \sin z = -\mathrm{i}\sinh(\mathrm{i}z)}$$

Des weiteren ergeben sich durch Variablentransformation $z \mapsto \mathrm{i}z$ in den Potenzreihen von Sinus und Kosinus folgende wichtige Beziehungen, die vor allem in der Funktionentheorie (HM III) große Bedeutung haben:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right), \sin z = -\mathrm{i}\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$$

$$\boxed{\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right), \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right), z \in \mathbb{C}}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)}$$

7.3.1 Additionstheoreme

Satz:

Für $\sin(z)$ und $\cos(z)$ gelten folgende Additionstheoreme:

1.) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

2.) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

3.) $\cos z - \cos w = 2 \sin \dfrac{z+w}{2} \sin \dfrac{z-w}{2}$

Beweis:

Wir wollen nur das erste Additionstheorem beweisen. Die anderen beiden sollen als Übung durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \sin z \cos w + \cos z \sin w &= \frac{1}{4\mathrm{i}}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}\right) + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4\mathrm{i}}\left[2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)}\right] = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+w)}\right] = \sin(z+w) \end{aligned}$$

7.3.2 Definition der Zahl π

Wir betrachten den Kosinus auf dem Intervall $[0,2]$. $\cos(x)$ hat dort genau eine Nullstelle.

1.) $\cos x$ ist auf dem Intervall streng monoton fallend.
Für $x_2 > x_1$ gilt also, daß $\cos x_2 < \cos x_1$.

2.) $\cos 0 = 1$, $\cos 2 \leq -\frac{1}{3}$

3.) $\sin x$ ist > 0 in $[0,2]$.

Wir betrachten nun die Potenzreihen des Kosinus und des Sinus:

1.) Kosinus:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

Wir zeigen, daß die Reihe von $\cos 2$ konvergiert:

$$a_k \geq a_{k+1}$$

$$a_k = \frac{2^{2k}}{(2k)!} \mapsto 0 \text{ für } k \mapsto \infty$$

Damit stellt (a_k) eine Nullfolge dar, die notwendige Bedingung für Konvergenz ist erfüllt. Nun gilt außerdem nach dem Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^2}{(2k+2)(2k+1)} \mapsto 0 \text{ für } k \mapsto \infty$$

Damit konvergiert als $\cos 2$. Wir setzen nun den Wert 2 ein und erhalten dann folgende Abschätzung für $\cos 2$:

$$s = \cos 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}}_{a_k} = \underbrace{\overbrace{\underbrace{1}_{s_0} - \frac{2^2}{2!}}^{s_1} + \frac{2^4}{4!}}_{s_2} \mp \ldots \leq s_2 = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

Damit folgt für die Monotonie auf dem Intervall $[0,2]$:

$$0 \leq x_1 < x_2 \leq 2, \cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \underbrace{\overbrace{\frac{x_1 + x_2}{2}}^{>0}}_{\in[0,2]} \sin \underbrace{\overbrace{\frac{x_2 - x_1}{2}}^{>0}}_{\leq 2} < 0$$

2.) Sinus:

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \ldots \text{ für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } r = \infty$$

Wir wollen zeigen, daß nachfolgende Glieder der Folge (a_n) größer sind als vorhergehende:

$$0 < a_k = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$a_k \geq a_{k+1} : \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \geq \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \Leftrightarrow \boxed{(2k+3)(2k+2) \geq x^2}$$

Diese letzte Beziehung gilt sicher, falls $6 \geq x^2$.

$0 < x < 2 : x^2 \leq 4, -x^2 \geq -4$

Außerdem stellt (a_k) eine Nullfolge dar:

$$a_k = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \mapsto 0 \text{ für } k \mapsto \infty \text{ und } 0 < x \leq 2$$

Für $0 \leq x \leq 2$ gilt somit:

$$s = \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \overbrace{\underbrace{x}_{s_0} - \frac{x^3}{3!}}^{s_1} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots \geq s_1$$

Satz:

> $y = \cos x$ hat im Intervall $(0, 2)$ genau eine Nullstelle x_0.

Definition:

> Die Zahl π wird nun definiert als doppelte Nullstelle des Kosinus im Intervall $[0; 2]$: $\pi = 2x_0$. Dabei gilt für π folgende Abschätzung: $0 < \pi < 4$

Außerdem folgt:

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 = \sin^2 \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin z \cos \frac{\pi}{2} + \cos z \sin \frac{\pi}{2} = \cos z$$

Satz:

> Folgende wichtige Werte gelten für die komplexe Exponentialfunktion:
>
> $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \pm\mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi} = -1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi} = 1$ für $k \in \mathbb{Z}$
>
> $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi k} = (-1)^k$ für $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}(-1)^k$ für $k \in \mathbb{Z}$

Beweis:

Zum Beweis verwenden wir die EULERsche Formel und unsere Kenntnisse über π:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x (x \in \mathbb{R})$$

$$\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}, \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi + \frac{\pi}{2}} = -\mathrm{i}$$

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^2 = 1$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}\right)^k = 1$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}(-1)^k$$

Hier folgt nun eine Tabelle der wichtigsten Werte:

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$k\pi$	$(2k+1)\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1	0	0	$(-1)^k$
$\cos x$	1	0	-1	0	1	$(-1)^k$	0

Periodizität:

$\left.\begin{array}{l} y=\cos x \\ y=\sin x \end{array}\right\}$ sind bekannt, wenn $y=\cos x$ auf $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ bekannt.

$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

1.) $\cos x$ ist gerade. Auf $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ist $\cos x$ bekannt.

2.) $\sin x$ ist auf $[0,\pi]$ bekannt, $\cos x$ ist verschoben. $\sin x$ ist somit auf $[-\pi,+\pi]$ ungerade.

3.) $\cos x, \sin x$ sind auf Intervall der Länge 2π bekannt, wegen der 2π-Periodizität sind also $\cos x, \sin x$ überall bekannt. Diese folgt aus der 2π-Periodizität der komplexen Exponentialfunktion:

$$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^z\cdot 1=\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}}$$

$$\sin x=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+2\pi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+2\pi)}\right)=\sin(x+2\pi)$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}}\text{ und }\sin(x)=\sin(x+2\pi)}$$

Übung:

Man zeige, daß $\tan x$ und $\cot x$ π-periodisch sind.

Monotonie:

Wir fassen unsere Erkenntnisse über die Monotonie der trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen zusammen:

- Sinus:

  $\sin x$ ist auf jedem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right]=\left[(2k-1)\frac{\pi}{2},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton für $k\in\mathbb{Z}$.

- Kosinus:

  $\cos x$ ist auf jedem Intervall $[0+k\pi,\pi+k\pi]=[k\pi,(k+1)\pi]$ streng monoton.

- Arkussinus:

  $$v\mapsto u:=\arcsin_k(v)\text{ für }v\in[-1,+1]\Leftrightarrow\sin u=v\text{ mit }u\in\left[(2k-1)\frac{\pi}{2},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

  Den Teil für $k=0$ nennen wir den Hauptzweig des Arkussinus:

  $$u=\arcsin_0(v)=\operatorname{Arcsin}(v)\text{ mit }u\in\left[+\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$$

  $$\arcsin_k\left(\sin(u)\right)=u,u\in\left[(2k-1)\frac{\pi}{2},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

  $$\sin\left(\arcsin_k(v)\right)=v,v\in[-1,+1]$$

- Arkuskosinus:

  $$u=\arccos_k(v),v\in[-1,+1]\Leftrightarrow\cos u=v,u\in[k\pi,(k+1)\pi]$$

  Für $k=0$ folgt wiederum der Hauptzweig des Arkuskosinus:

  $$u=\arccos_0(v)=\operatorname{Arccos}(v)$$

Bemerkung:

Im folgenden sprechen wir nur von den Hauptzweigen des Arkussinus und Arkuskosinus und bezeichnen diese mit $\arcsin(x)$ und $\arccos(x)$.

Satz:

Für die komplexe Exponentialfunktion gilt folgende Gleichung:

$\mathrm{e}^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi\mathrm{i}$ für $k \in \mathbb{Z}$

Die in der Mathematik sehr bedeutenden Zahlen, nämlich die **Eulersche Zahl e**, **die Kreiszahl** π und die **imaginäre Einheit i** sind somit in einer einzigen Gleichung miteinander verknüpft, was sehr überraschend ist. Diese Gleichung hat wiederum in der Funktionentheorie (HM III) eine sehr wichtige Bedeutung.

Beweis:

„$\Leftarrow$" stimmt nach Satz 2.
„$\Rightarrow$" $\mathrm{e}^z = 1$
Wir suchen nun $z = x + \mathrm{i}y$ mit $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = 1$. Alle gesuchten z haben die Form $z = \mathrm{i}y$.

$\left|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}\right| = |\mathrm{e}^x| \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right| = \mathrm{e}^x \stackrel{!}{=} 1$

Mit $x = 0$ folgt somit die zu beweisende Aussage:

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = 1$

Außerdem müssen wir noch zeigen, daß $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \neq 1$ für $0 < y < 2\pi$. Wir führen wieder einen Widerspruchsbeweis durch. Wir nehmen also an:

Es sei $0 < y < 2\pi$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = 1$

Für $0 < \dfrac{y}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ folgt:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{y}{4}} = \underbrace{\cos\frac{y}{4}}_{u} + \mathrm{i}\underbrace{\sin\frac{y}{4}}_{v} = u + \mathrm{i}v$$

Für die komplexe Zahl $u + \mathrm{i}v$ gilt:

$u > 0, v > 0, u^2 + v^2 = 1$

Wir potenzieren obige Gleichung mit 4 und erhalten:

$$1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = (u + \mathrm{i}v)^4 = u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + \mathrm{i}\underbrace{4uv\left(u^2 - v^2\right)}_{=0}$$

Durch Vergleich mit der linken Seite folgt dann, daß der Imaginärteil der komplexen Zahl 0 sein muß. Damit gilt:

$u^2 = v^2$ und somit $u = v$

Mit der Nebenbedingung $u^2 + v^2 = 1$ ergibt sich nun:

$$u = v = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wieder eingesetzt in die obige Gleichung ergibt:

$$1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = -1$$

Dabei handelt es sich um einen Widerspruch. Somit ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \neq 1$ für $0 < y < 2\pi$.

7.3.3 Nullstellen des Kosinushyperbolikus

Wir wollen zum Abschluß die Nullstellen von $\cosh(z)$ berechnen:

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}\right)=0$$

$$\mathrm{e}^{z}=-\mathrm{e}^{-z} \Rightarrow \mathrm{e}^{2z}(-1)=1$$

$$\mathrm{e}^{2z-\mathrm{i}\pi}=1$$

Mit der zuvor bewiesenen Beziehung $\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}=1$ folgt nun:

$$\mathrm{e}^{2z-\mathrm{i}\pi}=\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}$$

Dann ergibt sich durch Logarithmieren:

$$2z-\mathrm{i}\pi=2k\pi\mathrm{i}$$

$$\boxed{z=\frac{1}{2}\left(2k\pi\mathrm{i}+\mathrm{i}\pi\right)=\mathrm{i}(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ für } k\in\mathbb{Z}}$$

Damit folgen die Nullstellen des Kosinus:

$$\boxed{\cos z=\cosh(\mathrm{i}z)=0}$$

$$\mathrm{i}z=\mathrm{i}(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

Daraus ergibt sich:

$$\boxed{z=(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ mit } k\in\mathbb{Z}}$$

Wir haben kennengelernt:

- Die komplexe Exponentialfunktion $\exp(z)$, die reelle Exponentialfunktion $\exp(x)$ und deren Umkehrfunktion $\ln x$

  $$f(z)=\mathrm{e}^{z}, f(x)=\mathrm{e}^{x}, \ln x$$

- Hyperbolische Funktionen, Areafunktionen (durch Logarithmus ausdrückbar)
- Trigonometrische Funktionen, Arcusfunktionen

  $$\sin x=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$

Kapitel 8

Differentialrechnung

8.1 Landau-Symbole (o, O)

$\varphi, \psi : I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x_0 \in U \subset I$

$\psi(x) \neq 0$, $x \neq x_0$, $x \in U$

Definition:

$\varphi(x) = o(\psi(x))$ für $x \mapsto x_0 \xrightarrow{\text{Def}} \lim_{x\mapsto x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$.

$\varphi(x) = O\left(\psi(x)\right)$ für $x \mapsto x_0 \leftrightarrow \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ bleibt für $x \mapsto x_0$ beschränkt.

Beispiel:

$$e^x = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}_{=o(x) \text{ für } x\mapsto 0} = 1 + x + o(x), x \mapsto 0$$

$\sin x = O(x)$ für $x \mapsto 0$, $\dfrac{\sin x}{x}$ beschränkt bei 0?

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots$$

$\cos x - 1 = o(x)$ für $x \mapsto 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots$$

$\exp(-x) = o\left(\dfrac{1}{x^k}\right)$ für $x \mapsto \infty (k \in \mathbb{N})$

$$\lim_{x\mapsto\infty} x^k \exp(x) = 0$$

8.2 Tangente an eine Kurve

- Sekante:

  $$S(x_0,x_1)(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}(x-x_0)$$

- Tangente (Grenzlage):

  $$T_{f(x_0)}(x) = f(x_0)\left(\lim_{x\mapsto x_0}\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}\right)(x-x_0)$$

Definition:

Falls $\lim\limits_{t\mapsto x_0}\frac{f(x_0)-f(t)}{x_0-t}$ existiert, heißt er **Ableitung von f in x_0** und wird durch $f'(x_0)$ oder $(Df)(x_0)$ bezeichnet. Anschaulich gibt $f'(x_0)$ die Steigung von $T_{f(x_0)}(x)$ in x_0 an. Es handelt sich also um die Steigung der Kurve $y=f(x)$ in $(x_0, f(x_0)$

$f(x)=|x|$ ist in $x=0$ nicht differenzierbar, da die Ableitung nicht existiert.

$\lim\limits_{t\mapsto 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim\limits_{t\mapsto t_0}\frac{|t|}{t} = \lim\limits_{t\mapsto 0}\operatorname{sign}(t)$ existiert nicht.

Aus **Stetigkeit** folgt nicht Differenzierbarkeit.

$$f'(x) = \lim_{t\mapsto x}\underbrace{\frac{f(x)-f(t)}{x-t}}_{\text{Differenzenquotient}} \stackrel{-x+t=h}{=} \lim_{h\mapsto 0}\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{(\Delta_h f)(x)}$$

Die Zuordnung $f' : x\mapsto f'(x)$ ist eine Funktion (die Ableitung) von f. Der Definitionsbereich $\{x|f'(x) \text{ existiert}\}$ $\subset I$. Geht man von $y=f'(x)$ aus, so erhält man durch Ableiten $(f')'(x) = f''(x)$, nämlich die zweite Ableitung.

$D(\mathrm{Def})(x) = \mathrm{D}^2 f(x)$ ist n-te Ableitung $(D^n)(x) = f^{(n)}(x) = D\left(D^{n-1}\right)f(x)$ für $n=0,1,2,\ldots$ (Induktive Definition)

$f^{(0)}(x) = f(x), n=0$

$f'(x) = \lim\limits_{n\mapsto 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, n=1$

Beispiele:

1.) $f(x)=ax+b$

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{ah}{h} = a \xrightarrow{h\mapsto 0} f'(x) = a$$

$$f'(x) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{a-a}{h} = 0$$

2.) $f(x)=x^n$ $(n=0,1,2,3,\ldots)$

Mit der Lösung der Aufgabe 3c auf dem dritten Übungsblatt ergibt sich dann:

$$f'(x) = \lim_{t\mapsto x}\frac{f(x)-f(t)}{x-t} = \lim_{t\mapsto x}\frac{x^n-t^n}{x-t} = \lim_{t\mapsto x}\left(x^{n-1}+x^{n-2}t+x^{n-3}t^2+\ldots+t^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

$f(x)=x^n, f'(x)=nx^{n-1}, n=0,1,2,\ldots$

3.) $f(x)=\mathrm{e}^{cx}$ $(x\in\mathbb{R} : c\in\mathbb{C})$

$$f'(x) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{c(x+h)}-\mathrm{e}^{cx}\right) = \mathrm{e}^{cx}\lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{ch}-1\right) = \mathrm{e}^{cx}\lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{h}\left(1+ch+o(h)-1\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{cx}\lim_{h\mapsto 0}\left(c+\frac{o(h)}{h}\right) = c\mathrm{e}^{cx}$$

$f(x)=\mathrm{e}^{cx}, f'(x)=c\mathrm{e}^{cx}$

$f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, f'(x)=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$

8.3 Äquivalente Formulierung von Differenzierbarkeit

Satz:

$f : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, $x_0 \in I$: Wenn f ist in x_0 differenzierbar ist, gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{C}$ und eine Funktion $r : I \mapsto \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1.) r ist stetig und $r(x_0) = 0$

2.) $f(x) = f(x_0) \subset (x - x_0) + r(x)(x - x_0)$

Beweis:

„⇐“ Setze $c = f(x_0)$ und $r(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{für} \quad x \neq x_0 \\ 0 & \text{für} \quad x = x_0 \end{cases}$

„⇒“ Die Bedingungen 1.) und 2.) sind erfüllt. Aus 2.) folgt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c + r(x)$$

$$\lim_{x \mapsto x_0} : c = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Bemerkung:

Ist f differenzierbar in x_0, so liefert der Satz:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_{f(x_0)}(x)} + r(x)(x - x_0)$$

$f(x) - T_{f(x_0)}(x) = r(x)(x - x_0)$: Fehler bei der Approximation von $f(x)$ durch $T_{f(x_0)}(x)$

Folgerung:

Es sei f in x_0 differenzierbar. $(x) = f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$. Daraus folgt:

$\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$: f ist **stetig** in x_0

a.) f ist differenzierbar. $\Rightarrow$ f ist stetig.

b.) f ist differenzierbar. $\not\Leftarrow$ f ist stetig.

8.4 Elementare Ableitungsregeln

Satz:

f, g seien bei x definiert und differenzierbar. Dann sind $f + g$, $f \cdot g$ und falls $g(x) \neq 0$ $\dfrac{f}{g}$ in x differenzierbar und es gelten:

1.) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

2.) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Produktregel)

3.) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (Quotientenregel)

Übung:

$(fg)^{(n)} = ?$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)$

$f(x) = x^n (n = 0, 1, 2, \ldots), f'(x) = nx^{n-1}$

$(f(x) = a = \text{const.}, f'(x) = 0\,\forall\, x)$

Satz:

> $f'(x)$, $g'(x)$ mögen existieren. Dann gelten:
>
> a.) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
>
> b.) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x) + g'(x)$
>
> c.) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0)$
>
> $f: I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}, x_0 \in I$: $f'(x_0) = \lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ f heißt auf I differenzierbar, wenn f in jedem $x \in I$ differenzierbar ist. Falls f reellartig ist, gibt $f'(x_0)$ die Steigung der Kurve $y = f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ an.

Satz:

> $f'(x_0)$ existiere. Dann folgt daraus, daß $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{c} + \underbrace{r(x)(x - x_0)}_{=0(x-x_0)} \underbrace{r}_{f(x)\mapsto x_0}$ stetig..

Beweis zur Produktregel:

$$\begin{aligned}\Delta_h(fg)(x) &= \frac{1}{h}\left(f(x+h) + g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\right) = \\ &= g(x+h)\left(\Delta_h f(x)\right) + f(x)\left(\Delta_h g\right)(x) \xrightarrow[h\mapsto 0]{} g(x)f'(x) + f(x)g'(x) = (fg)'(x)\end{aligned}$$

Beweis zur Quotientenregel:

$$\left(\Delta_h \frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = \frac{-\left(\Delta_h g\right)(x)}{g(x+h)g(x)} \to -\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \left(\frac{1}{g}\right)'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = \text{ mit und b.)}$$

Beispiele:

$$f(x) = \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \cos x$$

$$f''(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = -\sin x$$

Übung:

Mit $(\Delta_h \sin)(x)$

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $f'(x) = \frac{cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$

$f(x) = x^n (n = 0, 1, 2, \ldots)$

$f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \Rightarrow f^{(l)}(x) = n(n-1)\ldots(n-(l+1))x^{n-l} = l!\binom{n}{l}x^{n-l}$, $\binom{n}{l} = 0$, $l > n$

$f^{(n)}(x) = n!$

Kettenregel:

I, $J \subset \mathbb{R}$, $g : I \mapsto J$, $f : J \mapsto \mathbb{C}$. g sei in $x_0 \in I$ differenzierbar und f in $g(x_0)$ differenzierbar, dann ist $f \circ g$ in x_0 differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ g)'(x_0) = \underbrace{f'(g(x_0))}_{\substack{\text{äußere} \\ \text{Ableitung}}} \underbrace{g'(x_0)}_{\substack{\text{innere} \\ \text{Ableitung}}}$$

Beweis:

„ist plausibel“: $\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{f'(g(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{g'(x_0)}$

$(f \circ g \circ h)'(x) = ((f \circ g) \circ h)'(x) = (f \circ g)'(h(x))\, h'(x) = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$

Beispiel:

$h(x) = \sin \frac{1}{x} = f(g(x))$ mit $f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x; g(x) = \frac{1}{x}, g'(x) - \frac{1}{x^2}$

$h'(x) = \left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$h(x) = \mathrm{e}^{g(x)} = f(g(x)), f(x) = \mathrm{e}^x, f'(x) = \mathrm{e}^x$

$h'(x) = \mathrm{e}^{g(x)} g'(x)$

8.4.1 Ableitung der Umkehrfunktion

Satz:

$f : I \mapsto J$, $f(I) \subset \mathbb{R}$, $x = f(y)$ sei bijektiv, $g : J \mapsto \mathbb{R}$, $y = g(x)$ sei die Umkehrfunktion. Es sei f in $y_0 \in I$ differenzierbar, es gelte $f'(y_0) \neq 0$. Dann ist g in $x_0 = f(y_0)$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))}, \quad g'(f(y_0)) = \frac{1}{f'(y_0)}$$

Beweis:

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{y-y_0}{f(y)-f(y_0)} = \frac{1}{\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}}$$

$\lim\limits_{x \mapsto x_0}$ bedeutet auch $\lim\limits_{y \mapsto y_0}$.

$f(g(x)) = x$

$$\Rightarrow f'(g(x))g'(x) = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Beispiele:

$f(x) = x^3, f'(0) = 0$

$g(x) = \sqrt[3]{x}$ ist bei 0 nicht differenzierbar.

$y = \ln x (x > 0), f(y) = \mathrm{e}^x, f'(y) = \mathrm{e}^y$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(\ln x))} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}, x < 0 : g(x) = \ln(-x), g'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Übung:

$$\ln|x| = \ln|g(x)|, h(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}(g(x) \neq 0)$$

Übung:

$$g(x) = \sqrt[n]{x}, g'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \text{ (mit Satz 4)}$$

$$g(x) = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}(x > 0), g'(x) = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$g(x) = \arctan x : \mathbb{R} \mapsto \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(y) = \tan y, f'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \left(\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}\right)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

8.5 Extremwerte

Definition:

$f : I \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. f hat in x_0 ein

a.) globales Maximum, wenn $f(x) \leq f(x_0)\ \forall\ x \in I$

b.) lokales Maximum, wenn $f(x) \leq f(x_0)\ \forall\ x$ aus einer Umgebung von x_0

f hat in x_0 ein globales (lokales) Minimum, wenn -f in x_0 ein globales (lokales Maximum) hat. E, ein **Extremwert** von f, ist ein Maximum oder Minimum von f.

Satz:

$f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ besitze in $x_0 \in (a, b)$ einen lokalen Extremwert. Es sei f in x_0 differenzierbar. Dann gilt: $f'(x_0) = 0$.

Beweis:

$f(x_0)$ sei lokales Maximum.

$$f'(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \mapsto x_0, x < x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \\ \lim\limits_{x \mapsto x_0, x > x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \end{array} \right\} = 0$$

Problem:

Für $f[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sollen Extremwerte berechnet werden. Kandidaten dafür sind:

- Randpunkte a, b
- Punkte, wo f nicht differenzierbar ist.
- Suche die $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$

Aber:

Aus $f'(x) = 0$ folgt nicht, daß bei x_0 ein Extremwert vorliegt.

$$f(x) = x^k (k \in \mathbb{N}), f^{(n)}(x) = j! \binom{k}{j} x^{k-j}$$

Satz:

f sei auf (a, b) definiert und in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar. f besitze in x_0 einen Extremwert. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beispiel:

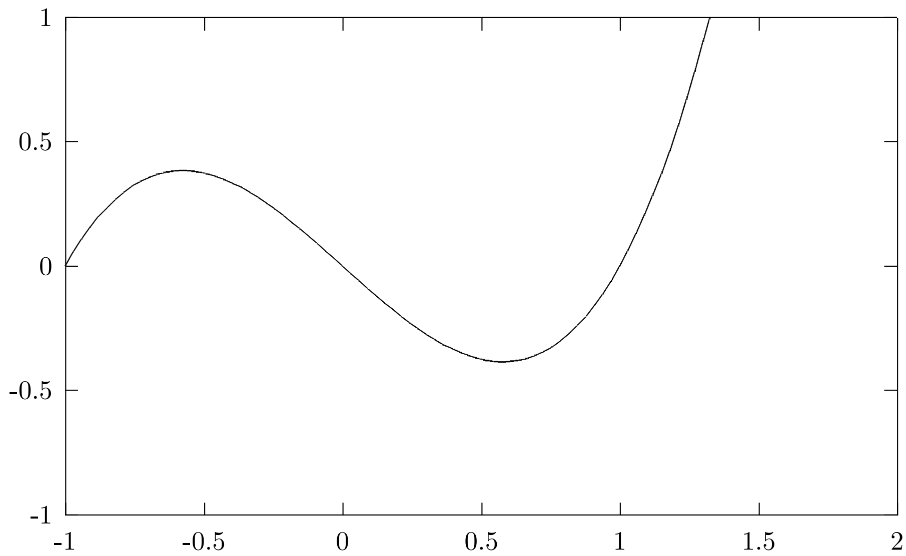
$f(x) = x^3 - x, [-1, 2]$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} :$$

$$f\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} < 0$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$

$f(-1) = 0, f(2) = 6$



Beispiel:

Wir notieren uns folgendes Polynom:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Diese Polynom leiten wir nun j mal ab, woraus sich dann ergibt:

$$p^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k \cdot k \cdot \ldots \cdot (k-j+1) x^{k-j} = \sum_{k=j}^{n} a_k \cdot j! \frac{k!}{j!(k-j)!} x^{k-j} = \sum_{k=j}^{n} a_k j! \binom{k}{j} x^{k-j} =$$
$$= a_j j! + a_{j+1} j! \,(j+1)\, x + \ldots a_{n-j} j! \binom{n-j}{j} x^{n-j}$$

Daraus folgt dann für $x = 0$:

$$p^{(j)}(0) = a_j j! \Rightarrow a_j = \frac{1}{j!} p^{(j)}(0)$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} p^{(k)}(0) x^k$$

Bemerkung:

- f ist stetig in x_0. $\not\Rightarrow$ f ist differenzierbar in x_0 ($f(x) = |x|$, $x_0 = 0$).
- f ist stetig in x_0. $\Leftarrow$ f ist differenzierbar in x_0 ($f(x) = |x|$, $x_0 = 0$).
- f sei differenzierbar auf I. $\Rightarrow$ f' ist auf I definiert. $\not\Rightarrow$ f' ist stetig.

12.Übungsblatt:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

Es sei $n = 2$: $f'(x)$ existiert für jedes x, aber f' ist in 0 unstetig.

$f' \in C^0(I) \Leftrightarrow f$ **stetig differenzierbar** auf I.

$f \in C^1(I)$

$$f \in C^n(I) \Leftrightarrow f^{(n-1)} \in C^1(I)$$
$$\Leftrightarrow f' \in C^{n-1}(I)$$

$f \in C^\infty(I) \Leftrightarrow f \in C^n(I)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Rechtsseitige Ableitung:

  $$x_0 = a : f'(a) = \lim_{x \mapsto a, x > a} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Linksseitige Ableitung:

  $$f'(x_0^-) = \lim_{x \mapsto x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Rechtsseitige Ableitung:

  $$f'(x_0^+) = \lim_{x \mapsto x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

8.6 Der Mittelwertsatz

Satz von Rolle:

> Es sei f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$ ($\xi = a + \vartheta(b - a)$, $0 < \vartheta < 1$)

Beweis:

$f \in C[a, b] \Rightarrow f$ besitzt in $[a, b]$ ein Maximum und ein Minimum. $f(p) = \max\{f(x)|x \in [a, b]\}, p \in [a, b]$.

1.) $p = a \Rightarrow f(a) = f(b) \geq f(x) \forall \in [a, b]$

   i.) $f(a) = f(x) \;\forall\; x \Rightarrow f'(x) = 0 \;\forall\; x$: ξ sei beliebig.

   ii.) $f(a) > f(x)$ für gewisse $x \in (a, b)$. $\Rightarrow$ Minimum $\{f(x), x \in [a, b]\} = f(q)$ mit $q \in (a, b)$. $\xrightarrow[\text{Satz 5}]{}$ $f'(q) = 0$: $q = \xi$

2.) $p \in (a, b) \xrightarrow[\text{Satz 5}]{} f'(p) = 0 : p = \xi$

Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung):

> g, f seien stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Dann gibt es ein $\vartheta \in (0, 1)$ derart, daß $(f(b) - f(a))\, g' \underbrace{(a + \vartheta(b - a))}_{\xi} = (g(b) - g(a))\, f' \underbrace{(a + \vartheta(b - a))}_{\xi}$:
>
> $$\left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right)$$

Beweis:

Wende den Satz von Rolle auf $h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$ an.

$(h(a) = h(b))$

Satz:

Es sei f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es eine Stelle $\xi \in (a, b)$ so, daß folgendes gilt:

$$\boxed{\frac{f(a) - f(b)}{b - a} = f'(\xi)}$$

Analogie:

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$

$b = x, a = x_0 : f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$

$f(x) = \sqrt{x}, \sqrt{66}$

$f(66) = f'(64) + f'(\xi) \cdot 2$

$\sqrt{66} = \sqrt{64} + f'(\xi) \cdot 2$

Anwendungen:

Mit dem Mittelwertsatz können beispielsweise Grenzwerte bestimmt werden:

- Beispiel 1:

$$\boxed{\lim_{n \mapsto \infty} \left(\sqrt[3]{n^2 + a^2} - \sqrt[3]{n^2} \right)}$$

Wir bringen den Term auf eine Form, auf die man den Mittelwertsatz anwenden kann:

$$(a_n) = \sqrt[3]{n^2 + a^2} - \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{n^2 \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)} - \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} - \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{n^2}\left[\sqrt[3]{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} - 1\right] =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2 - 1}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2 - 1}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\left[\sqrt[3]{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} - 1\right] \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{n}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{a^2} \left(\frac{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} - \sqrt[3]{1 + 0^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{n}\right)} - \sqrt[3]{0^2}} \right)$$

Wir vergleichen mit dem Mittelwertsatz:

$$\boxed{\frac{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} - \sqrt[3]{1 + 0^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{n}\right)} - \sqrt[3]{0^2}} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}$$

Dann folgt:

$$\boxed{f(x) = \sqrt[3]{1 + x}, g(x) = \sqrt[3]{x}}$$

$$\boxed{b = \frac{a}{n}, a = 0}$$

Wir leiten die beiden Funktionen ab:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Daraus ergibt sich dann:

$$\frac{\sqrt[3]{1+\left(\frac{a}{n}\right)^2} - \sqrt[3]{1+0^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{n}\right)} - \sqrt[3]{0^2}} = \sqrt[3]{a^2}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \sqrt[3]{a^2}\frac{\sqrt[3]{\xi^2}}{\sqrt[3]{(1+\xi)^2}} = \sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{\frac{\xi^2}{(1+\xi)^2}}$$

Für $n \mapsto \infty$ gilt nun $b \mapsto a = 0$ und somit $\xi \mapsto 0$. Dann resultiert:

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+a^2} - \sqrt[3]{n^2}\right) = \lim_{n\mapsto\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{1+\left(\frac{a}{n}\right)^2} - \sqrt[3]{1+0^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{n}\right)} - \sqrt[3]{0^2}}\right] = \lim_{\xi\mapsto 0}\left[\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{\xi^2}{(1+\xi)^2}}\right] = \boxed{0}$$

Beispiel 2:

$$\boxed{\lim_{n\mapsto\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}$$

Durch Umformung folgt wieder:

$$(a_n) = n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = -\frac{\cos 0 - \cos\frac{1}{n}}{0-\frac{1}{n}}$$

Nach dem ersten Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Dann folgt daraus:

$$\boxed{-\frac{\cos 0 - \cos\frac{1}{n}}{0-\frac{1}{n}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) = -f'(\xi)}$$

Hierbei gilt nun, wie man unschwer sieht:

$$\boxed{f(x) = \cos(x) \text{ mit } f'(x) = -\sin(x)}$$

$$\boxed{b = 0, a = \frac{1}{n}}$$

Daraus folgt dann schließlich:

$$-\frac{\cos 0 - \cos\frac{1}{n}}{0-\frac{1}{n}} = +\sin(\xi)$$

Für $n \mapsto \infty$ gilt nun $b \mapsto a = \frac{1}{n}$ und somit $\xi \mapsto 0$:

$$\lim_{n\mapsto\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\mapsto\infty}\left[-\frac{\cos 0 - \cos\frac{1}{n}}{0-\frac{1}{n}}\right] = \lim_{\xi\mapsto 0}\sin(\xi) = \boxed{0}$$

Satz:

f sei auf dem Intervall I definiert und differenzierbar:

a.) $f'(x) > 0$, $x \in I \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf I

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0$$

b.) $f'(x) < 0$, $x \in I \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend auf I

c.) $f'(x) \geq 0$ auf $I \Leftrightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf I

d.) $f'(x) \leq 0$ auf $I \Leftrightarrow f$ ist monoton fallend auf I

e.) $f'(x) = 0\ \forall\ x \in I \Leftrightarrow f(x) = \text{const.}\ \forall\ x \in I$

Beweis:

c.) „$\leftarrow$“: $x \in I$

Ziel:

$f'(x) \geq 0$ mit f monoton fallend

$x \neq x_1$, x, $x_1 \in I$: $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x_1 \mapsto x} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x), \geq 0$

Satz:

$f : I \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in I = [a, b]$. $f'(x_0) = 0$. Es gelte $f''(x_0) > 0$ (< 0). Dann besitzt f in x_0 ein lokales Minimum (Maximum).

$$f'(x_0) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} > 0$$

Daraus ergibt sich $\dfrac{f'(x_0 + h)}{h} > 0$ für kleine $|h|$:

$f'(x_0 + h) > 0$ für $0 < h <$ kleine Zahl, $f'(x_0 + h) < 0$ für klein Zahl $< h < 0$

$f'(x) = cf(x)$ für c const. $\in \mathbb{C}^n$

$f(x) = \mathrm{e}^{cx}, 2\mathrm{e}^{cx}$

Satz:

Es sei $c \in \mathbb{C}$ konstant. Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ gelte: $f'(x) = cf(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann gilt: $f(x) = f(0)\mathrm{e}^{cx}\ \forall\ x$

Beweis:

Betrachte:

$$F(x) = f(x)\mathrm{e}^{-cx} : F(x) = f'(x)\mathrm{e}^{-cx} + f(x)(-c)\mathrm{e}^{-cx} = \mathrm{e}^{-cx}\left(\underbrace{f'(x) - cf(x)}_{=0}\right) = 0$$

$\Rightarrow F(x) = \text{const.} = F(0) = f(0).$

Folgerung:

$f(x) = \mathrm{e}^x$ ist die gesuchte Lösung des folgenden Problems: $f'(x) = f(x)$, mit $x \in I$ und $f(0) = 1$.

$\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots$

Beispiele:

Betrachte $f'(x) = \mathrm{i}f(x)$, $f(0) = 1$ ($\Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$) und setze $f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$.

$f'(x) = u'(x) + \mathrm{i}v'(x) = \mathrm{i}\,(u(x)u(x) + \mathrm{i}v(x)) = u'(x) + \mathrm{i}v'(x) = -v(x) + \mathrm{i}u(x)$

$\Rightarrow u'(x) = -v(x)$ und $v'(x) = u(x), u(0) = 1, v(0) = 0 \Rightarrow u(x) = \cos x, v(x) = \sin x$

Wir entkoppeln:

$$\left.\begin{array}{l} u''(x) = -v'(x) \\ u(x) = v(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lll} u''(x) + u(x) = 0 & u(0) = 1 & u'(0) = 0 \\ v''(x) + v(x) = 0 & v(0) = 0 & v'(0) = 1 \end{array}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = f(x), |x - x_0| < r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \left(= \lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{a_n}{a - n + 1} \right| \right) \; 0 \leq r \leq \infty$$

f ist stetig für $|x - x_0 < r$. Die Reihe konvergiert absolut für $|x - x_0| < r$ und gleichmäßig für $|x - x_0| \leq r - \epsilon$ $(\alpha < \epsilon < 1)$. Die Reihe ist für $|x - x_0| > r$ divergent.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

$T_n^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)\,(j = 0, 1, \dots, n)$

Betrachten wir den TAYLORsatz für x, $x_0 \in [a, b]$, $f \in C^n[a, b]$. Es gibt ein $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, so daß gilt:

$$(T) f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n}_{R_n(x)} = T_{n-1}(x) + R_n(x)$$

$$(\tilde{T}) = T_{n-1}(x) + (x - x_0)^n \left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(1) \right] \; (x \mapsto x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ (Änderung der Funktionswerte)}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

Beispiel (Anwendung):

$\sqrt[3]{10}, f(x) = \sqrt[3]{x}$

$x = 10, x_0 = 0, n = 3$

$$\sqrt[3]{10} \approx 10\frac{11}{72} + \underbrace{\frac{1}{3!} f'''(8 + \theta \cdot 2)}_{R_3}, 0 < \theta < 1$$

Abschätzung: $0 < R_3 < \dfrac{1}{2^9}$

Satz:

$f \in C^n[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$. Sei $f^{(j)}(x_0) = 0$, $j = 1,2,\ldots,n-1, f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann gilt: Ist n **ungerade**, dann liegt bei x_0 kein lokaler Extremwert. Ist n **gerade**

$$\begin{cases} \text{und } f^{(n)}(x_0) > 0, \text{ so liegt bei } x_0 \text{ ein lokales Minimum.} \\ \text{und } f^{(n)}(x_0) < 0, \text{ so liegt bei } x_0 \text{ ein lokales Maximum.} \end{cases}$$

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \underbrace{\left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(1)\right]}_{\substack{\text{hat bei } x_0 \\ \text{das Vorzeichen von } f^{(n)}}} (x_0)\, x \mapsto x_0$$

a.) n ungerade: Beide Seiten wechseln bei Durchgang durch x_0 das Vorzeichen: kein Extremum

b.) n gerade: $f(x) \leq f(x_0)$ oder $f(x) \geq f(x_0)$ in der Umgebung von x_0 je nach Vorzeichen von $f^{(n)}(x_0)$.

8.6.1 Der Wendepunkt einer Funktion

$f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar. In $x_0 \in [a,b]$ liegt ein **Wendepunkt** für f, falls bei x_0 $f''(x)$ das Vorzeichen wechselt. Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente heißt **Sattelpunkt**.

Satz:

$f \in C^n[a,b]$, $n \geq 3$ sei **ungerade**. Es gelten: $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0), f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann besitzt f in x_0 einen Wendepunkt.

Beweis:

$f''(x)$: Wende $(\tilde{T})$ auf $f''(x)$ an; ersetze n durch $n - z$.

$$f''(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} (f'')^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}_{=0} + (x - x_0)^{n-2} \underbrace{\left[\frac{1}{(n-2)!} f^{(n)}(x_0) + o(1)\right]}_{\text{hat festen Vorzeichenwechsel}}$$

Es sei f in einer Umgebung von x_0 beliebig of differenzierbar. Dann kann folgender Grenzwert gebildet werden:

$$\lim_{n \mapsto \infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(j)}(x_0)(x - x_0)^k = T(x)\,(= T(f(x_0))(x))$ heißt **Taylorreihe** von f in x_0.

1.) Gegeben ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$. Diskutiert wird die hierdurch gegebene Funktion.

2.) Gegeben ist f. Gesucht ist die Potenzreihe, die diese Funktion darstellt.

Satz:

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit dem Konvergenzradius r.

1.) Die hierdurch definierte Funktion $f : f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, $|x-x_0| < r$ ist für jedes $x : |x-x_0| < r$ beliebig oft differenzierbar.

2.) Die Ableitungen erhält man durch gliedweises Differenzieren:

$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ und diese Reihe hat wieder den Konvergenzradius r.

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-j+1)a_k(x-x_0)^{k-j} \text{ für } j = 0, 1, 2, \ldots$$

Es ist $f^{(j)}(x_0) = j!a_j$. Das heißt: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$. (Die gegebene Potenzreihe ist die TAYLORreihe der durch sie dargestellte Funktion.)

Begründungen (Übung):

$$\boxed{r = \frac{1}{\limsup \sqrt[k-1]{k|a_k|}}} \Leftarrow r = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Spezialfall: Wir nehmen an, daß $\frac{1}{r} = \lim\limits_{k\mapsto\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$:

$$\lim_{k\mapsto\infty} \sqrt[k-1]{k|a_k|} = \frac{1}{r} : \sqrt[k]{k} \mapsto 1 \text{ für } k \mapsto \infty$$

Man folgere, daß $\sqrt[k-1]{k} \mapsto 1$ für $k \mapsto \infty$. Außerdem ist zu verwenden:

$$\left(|a_k|^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \sqrt[k-1]{|a_k|} = \frac{1}{r}$$

Des weiteren nütze man folgende Abschätzung:

$$\sqrt[k]{k-1} < \sqrt[k]{k} < \sqrt[k-1]{2(k-1)}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$$

$$\left(\lim_{n\mapsto\infty} S_n(x)\right)' = \left(\lim_{n\mapsto\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right)' = \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{k=1}^{n} k a_k(x-x_0)^{k-1}$$

$$\left(\lim_{n\mapsto\infty} S_n(x)\right)' = \lim_{n\mapsto\infty} S_n'(x)$$

Es handelt sich also um die Vertauschung von zwei Grenzübergängen. Die notwendige Begründung wird später bei der Integralrechnung geliefert.

Beispiel:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \text{ für } |x| < 1,\ r = 1$$

Aus dieser Reihendarstellung der Funktion $f(x)$ lassen sich die Koeffizienten ablesen:

$$a_{2k} = (-1)^k = \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0)$$

$$a_{2k+1} = 0 = \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(0)$$

Der Grenzwert kann mittels der **Geometrischen Reihe** berechnet werden:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Beispiel:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \text{ für } \alpha \neq 0,\ 1,\ 2,\ \dots \text{ und } |x| < 1$$

Es gilt $r = 1$ und außerdem dem Zusammenhang $(1+x)f'(x) := \alpha f(x)$ mit $f(0) = 1$. Zur Erinnerung:

$$f'(x) = f(x) \text{ für } x \in \mathbb{R},\ f(0) = 1 \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^x$$

$$u'(x) = v(x)$$

$$v'(x) = -u(x)$$

$$u(0) = 0, v(0) = 1$$

$$u(x) = \sin x$$

$$v(x) = \cos x$$

Wiederholung:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k, R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n, \xi = x_0 + \vartheta(x-x_0), 0 < \vartheta < 1$$

Der **Taylorsatz** lautet:

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x), f \in C^{n+1}(I), x, x_0 \in I$$

$$T(x)(= T(f(x_0)(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^2 = \lim_{n \mapsto \infty} T_n(x)$$

Satz:

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k, \mathbb{D} = \{x||x-x_0| < r\}$$

Es ist $f \in C^{\infty}(\mathbb{D})$ und es gilt: $f(x) = T(f(x_0))(x)(x \in \mathbb{D})$

$$\Rightarrow (a_k) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

8.6.2 Binomische Reihe

$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$

$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, r = 1; |x| < 1$

$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k, |x| < 1$

$f(x) = F(x) + C$

$f(0) = 1$

Wir multiplizieren mit $(1+x)$:

$$(1+x)f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\binom{\alpha}{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\binom{\alpha}{k+1}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}k\binom{\alpha}{k}x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\binom{\alpha}{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}k\binom{\alpha}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left[(k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k}\right]}_{\alpha\binom{\alpha}{k}}x^k = \alpha f(x)$$

Somit gilt:

$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ für $|x| < 1$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $(1+x)^{-\alpha-1}$ durch, woraus dann folgt:

$(1+x)^{-\alpha}f'(x) - \alpha(1+x)^{-\alpha-1}f(x) = 0$

Der Ausdruck auf der linken Seite stellt gerade die Ableitung folgender Funktion dar:

$\left((1+x)^{-\alpha}f(x)\right)'$

Somit folgt:

$\left((1+x)^{-\alpha}f(x)\right)' = 0$ für $|x| < 1$

Damit folgt dann durch Aufleiten:

$(1+x)^{-\alpha}f(x) = \text{const.}$

Mit $f(0) = 1$ ergibt sich nun durch Einsetzen von 0 für die Konstante:

$(1+0)^{-\alpha}f(0) = 1$

Somit gilt also:

$(1+x)^{-\alpha}f(x) = 1$

Daraus ergibt sich dann endgültig die binomische Reihe:

$$\boxed{f(x) = (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \text{ für } |x| < 1}$$

Anwendungen:

Mittels der binomischen Reihe kann man also Funktionen der Form $(1+x)^\alpha$ entwickeln.

- Für $\alpha = -1$ folgt beispielsweise:

  $$\binom{-1}{k} = (-1)^k$$

  Damit folgt nun:

  $$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k \text{ für } |x| < 1$$

  Wir führen außerdem die Variablentransformation $x \mapsto -x$ durch:

  $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, |x| < 1$$

  $$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k, |x| < 1$$

- Für $\alpha = \frac{1}{2}$ können wir die Wurzelfunktion entwickeln:

  $$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = \frac{1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-2k+3)}{2^k k!} = (-1)^{k-1}\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-3)}{2^k k!}$$

  $$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{86}x^3 \mp \ldots$$

  Hiermit kann man nun näherungsweise den Wert von $\sqrt{2}$ bestimmen:

  $$\sqrt{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot 2^k = 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{8}2^2 + \frac{3}{86}2^3 \mp \ldots$$

Problem:

Gegeben sei f auf I mit $x_0 \in I$. Für welche $x \in I$ kann $f(x)$ in eine Potenzreihe um x_0 entwickelt werden? Gesucht sind a_k und $x \in I$, so daß $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ gilt.

Satz:

1.) f muß unendlich oft differenzierbar sein.

2.) $f(x) = T(f,x_0)(x) = \lim_{n\mapsto\infty} T_n(f(x_0))(x)$

$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x) \Rightarrow R_{n+1}(x)$ muß gegen Null streben für $n \mapsto \infty$

Satz:

Es sei f auf (a,b) unendlich oft differenzierbar $x_0 \in (a,b)$. Dann konvergiert $T(f,x_0)(x)$ für diejenige $x \in (a,b)$ gegen $f(x)$, für die $R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0)) \mapsto 0$ für $n \mapsto \infty$.

Beispiel:

$f(x) = \ln(1+x)(x > -1), x_0 = 0$

1.) $f^{(n)}(0) | f'(x) = \dfrac{1}{1+x}, f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)2}$

Wir vermuten den folgenden Zusammenhang:

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{1}{(1+x)^n}$ für $n = 1,\, 2,\, \ldots$

Als Übung kann man den Beweis durch vollständige Induktion erbringen.

$$T(f,0)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^{k-1}(k-1)!x^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k \text{ für } |x| < 1$$

2.) Für welche x konvergiert die Reihe von $\ln(1+x)$?
Das sind die $x \in (-1, +1]$, für die $R_{n+1}(x) \mapsto 0$ für $n \mapsto \infty$. $(\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0) = \vartheta x)$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}(-1)^n n! \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}} x^{n+1}$$

$$\boxed{R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+x\vartheta)^{n+1}} x^{n+1}}$$

Das Ergebnis ist:

$R_{n+1}(x) \mapsto 0$ für $\;-1 < x \leq 1$

Wir zeigen hier zunächst:

$R_{n+1}(x) \mapsto 0\,(n \mapsto \infty)$ für $\;-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$

a.) Für $0 \leq x \leq 1$ schätzen wir folgendermaßen ab:

$$\boxed{|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \cdot 1 \mapsto 0 \text{ für } n \mapsto \infty}$$

b.) Für $-1 < x < 0$ schätzen wir mittels der Dreiecksungleichung ab:

$|1 + \theta x| \geq 1 - \theta|x| > 1 - |x|$

Somit folgt dann:

$$\boxed{|R_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{n+1}} \frac{1}{n+1} = \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1} \mapsto 0 \text{ für } n \mapsto \infty \text{ und } -\frac{1}{2} \leq x \leq 0}$$

$g(t) = \frac{t}{1-t}$ ist monoton wachsend.

$0 \leq x < 1,\; g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$

Wir notieren uns nun die Reihe:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots - 1 < x \leq 1}$$

$f(x) = \ln(x)$ soll um $x_0 > 0$ entwickelt werden mit $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$. Damit folgt:

$$f(x) = \ln(x_0 + x - x_0) = \ln\left(x_0\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)\right) = \boxed{\ln x_0 + \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)}$$

8.7 Angenäherte Lösung von Gleichungen

$g(x) = 0 \Leftrightarrow$ Fixpunktgleichung: $f(x) = x$

$\Phi(x) \neq 0 : \underbrace{\Phi(x)g(x) + x}_{f(x)} = x, \Phi(x) = -\dfrac{1}{g(x)}$

8.7.1 Fixpunktkriterium/Sukzessive Approximation

Satz:

$f \in C^1[a,b]$ besitze die folgenden **Eigenschaften**:

1.) $a \leq f(x) \leq b (x \in [a,b])$.

2.) Es gilt: $|f'(x)| \leq q < 1 \; \forall \; x \in [a,b]$, q ist eine feste Zahl

Dann gelten:

a.) Es gibt genau ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

b.) Die Folge (x_n): $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit beliebigem $x_0 \in [a,b]$ konvergiert gegen ξ.

c.) Es gilt die Fehlerabschätzung: $|\xi - x_n| \leq \dfrac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leq \dfrac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$

Beweis:

Der erste Schritt ist es, den Mittelwertsatz anzuwenden. Damit ergibt sich für x, $y \in [a,b]$:

$|f(x) - f(y)| = f'(\xi)(x-y)| \leq q|x-y|$

$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq q|x_n - x_{n-1}| \leq q^2|x_{n-1} - x_{n-2}|$

So folgt dann nach n Schritten:

$(x_{n+1} - x_n) \leq q^n(x_1 - x_0)$ für $n \in \mathbb{N}$

Außerdem gilt:

$$x_{n+1} = x_0 + \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{a_k}$$

Nun gilt die Abschätzung:

$|a_k| \leq c_k = q^k(x_1 - x_0)$

Wir haben somit eine konvergente Majorante. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)$ konvergiert, da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert. Somit ist auch die Folge (x_n) eine Nullfolge und $x_n \mapsto \xi$ für $n \mapsto \infty$ und $\xi \in [a,b]$.
f ist außerdem stetig, daher können hier die Grenzübergänge vertauscht werden:

$$\lim_{n \mapsto \infty} x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow \xi = \lim_{n \mapsto \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \mapsto \infty} x_n\right) = f(\xi)$$

ξ ist der einzige Fixpunkt. Aus $\eta = f(\eta)$ folgt $(\xi - \eta) = |f(\xi) - f(\eta)| \leq q \cdot (\xi - \eta)$. Daraus resultiert schlußendlich:

$$0 \leq \underbrace{\overbrace{(1-q)}^{\neq 0}|\xi - \eta|}_{=0} \leq 0$$

Und somit gilt:

$\xi = \eta$

Fehlerabschätzung:

$|\xi - x_n| = |f(\xi) - f(x_n)) + f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq |f(\xi) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq q|\xi - x_n| + q|x_n - x_{n-1}|$

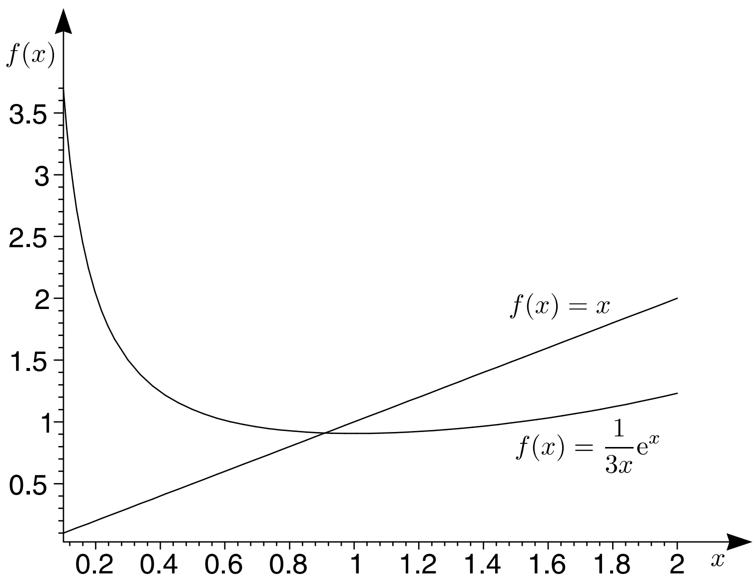
$(1-q)|\xi - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}| \leq q^n(x_1 - x_0)$

Beispiel:

$g(x) = \mathrm{e}^x - 3x^2 = 0$

In $(0,1)$ gibt es eine Nullstelle. Wir bringen die Gleichung auf die Form, so daß ein x auf der linken Seite steht:

$x = \frac{1}{3x}\mathrm{e}^x = f(x_0)$



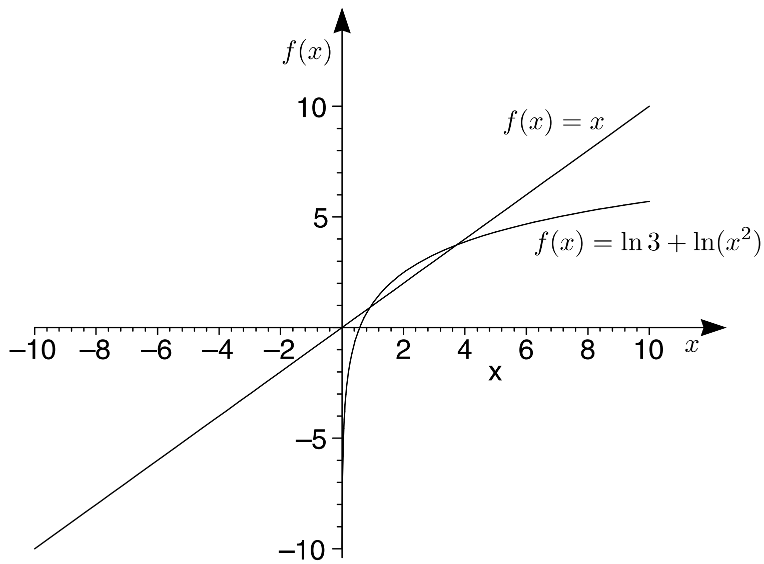
Dieses Ergebnis ist jedoch nicht brauchbar, weil die Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Deshalb logarithmieren wir die Gleichung zuerst:

$\mathrm{e}^x = 3x^2$

$x = \ln 3 + \ln(x^2)$

Damit folgt:

$\boxed{x = \ln 3 + 2\ln x = f(x)}$



Hier sind nun die Voraussetzungen erfüllt.

1.) $f : (0,1) \mapsto (0,1)$

2.) $|f(x)| < \frac{1}{2}, r \in [a,b]$

Als Startwert verwenden wir $x_0 = 4$, woraus dann folgt:

$x_1 = \ln 3 + 2\ln x_0 = \ln 3 + 2\ln 4 = 3,8712$

$x_2 = \ln 3 + 2\ln x_1 = \ln 3 + 2\ln 3,8712 = 3,8057$

$x_3 = 3,7716$

$x_4 = 3,7536$

$x_5 = 3,7441$

$x_6 = 3,7390$

$\boxed{x_7 = 3,7362}$

Hier brechen wir ab und setzen zur Probe in die ursprüngliche Gleichung ein:

$g(x) = \mathrm{e}^x - 3x^2 = 0$

$\mathrm{e}^{3,7362} - 3(3,7362)^2 = 0,061$

Die Übereinstimmung ist also recht gut; wir erhalten einen Fehler von $0,15\%$.

8.7.2 Newton-Verfahren

$\underbrace{\Phi(x)g(x)}_{=f(x)} + x = x$

$f'(x) = \Phi'(x)g(x) + \Phi(x)g'(x) + 1 \approx 0$

$\Phi(x) = -\frac{1}{g(x)}$

$\Rightarrow \underbrace{x - \frac{g(x)}{g'(x)}}_{f(x)} = x$

$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$

$|f'(x) \leq q < 1|$ läßt sich formulieren als Bedingung aus $g, g', g'', \ldots$. Wenn $f''(x) > 0$ (Funktion ist konvex), dann konvergiert die Folge.

Nebenbemerkung zu Übungsblatt XII (Aufgabe 7):

$g(x) = x^k - a = 0 (a > 0), k \in \mathbb{N}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}} g(x) = x^k - a$

$x_0^k > a$

Kapitel 9

Integralrechnung

9.1 Berechnung des Flächeninhalts unter einer Kurve

1. Gesucht ist der Flächeninhalt
2. Gesucht ist eine Funktion, deren Ableitung wieder die Funktion selbst ist.

Wir wollen uns zuerst mit dem zweiten Problem beschäftigen. Wir zerlegen die Funktion in „Streifen“:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

Es sei Z_n: $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ die Zerlegung von $[a, b]$ in n Intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ für $k = 1, 2, \ldots, n$, wobei $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ und $l(Z_n) = \max\{\Delta_k$ für $k = 1, 2, 3, \ldots, n\}$. Wähle nun

- $m_k = \min\{f(x), x \in I_k\}$
- $M_k = \max\{f(x), x \in I_k\}$

und bilde:

$\omega(Z_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta_k$ und $\Omega(Z_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta_k$

Darüber hinaus wähle $\xi_k \in I_k$ und bilde $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta_k = S(Z_n)$

$$\underbrace{\omega(Z_n)}_{\text{Untersummen}} \leq \underbrace{S(Z_n)}_{\text{Zwischensummen}} \leq \underbrace{\Omega(Z_n)}_{\text{Obersummen}}$$

- $\omega(Z)$ ist monoton wachsend (Zerlegung von $[a, b]$), mit $l(z) \mapsto 0$
- $\Omega(Z)$ ist monoton fallend (Zerlegung von $[a, b]$), mit $l(z) \mapsto 0$
- $\underline{I}(f) = \sup(\omega(Z))$, Z ist Zerlegung von $[a, b]$, $l(Z) \mapsto 0$
- $\overline{I}(f) = \inf(\Omega(Z))$, Z ist Zerlegung von $[a, b]$, $l(Z) \mapsto 0$

Definition:

Falls $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ gilt, so heißt dieser gemeinsame Wert das **bestimmte Integral** von f über $[a, b]$. Wir schreiben dafür:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\lim_{n\mapsto\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k}_{\text{für jede Zerlegung } Z_n \text{ mit } l(Z_n)\mapsto 0\,(n\mapsto\infty)}$$

Eine Möglichkeit, Z_n zu wählen, ist die äquidistante Zerlegung:

$x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$

$\Delta_k = \dfrac{b-a}{n}$

Damit sehen die Ober- und Untersummen folgendermaßen aus: Mit $\xi_k = x_k$ haben wir:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Satz:

Es sei f stetig auf dem beschränkten Intervall $[a, b]$. Dann existiert $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Man kann $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ beispielsweise durch $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ berechnen.

Beispiele:

- Beispiel 1:

  $$\boxed{\lim_{n\mapsto\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}}$$

  Daraus folgt:

  $$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)$$

  $f(x_k) = \dfrac{1}{1+x^2}$ mit $x_k = \dfrac{k}{n}$

  x_k liefert für $k = 0, \ldots, n-1$ eine äquidistante Einteilung des Intervalls $[0; 1]$. Dann ergibt sich für den Grenzwert:

  $$\lim_{n\mapsto\infty} S_n = \lim_{n\mapsto\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

- Beispiel 2:

  $$\boxed{\lim_{n\mapsto\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}}$$

  Dann ergibt sich durch Umformung:

  $$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_k)$$

$f(x_k) = \dfrac{1}{1+x}$ mit $x_k = \dfrac{k}{n}$

x_k liefert für $k = 1, \ldots, n$ eine äquidistante Einteilung des Intervalls $[0;1]$. Dann ergibt sich für den Grenzwert:

$$\lim_{n\mapsto\infty} S_n = \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \boxed{\ln 2}$$

Beispiel 3:

$$\boxed{\lim_{n\mapsto\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}}$$

Dann ergibt sich:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \lim_{n\mapsto\infty} (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$$

$f(x_k) = \dfrac{x}{1+x^2}$ mit $x_k = \dfrac{k}{n}$

x_k liefert für $k = 1, \ldots, n$ eine äquidistante Einteilung des Intervalls $[0;1]$. Dann ergibt sich für den Grenzwert:

$$\lim_{n\mapsto\infty} S_n = \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$$

Beispiel 4:

Folgender Grenzwert soll ermittelt werden:

$$\boxed{\lim_{n\mapsto\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{\mathrm{e}^{-k}}}$$

Wir formen S_n um:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{\mathrm{e}^{-k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{k}{n}}$$

Dann folgt:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$$

$f(x_k) = \mathrm{e}^{-x}$ mit $x_k = \dfrac{k}{n}$

x_k liefert für $k = 1, \ldots, n$ eine äquidistante Einteilung des Intervalls $[0;1]$. Dann ergibt sich für den Grenzwert:

$$\lim_{n\mapsto\infty} S_n = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$

Beispiel 5:

Der Grenzwert folgendes Produktes soll ermittelt werden:

$$\boxed{\lim_{n\mapsto\infty}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(n+k)^{\frac{1}{n}}}$$

Wir formen das Produkt in eine Summe um:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(n+k)^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\ln\left[\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(n+k)^{\frac{1}{n}}\right]\right) = \exp\left(\ln\left[\frac{1}{n}\right]+\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)^{\frac{1}{n}}\right) = \\ &= \exp\left(\ln\left[\frac{1}{n}\right]+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right) = \exp\left(\ln\left[\frac{1}{n}\right]+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left[n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]\right) = \\ &= \exp\left(-\ln n+\frac{1}{n}\cdot n\ln n+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-x_{k-1}\right)f(x_k)\right)\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$f(x_k)=\ln(1+x)\ \text{mit}\ x_k=\frac{k}{n}$$

x_k liefert für $k=1,\,\ldots,\,n$ eine äquidistante Einteilung des Intervalls $[0;1]$. Dann ergibt sich für den Grenzwert:

$$\lim_{n\mapsto\infty}\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \exp\left(\int\limits_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\right) = \exp\left(\left[(1+x)\ln(1+x)-(1+x)\right]_0^1\right) =$$

$$= \exp\left(2\ln 2-1\right) = \exp(-1)\cdot\exp(2\ln 2) = \exp(-1)\cdot\exp(\ln 4) = 4\exp(-1) = \boxed{\frac{4}{\mathrm{e}}}$$

Beispiel 6:

Es soll der Grenzwert folgender Summe berechnet werden:

$$\boxed{\lim_{n\mapsto\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^j}{n^{j+1}}}$$

Diese Summe formen wir um:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^j}{n^{j+1}} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^j}{n^j\cdot n} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{k=1}^{2n}(x_k-x_{k-1})f(x_k)$$

Nun gilt:

$$f(x)=x^j\ \text{mit}\ x_k=\frac{k}{n}$$

x_k liefert für $k=1,\,\ldots,\,2n$ eine äquidistante Einteilung des Intervalls $[0;2]$. Daraus folgt nun für den Grenzwert:

$$\lim_{n\mapsto\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\cdot\int\limits_0^2 x^j\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\cdot\frac{1}{j+1}\left[x^{j+1}\right]_0^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\cdot\frac{1}{j+1}\cdot 2^{j+1} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+1)!}2^{j+1}$$

Dies ist nun nichts anderes als die Reihenentwicklung für die Exponentialfunktion. Damit ergibt sich nun:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} 2^{j+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} 2^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} 2^j - 1 = \boxed{\mathrm{e}^2 - 1}$$

Folgende Definitionen sind unmittelbar klar.

Definitionen:

1.) $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

2.) $\lambda,\ \rho \in \mathbb{C};\ f,\ g \in C^0[a,b]$. Dann gilt:

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \rho g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \rho \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

3.) Für komplexe Funktionen gilt: $f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int\limits_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$

4.) $\alpha \leq \beta \leq \gamma$: $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_\beta^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x$

Es sei f auf $[a,b]$ stückweise stetig, d.h. es gibt endlich viele Unstetigkeiten $a_1, \ldots, a_n$ $(a_1 < a_2 < \ldots < a_n)$, wobei $\lim\limits_{x \mapsto a_j} f(x)$ und $\lim\limits_{x \mapsto a_j +} f(x)$ existieren. Dann wird definiert:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k}^{n-1} \int\limits_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a_n}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis von 4.):

Dies gilt für jede Anordnung von α, β, γ zueinander. Es sei $\gamma \leq \alpha \leq \beta$:

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_\beta^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_\gamma^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_\gamma^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel:

Wir berechnen das Integral von a bis b von $f(x) = x$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \mapsto \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \mapsto \infty} \left(a(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k\right) \overset{\frac{n}{2}(n+1)}{=}$$

$$= a(b-a) + (b-a)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Beispiel:

$$\int_0^b \cos x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos k\frac{b}{n}\right)$$

Wir benutzen folgende Formel (11.Übungsblatt):

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}(x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z})$$

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos k\frac{b}{n}\right) = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{b}{n} \left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{b}{n}}{2\sin\frac{b}{2n}} - \frac{1}{2}\right) = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{\frac{b}{2n}}{\sin\frac{b}{2n}} \sin\left(b+\frac{b}{2n}\right) = \sin b$$

Als nächstes verwenden wir:

$$\int_a^b \cos x\mathrm{d}x = \int_0^a \cos x\mathrm{d}x + \int_0^b \cos x\mathrm{d}x = \sin b - \sin a$$

Definition:

Aus $f(x) \geq 0$ und $a \leq y \leq b$ folgt $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

Bemerkungen:

a, b bezeichnen wir als Integrationsgrenzen, x ist die Integrationsvariable und $f(x)$ der Integrand.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

9.1.1 Integration von Ungleichungen

Satz:

Es sei f, $g \in C^0[a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, $a \leq x \leq b$. Dann gilt $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Beweis:

Wir schreiben $g(x) - f(x) \geq 0$. Daraus folgt durch Anwendung der vierten Regel:

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \geq 0$$

Danach wenden wir die zweite Regel an:

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

Folgerung:

Es ist $|\alpha| \leq \beta \Leftrightarrow -\beta \leq \alpha \leq \beta$ und außerdem sei $f \in C^0[a,b]$. Jede reelle Zahl können wir nach oben bzw. nach unten durch den Betrag abschätzen:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$\underbrace{-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{-\beta} \leq \underbrace{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}_{\alpha} \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{\beta}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \,(a < b)$$

Dies gilt nach der Dreiecksungleichung! Außerdem können wir daraus folgern:

$$f \in C^0[a,b] : \max\{f(x)|a \leq x \leq b\} = \|f\| \geq |f(x)|\,, x \in [a,b]$$

$$f, g \in C^0[a,b] : |f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq \|f\|\,|g(x)| \; a \leq x \leq b$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \|f(x)\| \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$g(x) = 1 : \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|f\|(b-a)$$

Satz:

> $f_1,\ f_2 \in C^0[a,b],\ f_1(x) \leq f_2(x)\ a \leq x \leq b$. Es sei $G = \{(x, y|f_1(x) \leq y \leq f_2(x),\ a \leq x \leq b\}$. Dann ist der Flächeninhalt von G gegeben durch $I(G) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x$.

Folgerung:

$f \in C^0[a,b]$. G sei der Bereich, der von den Geraden $x = a$ und $x = b$, von der xAchse und vom Graphen von f berandet wird. Dann gilt:

$$I(G) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

9.2 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz:

> $f,\ g \in C^0[a,b],\ f(x) \geq 0,\ a \leq x \leq b$. Außerdem ändert $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ das Vorzeichen nicht. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ $(\xi = a + \vartheta(b-a), a < \vartheta < 1)$ mit: $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Spezialfall für $f = 1$:

$$\boxed{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)(b-a)}$$

Beweis:

Wir betrachten eine Funktion $h(t) = g(t)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $a \le t \le b$, $h \in C^0[a,b]$.

$g(x_2) = \min\{g(x), a \le x \le b\} \le g(x) \le g(x_1) = \max\left\{g(x), a \le x \le b\right\}, x_1 \in [a,b]$

$f(x)g(x_2) \le g(x)f(x) \le g(x_1)f(x), a \le x \le b.$

$h(x_2) \le \int\limits_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x \le h(x_1)$

Da h stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in (a,b)$ mit $h(\xi) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

Anwendung:

Wir wollen den Grenzwert für $n \mapsto \infty$ folgender Funktionenfolge bestimmen:

$$\boxed{F_n(x) = \int_{-1}^{1} f_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x}$$

Hier folgt dann mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \lim_{n\mapsto\infty} F_n(x) = \lim_{n\mapsto\infty} n\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\mapsto\infty} f(\xi)\cdot n\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+(nx)^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{n\mapsto\infty} f(\xi)\cdot n\cdot\left[\frac{1}{n}\arctan(nx)\right]_{-1}^{1} = \lim_{n\mapsto\infty} f(\xi)\cdot n\cdot\frac{1}{n}\left[\arctan(n)-\arctan(-n)\right] = \\
&= \boxed{\lim_{n\mapsto\infty} f(\xi)\left[\arctan(n)-\arctan(-n)\right]}
\end{aligned}$$

Für $f_n(x)$ folgt für $n \mapsto \infty$:

$$\lim_{n\mapsto\infty} f_n(x) = \lim_{n\mapsto\infty} n\frac{f(x)}{1+n^2x^2} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \neq 0 \\ \infty & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

Also nähert sich die Zwischenstelle ξ für $n \mapsto \infty$ dem Wert 0 an:

$$\boxed{\xi \mapsto 0 \text{ für } n \mapsto \infty}$$

Dann ergibt sich schließlich:

$$F(x) = \lim_{n\mapsto\infty} f(\xi)\left[\arctan(n)-\arctan(-n)\right] = f(0)\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi\cdot f(0)}$$

9.3 Die Stammfunktion

Definition:

Gegeben ist $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : I \mapsto \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, falls F auf I differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$, $x \in I$ erfüllt.

Plausibilitätsüberlegung:

x_0, x_1, …, x_n sei eine Zerlegung von I: $a = x_0$, $b = x_0$. Nun wenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an:

$$\sum_{k=1}^{n} : F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) : \xi_k \in (x_{k-1}, x_k), k = 1, 2, \ldots, n$$

Wir summieren beide Seiten auf und erhalten (links steht eine Teleskopsumme!):

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \Rightarrow \int\limits_a^b F'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

9.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz:

$f \in C^0[a, b]$, $c \in [a, b]$ sei beliebig, aber fest. Dann gelten:

1.) Die durch $F_c(x) := \int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t$, $a \leq x \leq b$ definierte Funktion F_c ist Stammfunktion von f. Jede andere Stammfunktion von f hat die Form $F_c(x) + k$ mit $k = \text{const.}$.

2.) Ist F Stammfunktion von f, so gilt $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)|_{x=a}^{b}$

Beweis von 1.):

$$F_c(x + h) - F_c(x) = \int\limits_c^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int\limits_c^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = \underbrace{f(\xi)h}_{\xi \in (x, x+h)}$$

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{1}{h} \left(F_c(x + h) - F_c(x)\right) = \lim_{h \mapsto 0} f(\xi) = f(x) = F_c'(x)$$

Sei F eine andere Stammfunktion:

$$\left(F - F_c\right)'(x) = 0 \Rightarrow F(x) - F_c(x) = k$$

Beweis von 2.):

$$F(b) - F(a) = F_c(b) + k - F_c(a) - k = F_c(b) - F_c(a) = \int\limits_c^b f(t)\mathrm{d}t - \int\limits_c^a f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

$$D\left(\int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x)$$

Bemerkungen:

Es gilt also folglich:

$F'(x) = f(x), a \leq y \leq b$

$$\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a),\ \int\limits_a^b F'(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a),\ \int\limits_a^x F'(x)\mathrm{d}t = F(x) - F(a),\ \int\limits_c^x F'(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(c)$$

Man schreibt bei der Differentiation von Integralen:

$$D_x\left(\int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t\right) \text{ oder } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t\right)$$

Beispiel:

$$D_x\left(\int f(t)\mathrm{d}t\right) = -f(x)$$

9.4.1 Das unbestimmte Integral:

$\int f(x)\mathrm{d}x$ von f ist die Menge aller Stammfunktionen von f.

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \left\{\int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t + k, k \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\int\limits_c^x f(t)\mathrm{d}t, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Beispiel:

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$$

Für ein unbestimmtes Integral lassen wir die untere Grenze bei der Schreibweise weg:

$$\int\limits^x \cos t \mathrm{d}t = \sin x$$

Beispiele:

$$\int\limits^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$D_t\left(\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\right) = t^\alpha \Rightarrow \int\limits^x t^\alpha \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}$$

Für $\alpha = -2$ gilt somit:

$$\int\limits^x t^{-2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}$$

Doch hier ist **Vorsicht** geboten:

$$\int\limits_{-1}^2 = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^2 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \text{ ist falsch, da } f \text{ bei 0 unendlich groß wird.}$$

$$\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\cos x$$

$$\left(-\cos^2 x\right)' = 2\sin x\cos x$$

$$\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' = 2\sin x\cos x$$

In der Formelsammlung findet man beispielsweise:

$$\int 2\sin x\cos x = \sin^2 x$$

$$\int 2\sin x\cos x = -\cos^2 x$$

$$\int 2\sin x\cos x = -\frac{1}{2}\cos^2 x$$

$$\not\Rightarrow \sin^2 x = -\cos^2 x = -\frac{1}{2}\cos^2 x$$

<u>**Weitere Tricks:**</u>

$$\int^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^x \left(f^2\right)'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}f^2(x)$$

$$\int^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t = \int^x (\ln|f(t)|)'\,\mathrm{d}t = \ln|f(x)|$$

<u>**Beispiel:**</u>

$$\int^x \tan t\mathrm{d}t = -\int^x \frac{(\cos t)'}{\cos t}\mathrm{d}t = -\ln|\cos t|$$

9.4.2 Wichtige Stammfunktionen:

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x, \int^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan t$$

<u>**Beispiel zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:**</u>

$$p(x) = \int_c^{g(x)} h(t)\mathrm{d}t$$

Mit der Kettenregel folgt:

$$q(\tau) = \int_c^{\tau} h(t)\mathrm{d}t \Rightarrow q'(\tau) = h(\tau)$$

$$p(x) = q(g(x)) \Rightarrow p'(x) = q(g(x))g'(x) = h(g(x))g'(x)$$

$$u(x) = \int_{(f(x)}^{g(x)} h(t)\mathrm{d}t = \int_c^{g(x)} h(t)\mathrm{d}t + \int_{f(x)}^{c} h(t)\mathrm{d}t$$

$$u'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$$

Übung:

$$p(x) = \int\limits_{x^3}^{\sin x} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}$$

9.4.3 Die partielle Integration

Satz:

$f,\ g \in C^1[a,b]$. Dann gilt:

$$\int\limits_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(t)g(t)|_a^b - \int\limits_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Oder: $\int f(t)g'(t)\mathrm{d}t = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)\mathrm{d}t$

Beweis:

$(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$

$$\int\limits_a^b (f(t)g(t))'\,\mathrm{d}t = f(t)g(t)|_a^b = \int\limits_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t + \int\limits_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

Beispiele:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \int \underbrace{\frac{1}{t}}_{g(t)}\underbrace{\frac{1}{\ln t}}_{f(t)}\mathrm{d}t = 1 + \int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

$\Rightarrow 1 = 0$

$g(t) = \ln t, f'(t) = -\frac{1}{(\ln t)^2}\frac{1}{t}$

$$\int\limits_c^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = 0 + \int\limits_c^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

Hier drehen wir uns im Kreis, wir wenden einen Trick an:

$$\int\limits^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \int\limits^x \frac{\frac{1}{t}}{\ln t}\mathrm{d}t = \ln(\ln x)$$

$$\int f(t)\mathrm{d}t = \int \underbrace{1}_{g(t)} \cdot f(t)\mathrm{d}t = tf(t) - \int tf'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int \ln t\mathrm{d}t = t\ln t - \int \mathrm{d}t = t\ln t - t$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int x\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + \arcsin x$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)$$

$$\int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Wir haben gerade die Fläche eines Halbkreises berechnet.

9.5 Die Substitutionsregel

Satz:

I sei beschränktes Intervall, $\varphi \in C^1[a,b]$: φ: $[a,b] \mapsto I$, $f \in C^0(I)$. Dann gilt:

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Setze $x = \varphi(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Beweis:

$$G(\tau) = \int\limits_a^\tau f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t : G(a) = 0, G'(\tau) = f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)$$

$$H(\tau) = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(\tau)} f(x)\mathrm{d}x$$

$H(a) = 0, H'(\tau) = f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)$

$a \le \tau \le b$

$\Rightarrow G(\tau) - H(\tau) = \text{const.} = G(a) - H(a) = 0$

$\Rightarrow G(\tau) = H(\tau), a \le \tau \le b$

$\Rightarrow G(b) = H(b)$

Beispiele:

$$\varphi(t) = t + c : \int\limits_a^b f(t+c)\mathrm{d}t = \int\limits_{a+c}^{b+c} f(t)\mathrm{d}t$$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-c)^n} = \int^{x-c} \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \frac{1}{1-n}t^{1-n}\Big|^{x-c} = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-c)^{n-1}}, n > 1$$

$f(t) = \dfrac{1}{t^n} : f(t-c)$

$\varphi(t) = tc$

$\varphi'(t) = c$

$$c\int\limits_a^b f(tc)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{ac}^{bc} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dies können wir beispielsweise bei der Berechnung des folgenden Grenzwertes verwenden:

$$\lim_{c\mapsto 0}\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\lim_{c\mapsto 0}\int\limits_a^b f(tc)\,\mathrm{d}t = \lim_{c\mapsto 0}\frac{1}{c}\int\limits_{ac}^{bc} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{c\mapsto 0}\frac{+f(bc)b - f(ac)a}{1} = f(0)(b-a)$$

Übung:

Es sei $a = 0$ und $c = -1$:

a.) Ist f gerade, so gilt: $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

b.) Ist f ungerade, so gilt: $\int\limits_{-b}^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

9.5.1 Integration von komplexen Funktionen

$$I(x) = \int\limits^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^n} \text{ mit } n = 1, 2, \ldots$$

$n > 1$ haben wir schon berechnet.

$$I(x) = \int\limits^x \frac{\mathrm{d}t}{t-a} \text{ mit } a \in \mathbb{C}$$

Da der Logarithmus einer komplexen Zahl teuflisch ist, wird dieses Problem erst später behandelt.

1.) $a \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits^x \frac{\mathrm{d}t}{t-a} = \ln|x-a|$$

2.) $a \in \mathbb{C}$:

$a = x + \mathrm{i}\beta (\beta \neq 0)$

$$\int\limits^x \frac{\mathrm{d}t}{t-(\alpha+\mathrm{i}\beta} = \int\limits^x \frac{1}{\frac{t-\alpha}{\beta}-\mathrm{i}}\frac{1}{\beta}\mathrm{d}t = \int\limits^x f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \text{ mit } f(\tau) = \frac{1}{\tau-\mathrm{i}}, \varphi(t) = \frac{t-\alpha}{\beta}$$

$$\int\limits^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-\mathrm{i}} = \int\limits^{\varphi(\tau)} \frac{\tau+\mathrm{i}}{1+\tau^2}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int\limits^{\varphi(x)} \frac{2\tau}{1+\tau^2}\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int\limits^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}\tau}{1+\tau^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\varphi(x)^2\right) + \mathrm{i}\arctan\varphi(x)$$

$$\beta \neq 0 : \int\limits^x \frac{\mathrm{d}t}{t-(\alpha+\mathrm{i}\beta)} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right) + \mathrm{i}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta}$$

Anwendung:

$$J = \int^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2bt + c} \text{ für } b, c \in \mathbb{R}$$

$t^2 + 2bt + c = (t+b)^2 + c - b^2 = 0, c - b^2 > 0, d = \sqrt{c - b^2}$

$t^2 + 2bt + c = (t + b + \mathrm{i}d)(t + b - \mathrm{i}d)$

$$\frac{1}{t^2 + 2dt + c} = \frac{A}{t + b + \mathrm{i}d} + \frac{B}{t + b - \mathrm{i}d} \text{ Bestimme: } A = \frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}, B = -\frac{\mathrm{i}}{2d}$$

$$\int^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2bt + c} = \frac{\mathrm{i}}{2d} \int^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t + b + \mathrm{i}d} - \frac{\mathrm{i}}{2d} \int^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t + bt - \mathrm{i}d} = \frac{1}{\sqrt{c - b^2}} \arctan \frac{x + b}{\sqrt{c - b^2}}$$

Beispiel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} \mathrm{d}t x = \sin t$$

$\mathrm{d}x = \cos \mathrm{d}t$

$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \sin 0 = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

9.6 Integration rationaler Funktionen/Partialbruchzerlegung

$$r(x) = \frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$$

Beispiele:

$$\frac{1}{x^2 - 4}$$

$$\frac{2x^2 + 3}{x(x-1)^2}$$

$$\frac{x^5 + 2}{x^2 - 1}$$

Beispiele nichtrationaler Funktionen sind:

$$\ln x, \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{|x^6 - 2|}{x^2 - 1}$$

Bemerkungen zu Polynomen:

$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n (c_n \neq 0) : n = \mathrm{grad}(f)$

Definition:

Eine Funktion $y = h(x)$ hat in x_0 eine Nullstelle der Ordnung k ($\in \mathbb{N}$), falls $h(x)$ in der Umgebung von x_0 die Darstellung $h(x) = (x - x_0)^k g(x)$ besitzt mit einer bei x_0 definierten Funktion g, für die $g(x_0) \neq 0$ gilt.

Beispiel:

$$x_0 = 0 : \sin 0 = 0 : \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots = x \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \mp \ldots\right)}_{g(x), g(0)=1\neq 0}$$

Damit ist 0 Nullstelle 1.Ordnung.

Satz:

Ist $f \in C^n$ und gelten $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, f^{(k)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist Nullstelle der Ordnung k.

Voraussetzung:

9.7 Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz:

Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt eine komplexe Nullstelle.

$$f(x) = x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1) = x\left(x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = x\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$$

$$= x\left(x + \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

A1 Es sei x_0 eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$. Dann gilt:

$f(x) = (x - a)g(x)$ mit einem Polynom g.

Wir erinnern uns:

$$x^k - a^k = (x - a)\underbrace{\left(x^{k-1} + ax^{k-2} + a^2x^{k-3} + \ldots + a^{k-1}\right)}_{p_{k-1}(x)}$$

$$f(x) = f(x) - \underbrace{f(a)}_{0} = \sum_{k=1}^{n} c_k(x^k - a^k) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x - a)p_{k-1}(x) = (x - a) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k p_{k-1}(x)}_{\text{Polynom vom Grad } n-1}$$

Folgerung:

Ein Polynom p_n vom Grade n hat genau n Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(\in \mathbb{C})$.

Beweis:

$p_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n = c_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n) = (x - 1)^n$

Unter den Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind s $(\geq n)$ verschiedene $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

$$p_n(x) = c_1(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}\ldots(x - a_s)^{k_s}(\underbrace{k_1 + k_2 + \ldots + k_s}_{k_j \in \mathbb{N}} = n)$$

Beispiel:

$p_5(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = (x-1)^3(x+1)^2$

$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = -1,\ \alpha_5 = -1$

$a_1 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3, k_1 = 3$

$a_2 = \alpha_4 = \alpha_5, k_2 = 2$

A2 $r(x) = \dfrac{f(x)}{(x-a)^k g(x)}$ sei rationale Funktion $\mathrm{grad}(f) < k + \mathrm{grad}(g)$. Es sei $g(a) \neq 0,\ f(a) \neq 0$. Dann gilt:
Es gibt eindeutig eine Zahl c und ein Polynom $p(x)$ mit $\mathrm{grad}(p) < k + \mathrm{grad}(g) - 1$ und
$r(x) = \dfrac{c}{(x-a)^k} + \dfrac{p(x)}{(x-a)^{k-1} g(x)}$.

Beweis:

$$r(x) - \frac{x}{(x-a)^k} = \frac{f(x) - cg(x)}{(x-a)^k g(x)} = \frac{(x-a)p(x)}{(x-a)^k g(x)} = \frac{p(x)}{(x-a)^{k-1} g(x)} \text{ mit } c = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Beispiel:

Für $k = 1$ gilt:

$$\frac{f(x)}{(x-a)g(x)} = \frac{c}{x-a} + \frac{p(x)}{g(x)}, \mathrm{grad}(p) < \mathrm{grad}(g)$$

$\mathrm{grad}(f) < n, a_j \neq a_k (j \neq k)$

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} = \frac{c_1}{x-a_1} + \frac{f_1(x)}{(x-a_2)\dots(x-a_n)} =$$
$$= \frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{x-a_2} + \frac{f_2(x)}{(x-a_3)\dots(x-a_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{x-a_k}$$

$p_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n = c_1(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_s)^{k_s}, (a_j \neq a_k, j \neq k, b_1 + b_2 + \ldots + k_s = n)$

A3 $f,\ g,\ k,\ r,\ a$ seien wie oben. Dann gibt es eindeutig Zahlen $\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_k$ und ein Polynom q mit $\mathrm{grad}(p) < \mathrm{grad}(g)$, so daß gilt:

$$r(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^k g(x)} = \sum_{l=1}^{k} \frac{\gamma l}{(x-a)^l} + \frac{q(x)}{g(x)} = \frac{\gamma_k}{(x-a)^k} + \frac{\gamma_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{\gamma_1}{x-a} + \frac{q(x)}{g(x)}$$

Satz:

$f,\ g$ seien Polynome mit $\mathrm{grad}(f) < \mathrm{grad}(g)$ und $g(x) = \prod_{j=1}^{s}(x-a_j)^{k_j}$. Dann hat man:

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\gamma_{j1}}{x-a_j} + \frac{\gamma_{j2}}{(x-a_j)^2} + \frac{\gamma_{j3}}{(x-a_j)^3} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j}}{(x-a_j)^{k_j}} \right)$$

Beispiel:

$$\tilde{r}(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + x - 1}$$

- 1.Schritt:

  Durch Polynomdivision ein Polynom abspalten.

  $$\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + x - 1} = x^2 + x + 4 - 5\frac{x - 1}{x^2 + x - 1}$$

- 2.Schritt:

  Wende Satz auf $r(x)$ an.

  $$r(x) = \frac{x - 1}{x^2 + x - 1}$$

  $$x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

  Damit folgt für $s = 2$:

  $$a_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, k_1 = 1$$

  $$a_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, k_2 = 1$$

- 3.Schritt:

  Partialbruchzerlegung berechnen zu γ_1, γ_2:

  $$r(x) = \frac{\gamma_1}{x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{\gamma_2}{x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} : r(x)\left(x^2 + x - 1\right) \text{ Koeffizientenvergleich}$$

  $$\gamma_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right), \gamma_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

Beispiel:

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + 4)^2}, r(x) = \frac{1}{(x^2 + 4)^2}$$

$$a_1 = +2\mathrm{i}, a_2 = -2\mathrm{i}, k_1 = 2, k_2 = 2$$

$$r(x) = \frac{1}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{(x - 2\mathrm{i})^2 (x + 2\mathrm{i})^2}$$

$$r(x) = \frac{\alpha}{x + 2\mathrm{i}} + \frac{\beta}{(x + 2\mathrm{i})^2} + \frac{\gamma}{x - 2\mathrm{i}} + \frac{\delta}{(x - 2\mathrm{i})^2} = \frac{1}{(x^2 + 4)^2}$$

$$\alpha = \overline{\gamma}, \beta = \overline{\delta}$$

$$r(x)(x + 2\mathrm{i}) \text{ und } x \mapsto \infty : 0 = \alpha + \gamma \Rightarrow \mathrm{Re}(\alpha) = \mathrm{Re}\gamma = 0$$

$$r(x)(x + 2\mathrm{i})(x - 2\mathrm{i}) = 1 = \alpha(x + 2\mathrm{i})(x - 2\mathrm{i})^2 + \beta(x - 2\mathrm{i})^2 + \gamma(x - 2\mathrm{i})(x + 2\mathrm{i})^2 + \delta(x + 2\mathrm{i})^2$$

$$x = -2\mathrm{i}, 1 = \beta \cdot (-16) \Rightarrow \beta = \delta = -\frac{1}{16}, x = 0 : \alpha = \frac{1}{32}\mathrm{i}, \gamma = -\frac{1}{32}\mathrm{i}$$

Damit ergibt sich für $r(x)$:

$$r(x) = \frac{\frac{1}{32}\mathrm{i}}{x+2\mathrm{i}} - \frac{\frac{1}{32}\mathrm{i}}{x-2\mathrm{i}} - \frac{\frac{1}{16}}{(x+2\mathrm{i})^2} - \frac{\frac{1}{16}}{(x-2\mathrm{i})^2} = \frac{1}{32}\mathrm{i}\left(\frac{1}{x+2\mathrm{i}} - \frac{1}{x-2\mathrm{i}}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{(x+2\mathrm{i})^2} + \frac{1}{(x-2\mathrm{i})^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{32}\mathrm{i}\left(\frac{-4\mathrm{i}}{x^2+4}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{(x+2\mathrm{i})^2} + \frac{1}{(x-2\mathrm{i})^2}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{(x+2\mathrm{i})^2} + \frac{1}{(x-2\mathrm{i})^2}\right)$$

Damit ergibt sich nun für das Integral:

$$I = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(4+t^2)^2} = \int^x \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^2+4} - \int^x \frac{1}{16}\left(\frac{1}{(x+2\mathrm{i})^2} + \frac{1}{(x-2\mathrm{i})^2}\right) =$$
$$= \int^x \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+2\mathrm{i}} + \frac{1}{x-2\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{16}\cdot\frac{x-2\mathrm{i}+x+2\mathrm{i}}{x^2+4} =$$
$$= \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{16}\cdot\frac{2x}{x^2+4} = \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4}$$

Beispiel:

Gegeben sei folgende vom Parameter α abhängige Funktion:

$$\boxed{f_\alpha(x) = \frac{(x-2)(x-\alpha)}{(x^2-1)^2}}$$

Es sollen alle α bestimmt werden, für welche die Stammfunktion von $f_\alpha(x)$ eine rationale Funktion ist. Außerdem soll dann die Stammfunktion zu diesen α berechnet werden.
Dazu führen wir folgende Partialbruchzerlegung durch:

$$f_\alpha(x) = \frac{x^2 - x(\alpha+2) + 2\alpha}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

Die Parameter B und D können mittels der Zuhaltemethode bestimmt werden:

$$B = \frac{1 + 1(\alpha+2) + 2\alpha}{4} = \frac{3(\alpha+1)}{4}$$

$$D = \frac{1 - (\alpha+2) + 2\alpha}{4} = \frac{\alpha-1}{4}$$

Wir bringen die beiden bestimmten Terme auf die linke Seite:

$$\frac{4x^2 - x(\alpha+2) + 2\alpha}{4(x+1)^2(x-1)^2} - \frac{3(\alpha+1)(x-1)^2}{4(x+1)^2(x-1)^2} - \frac{(\alpha-1)(x+1)^2}{4(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{x^2(2-4\alpha) - (2-4\alpha)}{4(x+1)^2(x-1)^2}$$

Wir können den Zähler durch die Faktoren $(x+1)$ und $(x-1)$ des Nenners durch Polynomdivision kürzen:

$$\frac{x^2(2-4\alpha) - (2-4\alpha)}{4(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{2(1-2\alpha)}{4(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Damit folgt nun A und C wieder mit der Zuhaltemethode:

$$A = \frac{2\alpha-1}{4} = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}$$

$$C = \frac{1-2\alpha}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha$$

Damit haben wir also die Funktion $f_\alpha(x)$ in Linearfaktoren zerlegt:

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{4}\frac{2\alpha-1}{x+1} + \frac{3}{4}\frac{\alpha+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1-2\alpha}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{\alpha-1}{(x-1)^2}$$

Die Stammfunktion von $f_\alpha(x)$ ist rational, wenn die Terme proportional zu $\frac{1}{x}$ wegfallen. Dies ist für folgende α der Fall:

$$\frac{1}{4}(2\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4}(1 - 2\alpha) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

Somit gibt es nur ein α, welches die Bedingung erfüllt. Die zugehörige Stammfunktion lautet:

$$\boxed{F_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{8}\frac{1}{x-1} - \frac{9}{8}\frac{1}{x+1}}$$

Bemerkung:

Nenner $= (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_s)^{k_s}$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(x-a)^m}$$

$p(x) = x^2 + x + 1:$ Mit $a \in \mathbb{C}$ ist $\overline{a} \in \mathbb{C}$ Nullstelle.

$p(x) = x^2 + x + 1 = (x-a)(x-\overline{a}) = x^2 + 2bx + c(c > b^2)$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + 2bt + c)^k}$$

Substituiere $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}\tau}{(1+\tau^2)}$ =(Rekursionsformel)= $\displaystyle\dots + \int^x \frac{\mathrm{d}\tau}{(1+\tau^2)^{k-1}}$

9.8 Integration, Differentiation von Funktionenfolgen

Es gelte $f_n \mapsto f$ für $n \mapsto \infty$ auf $[a,b]$. Wir beschäftigen uns mit der folgenden Frage:

$$\int_{x_0}^x f_n(t)\mathrm{d}t \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t,\ f_n' \mapsto f' \text{ für } n \mapsto \infty?$$

Beispiel:

$I = [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x & \text{für} \quad \frac{1}{2n} \leq x\frac{1}{n} \\ 0 & \text{für} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$f_n(x) \mapsto 0 (n \mapsto \infty)$ für jedes $x \in [a,b]$.

$f_n \mapsto 0$ **punktweise**, aber nicht gleichmäßig!

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}n = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\mapsto\infty} \frac{1}{2} \\ &\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}\right\} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \not\to \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \text{ für } n \mapsto \infty, \text{ obwohl } f_n \mapsto f \text{ auf } [0,1].$$

9.8.1 Die Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung

Satz:

$|f_n| \subset C[a,b]$, f sind auf $[a,b]$ definiert. $f_n \mapsto f$ $(n \mapsto \infty)$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Dann gilt:

$$\lim_{n\mapsto\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\lim_{n\mapsto\infty} f_n\right)(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Beweis:

$$\left|\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b (f_n(t) - f(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \|f_n - f\|(b-a) \mapsto 0\,(n \mapsto \infty)$$

9.8.2 Die Vertauschung von Differentiation und Grenzwertbildung

Satz:

$(f_n) \in C^1[a,b]$, $\xi \in [a,b]$ sei beliebig, aber fest.

1.) $\lim\limits_{n\mapsto\infty} f_n(\xi)$ existiert.

2.) $f_n' \mapsto g$ $(n \mapsto \infty)$ gleichmäßig auf $[a,b]$

Dann gelten:

a.) $\lim\limits_{n\mapsto\infty} f_n(x) = f(x)$ für jedes $x \in [a,b]$ und $f \in C^1[a,b]$ und $f'(x) = g(x)$ für $a \leq x \leq b$.

b.) $f'(x) = D\left(\lim\limits_{n\mapsto\infty} f_n\right)(x)$

c.) $g(x) = \lim\limits_{n\mapsto\infty} (Df_n)(x)$

Beweis:

$$f_n(x) = f_n(\xi) + \int_\xi^x f_n'(t)\mathrm{d}t \text{ für } a \leq x \leq b$$

Nach Satz 1, Voraussetzung 2 gilt:

$$\lim_{n\mapsto\infty} f_n(x) = \lim_{n\mapsto\infty} f_n(\xi) + \int_\xi^x g(t)\mathrm{d}t = f(x) \text{ für } a \leq x \leq b$$

$$f(x) = f(\xi) + \int_\xi^x g(t)\mathrm{d}t$$

$$f'(x) = g(x)$$

9.9 Differentiation und Integration von Potenzreihen

Potenzreihen dürfen innerhalb des Konvergenzbereiches gliedweise differenzieren und integriert werden.

Satz:

$$\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-x_0)^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a_k(t-x_0)^k \,\mathrm{d}t \text{ für } |x-x_0| < r$$

$$D\left(\int a_k(x-x_0)^k\right) = \int\limits_{k=0}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$$

Beweis:

Sei x beliebig mit $|x-x_0| < r$. Wähle $\rho < r$ mit $|x-x_0| < \rho$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-x_0)^k = f(t) = \lim_{n\mapsto\infty} f_n(t) \text{ gleichmäßig für } |t-x_0| \leq \rho$$

$$g(t) = \lim_{n\mapsto\infty} f_n'(t) \text{ gleichmäßig für } |t-x_0| \leq \rho$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\mapsto\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t \text{ Satz 1}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-x_0)^k \mathrm{d}t,\ \lim_{n\mapsto\infty} \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} a_k(t-x_0)^k \mathrm{d}t = \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_0}^{x} a_k(t-x_0)^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a_k(t-x_0)^k \mathrm{d}t$$

Nach Satz 2 ist $f'(t) = g(t)$.

$$D\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right) = \lim_{n\mapsto\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$$

Beispiel:

Wir suchen die Stammfunktion von $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$:

$$F(x) = \int\limits_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$$

Diese Funktion ist nicht elementar integrierbar. Wir entwickeln den Integranden also zuerst in eine Potenzreihe und integrieren dann:

$$\mathrm{e}^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-t^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} t^{2k}$$

$$\int\limits_{0}^{x} \mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \int\limits_{0}^{x} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)k!} x^{2k+1}$$

Beispiel:

Wir betrachten den sogenannten **Integralsinus**:

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$ Die Funktion ist somit stetig.

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k}$$

Wir integrieren:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^x t^{2k} \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Beispiel:

Wir wollen folgendes Integral berechnen:

$$\boxed{I = \int_0^1 \frac{\operatorname{artanh}(t) - t}{t^2}} \text{ mit dem Hinweis } \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2}$$

Die Potenzreihe des Areatangenshyperbolikus lautet:

$$\operatorname{artanh} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Damit ergibt sich nun für das Integral:

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{artanh}(t) - t}{t^2} = \int_0^1 \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} - t}{t^2} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + t - t}{t^2} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}}{t^2} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n+1}$$

Aufgrund der absoluten Konvergenz können wir Integral und Grenzübergang vertauschen:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n-1}}{2n+1} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{t^{2n}}{2n(2n+1)} \right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$$

Durch Partialbruchzerlegung folgt nun:

$$\frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$$

Somit folgt:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Mit dem Hinweis folgt nun:

$$I = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \boxed{1 - \ln 2}$$

9.9.1 Entwicklung der Potenzreihe des Arcustangens

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \text{ für } |x| < 1$$

$$\arctan x = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} \text{ für } |x| < 1$$

Wir wollen nun die Gleichheit für $x = \pm 1$ untersuchen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \underbrace{\frac{1-q^n}{1-q}}_{q \neq 1} \mapsto \frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + \frac{q^n}{1-q}$$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{2k} \right) \mathrm{d}t + \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2} \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^x t^{2k} \mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^x (-1)^k \frac{t^{2n}}{1+t^2} \mathrm{d}t}_{R_{2n+1}(x)}$$

$$(-1)^n R_{2n+1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} x^{2k} \mathrm{d}t$$

Wir erinnern uns an den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

$f, g \in C^0[a,b], f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$

Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $\displaystyle\int_a^b f(x), g(x)\mathrm{d}x = g(\xi) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

$$(-1)^n R_{2n+1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} x^{2k} \mathrm{d}t = \frac{1}{1+\xi^2} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \frac{1}{1+\xi^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \mapsto 0 \text{ für } |x| \leq 1, 0 < \xi < x, \xi = \vartheta x, 0 < \vartheta < 1$$

Anwendungen:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \text{ für } -1 < x \leq 1$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$|x| < 1 : g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} = D\left(\ln(1+x)\right)$$

$$\Rightarrow g(x) - \ln(1+x) = \text{const. für } -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow g(0) - \ln 1 = 0$$

9.10 Uneigentliche Integrale

Vereinbarungen:

1.) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion, so gelte $f \in \mathbb{R}\,[\xi,\eta]$ für jedes Intervall $[\xi,\eta] \subseteq I$.

2.) Stets: $a,\, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < \beta$, $\alpha < b$.

Definition:

Es sei $f : [a,\beta) \mapsto \mathbb{R}$. Das **uneigentliche Integral** $\int\limits_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$ heißt **konvergent**, wenn folglich gilt:

Es existiert der Grenzwert $\lim\limits_{t \mapsto \beta - 0} \int\limits_a^t f(x)\mathrm{d}x$ und ist $\in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt: $\int\limits_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$: $\lim\limits_{t \mapsto \beta - 0} \int\limits_a^t f(x)\mathrm{d}x$.

Ist $\int\limits_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$ nicht konvergent, so heißt es **divergent**.

Definition:

Es sei $f : [\alpha, b) \mapsto \mathbb{R}$. Das **uneigentliche Integral** $\int\limits_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x$ heißt **konvergent**, wenn folglich gilt: Es existiert der Grenzwert $\lim\limits_{t \mapsto \alpha + 0} \int\limits_t^b f(x)\mathrm{d}x$ und ist $\in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt: $\int\limits_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x$: $\lim\limits_{t \mapsto \alpha + 0} \int\limits_t^b f(x)\mathrm{d}x$. Ist $\int\limits_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x$ nicht konvergent, so heißt es **divergent**.

Beispiele:

1.) Sei $\gamma > 0$:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}\mathrm{d}x, \int\limits_1^t \frac{1}{x^\gamma}\mathrm{d}x = \begin{cases} \log t & \text{für} \quad \gamma = 1 \\ \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma}\Big|_1^t = \frac{1}{1-\gamma}\left(t^{1-\gamma} - 1\right) & \text{für} \quad \gamma \neq 1 \end{cases}$$

Also konvergiert $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}\mathrm{d}x$ für $\gamma > 1$.

2.) Analog für $\gamma > 0$: $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\gamma}\mathrm{d}x$ konvergiert für $\gamma < 1$.

Beachte: $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ konvergiert, aber $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ divergiert.

3.) $\int\limits_0^t \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan t \mapsto \frac{\pi}{2}$ für $t \mapsto \infty$.

Das heißt, daß $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert.

4.) Analog: $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ konvergiert gegen $\frac{\pi}{2}$.

Definition:

Es sei $f : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}$. Das uneigentliche Integral $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ heißt **konvergent**, wenn es ein $c \in (\alpha, \beta)$ gibt, so daß folgendes gilt:
$\int\limits_\alpha^c f(x)\mathrm{d}x$ und $\int\limits_c^\beta f(x)\mathrm{d}x$ sind **beide** konvergent. In diesem Fall gilt:

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x := \int\limits_\alpha^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^\beta f(x)\mathrm{d}x.$$

$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ heißt **divergent**, falls es **nicht** konvergiert.

Übung:

Zeige, daß obrige Definitionen unabhängig von $c \in (\alpha, \beta)$ sind.

Beispiele:

1.) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^\gamma}\mathrm{d}x$ $(\gamma > 0)$; $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^\gamma}\mathrm{d}x$ ist **divergent**.

2.) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ ist konvergent und gleich π.

Die folgenden Definitionen und Sätze formulieren wir nur für Funktionen $f : [a, \beta) \mapsto \mathbb{R}$. Diese Sätze und Definitionen gelten sinngemäß für die beiden anderen Typen uneigentlicher Integrale.

9.10.1 Cauchy-Kriterium

Satz:

$\int\limits_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert, wenn $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ c = c(\epsilon) \in (a, \beta)$ mit $\left|\int\limits_u^v f(x)\mathrm{d}x\right| < \epsilon\ \forall\ u,\, v \in (c,\, \beta)$.

Beweis:

$$\varphi(t) := \int_a^t f(x)\mathrm{d}x \, (t \in [a,\beta)) \, , \left| \int_u^v f(x)\mathrm{d}x \right| = |\varphi(v) - \varphi(u)| \, .$$

Die Behauptung folgt aus dem Cauchy-Kriterium bei Grenzwerten von Funktionen.

Beispiel:

Wir behaupten, daß $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ konvergent ist. Dies wollen wir im folgenden zeigen. Dazu sei $0 < u < v$:

$$\left|\int_u^v \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_u^v \underbrace{\frac{1}{x}}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g'} \mathrm{d}x\right| = \left|\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_u^v - \int_u^v \left(-\frac{1}{x^2}\right)(-\cos x)\,\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \left|\frac{\cos u}{u} - \frac{\cos v}{v} - \int_u^v \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \int_u^v \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{u}$$

Damit resultiert dann:

$$\left|\int_u^v \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{u}$$

Es sei $\epsilon > 0$: Wähle u, v so, daß $\frac{2}{u} < \epsilon$ und $u < v$. Dann gilt:

$$\left|\int_u^v \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| < \epsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Definition:

$\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$ **konvergiert absolut**, wenn $\int_a^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Ähnlich wie bei Reihen beweist man diese Aussage.

Satz:

Ist $\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$ absolut konvergent, so folgt, daß $\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$ auch konvergent ist.

$$\left|\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^\beta |f|\,\mathrm{d}x$$

9.10.2 Majorantenkriterium

Satz:

Ist $|f| \leq g$ auf $[a, \beta)$ und $\int\limits_a^\beta g(x)\mathrm{d}x$ konvergent, so folgt:

$\int\limits_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$ ist absolut konvergent.

9.10.3 Minorantenkriterium

Satz:

Ist $f \geq g \geq 0$ auf $[a, \beta)$ und $\int\limits_a^\beta g(x)\mathrm{d}x$ divergent, so folgt:

$\int\limits_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$ ist divergent.

Satz:

In (2) und (3): Sei $g : [a, \beta) \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion, die integrierbar ist über jedes kompaktes Teilintervall von $[a, \beta)$.

Beispiele:

1.) $\int\limits_1^\infty \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^5}}}_{=:f(x)}\mathrm{d}x$; $f(x) = |f(x)| \leq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} =: g(x)$, $\int\limits_1^\infty g(x)\mathrm{d}x$ konvergiert.

Also ist auch $\int\limits_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konvergent.

2.) $\int\limits_1^\infty \underbrace{\frac{x}{x^2+3x}}_{=:f(x)}\mathrm{d}x$, $f(x) = \frac{x}{x^2+3x} \geq \frac{x}{x^2+3x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} =: g(x)$

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ divergiert. Daraus ergibt sich:

a.) $\int\limits_1^\infty g(x)\mathrm{d}x$ ist divergent.

b.) $\int\limits_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ ist divergent.

Kapitel 10

Differentialgleichungen

10.1 Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y = \varphi(x) = c\underbrace{\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}}_{y_h(x)} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{e}^{\int\limits_{x_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t}_{y_p(x)} \, (c \text{ konstant, aber beliebig})$$

$y_h(x)$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, y_p ist **eine** Lösung der inhomogenen Gleichung.

Übung:

$$y = \varphi(x) = c\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} + \mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{e}^{\int\limits_{x_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t = \tilde{c}\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} + \mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} \int\limits_{x_0}^{x} q(t)\mathrm{e}^{\int\limits_{x_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t$$

$$\int\limits_{\tilde{x}_0}^{x} \ldots = \int\limits_{\tilde{x}_0}^{x_0} \ldots + \int\limits_{x_0}^{x}$$

$y = \varphi(x) = h(x)$; x_0, y_0, p, q stetige Abhängigkeit von Daten x_0, y_0, p, q kann abgelesen werden.

10.1.1 Differentialgleichung von Bernoulli

$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$y \to z(x) = y(x)^{1-\alpha} \Rightarrow z'(x) = (1-\alpha)y(x)^{-\alpha}, y'(x)$

Dies wird zu:

$$\frac{1}{1-\alpha}z'(x) + p(x)z(x) = q(x)$$

10.2 Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$(L_y)(x) := y'' + 2ay' + by = f(x)$

a, $b = \text{const.} \in \mathbb{R}$, f sei gegebene Funktion, die stetig ist.

$\mathcal{L}_f = \left\{ y \in C^2 / L_y = f \text{ auf } \mathbb{R} \right\}$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1(L_{y_1}) = (\alpha_1 y_1)'' + 2a(\alpha_1 y_1)' + b(\alpha_1 y_1) = L(\alpha_1 y_1)\\[2ex] \alpha_2(L_{y_2}) = (\alpha_2 y_2)'' + 2a(\alpha_2 y_2)' + b(\alpha_2 y_2) = L(\alpha_2 y_2)\end{array}\right\}\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$$

$\alpha_1(L_{y_1}) + \alpha_2(L_{y_2}) = L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$ Linearität von L

A1: y_1, $y_2 \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathcal{L}_0$ ($\mathcal{L}_0$ ist ein komplexer Vektorraum.

A2: Es sei $y_p \in \mathcal{L}_f$. Dann gilt:

$y \in \mathcal{L}_f \Leftrightarrow y = y_0 + y_p$ mit $y_0 \in \mathcal{L}_0$

Man erhält alle Lösungen von $L_y = f$, indem man zu einer Lösung y_p alle Lösungen aus $\mathcal{L}_0$ addiert.

Beweis:

$y \in \mathcal{L}_f \Rightarrow L(y - y_p) = L_y - L_{y_p} = f - f = 0 \Rightarrow y - y_p = y_0 \in \mathcal{L}_0$

$y = y_0 + y_p \Rightarrow L_y = L(y_0 + y_p) = L_{y_p} + L_{y_p} = 0 + f = f : y \in \mathcal{L}_f$

Lösung:

$y'' + 2ay' + by = f(x)$ (1)

Wir verwenden den **Ansatz** $y(x) = u(x)v(x)$. y sei somit eine Lösung dieser Differentialgleichung. Wenn wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung einsetzen und umformen, erhalten wir:

$$v''u + 2v' \underbrace{(u' + au)}_{=0 \text{ für } u(x)=\mathrm{e}^{-ax}} + v\underbrace{(u'' + 2au' + bu)}_{(-a^2+b)\mathrm{e}^{-ax}} = f(x)$$

Mit $y(x) = \mathrm{e}^{-ax}v(x)$ erhält man:

$v''(x) + (b - a^2)v(x) = \mathrm{e}^{ax}f(x)$ (2)

- Ist v Lösung von (2), so ist $y(x) = \mathrm{e}^{-ax}v(x)$ Lösung von (1).
- Ist y Lösung von (1), so ist $v(x) = \mathrm{e}^{ax}y(x)$ Lösung von (2).

Ab jetzt:

$v'' + (b - a^2)v = g(x)$ $(g(x) = \mathrm{e}^{ax}f(x))$

$b = a^2 : v''(x) = g(x)$

Jetzt müssen wir nur noch zweimal integrieren:

$$v'(x) = \int\limits_0^x g(t)\mathrm{d}t + v'(0)$$

$$y(x) = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^\tau g(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau + v'(0)x + v(0)$$

Wir integrieren partiell:

$$\int\limits_0^x \left(\underbrace{1}_{w(\tau)} \cdot \underbrace{\int\limits_0^\tau g(t)\mathrm{d}t}_{h(\tau)}\right)\mathrm{d}\tau = \tau\int\limits_0^\tau g(t)\mathrm{d}t\Bigg|_{\tau=0}^{x} - \int\limits_0^x \tau g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\Rightarrow g(x) = \underbrace{x\mathrm{e}^{-ax}}_{y_{a_1}} v'(0) + \underbrace{\mathrm{e}^{-ax}}_{y_{a_2}} v(0) + \underbrace{x\mathrm{e}^{-ax}}_{y_{a_1}} \int_0^x \mathrm{e}^{at} f(t)\mathrm{d}t - \underbrace{\mathrm{e}^{-ax}}_{y_{a_2}} \int_0^x t\mathrm{e}^{at} f(t)\mathrm{d}t$$

$b \neq a^2 : w^2 = b - a^2, w = \sqrt{b-a^2}, v''(x) + \omega^2 v(x) = g(x) | \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$

$\left(v''(x) + \omega^2 v(x)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} = g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$

Übung:

$\mathrm{D}_x \left(v'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} - \mathrm{i}\omega v(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\right) = g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$

$$v'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} - \mathrm{i}\omega v(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} = \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t + (v'(0) + \mathrm{i}\omega v(0))$$

$$v'(x) - \mathrm{i}\omega v(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}t + (v'(0) - \mathrm{i}\omega v(0))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}$$

$$\omega \mapsto -\omega : u'(x) + \mathrm{i}\omega v(x) = \int_0^x g(t)eu^{\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}t + (v'(0) + \mathrm{i}\omega v(0))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$$

Wir subtrahieren die beiden Gleichungen voneinander:

$$-\begin{cases} v'(x) - \mathrm{i}\omega v(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}t + (v'(0) - \mathrm{i}\omega v(0))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \\ v'(x) + \mathrm{i}\omega v(x) = \int_0^x g(t)eu^{\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}t + (v'(0) + \mathrm{i}\omega v(0))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} \end{cases}$$

$$z(\omega)v(x) = \int_0^x g(t) 2\mathrm{i}\sin\omega(x-t)\mathrm{d}t + 2v'(0)\sin\omega x + \mathrm{i}\omega v(0) 2\cos\omega x \,|: 2\mathrm{i}\omega\ \left|\mathrm{e}^{-ax}\ \right| g(t) = \mathrm{e}^{at}f(t)$$

$$y(x) = \mathrm{e}^{-ax}\int_0^x \mathrm{e}^{at} f(t)\frac{1}{\omega}\sin\omega(x-t)\mathrm{d}t + v'(0)\frac{\sin\omega x}{\omega}\mathrm{e}^{-ax} + v(0)\cos\omega x\mathrm{e}^{-ax}$$

Allgemeine Lösung $v(0)$, $v'(0)$ ist beliebig, aber konstant.

1.) $b > a^2$, $\omega = \sqrt{b^2 - a^2} \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = C_1 \underbrace{\mathrm{e}^{-ax}\sin\omega t}_{y_{h_1}} + C_2 \underbrace{\mathrm{e}^{-ax}\cos\omega x}_{y_{h_2}} + \underbrace{\mathrm{e}^{-ax}\sin\omega x}_{y_{h_1}} \underbrace{\int_0^x \mathrm{e}^{at} f(t)\frac{1}{\omega}\cos\omega t\mathrm{d}t}_{C_1(x)} - \underbrace{\mathrm{e}^{-ax}\cos\omega x}_{y_{h_2}} \underbrace{\int_0^x \mathrm{e}^{at} f(t)\frac{1}{\omega}\sin\omega t\,\mathrm{d}t}_{C_2(x)}$$

2.) $b < a^2$, $\rho = \sqrt{a^2 - b}$, $\omega = \sqrt{b - a^2} = \mathrm{i}\rho$

$\sin\mathrm{i}\rho = \mathrm{i}\sinh\rho, \cos\mathrm{i}\rho = \cosh\rho$

$$y(x) = \tilde{C}_1\mathrm{e}^{-ax}\sinh(\rho x) + \tilde{C}_2\mathrm{e}^{-ax}\cosh(\rho x) + \mathrm{e}^{-ax}\int_0^x \mathrm{e}^{at} f(t)\frac{1}{\rho}\sinh p(x-t)\mathrm{d}t =$$

$$= C_1 \underbrace{\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{\rho x}}_{y_{h_1}} + C_2 \underbrace{\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-\rho x}}_{y_{h_2}} + \underbrace{\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{\rho x}}_{y_{h_1}} \underbrace{\int_0^t \mathrm{e}^{at} f(t)\frac{1}{\rho}\mathrm{e}^{-\rho t}\mathrm{d}t}_{C_1(x)} - \underbrace{\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-\rho x}}_{y_{h_2}} \underbrace{\int_0^x \mathrm{e}^{at} f(t)\frac{1}{\rho}\mathrm{e}^{\rho t}\mathrm{d}t}_{C_2(x)}$$

Andere Strategie zur Lösung:

- Homogene Gleichung, Ansatz: $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$

  $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 : C_1 \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}}_{y_{h_1}} + C_2 \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda_2 x}}_{y_{h_2}}$ ist allgemeine Lösung.

- Die inhomogene Lösung erhält man durch Variation der Konstanten, also durch folgenden Ansatz:

  $y_p(x) = C_1(x) y_{h_1(x)} + C_2(x) y_{h_2(x)}$

  $C_1(x)$, $C_2(x)$ sind nun zu berechnen.

  $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 = \lambda_2$

  Eine alternative Variante, die stets funktioniert, ist folgende:

  1.) Berechne $y_h(x)$
  2.) $y_p(x) + C(x) y_h(x)$

  $\mathcal{L}_y = y'' + 2ay' + by = f$

Zusammenfassung:

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = r(x)$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$y' + a(x) y = r(x) \Rightarrow$ Lineare Differentialgleichung 1.Ordnung

Gilt $r(x) = 0$, so spricht man von homogenen Differentialgleichungen, sonst von inhomogen.

Weiteren Typen von Differentialgleichungen:

$y' + f(x) y = g(x) y^a$ $(a \neq 0, 1) \Rightarrow$ Bernoulli-Differentialgleichung

$\Rightarrow$ Lösung mit speziellem Ansatz, um Problem auf bekannte Differentialgleichungen zurückzuführen.

$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0$

a.) Eulersche Differentialgleichung, linear, n-te Ordnung, Koeffizienten **nicht** konstant

b.) Lösung erfolgt mit speziellem Ansatz.

Sind y_1 und y_2 zwei Lösungen einer **linearen** Differentialgleichung, so löst auch $y = a \cdot y_1 + b \cdot y_2$ $(a, b \in \mathbb{R})$ die Differentialgleichung.

Beispiel:

$2y'y^2 = -\frac{1}{x^2}$ ist eine nichtlineare inhomogene Differentialgleichung 1.Ordnung. Wir verwenden zur Lösung den Ansatz:

$$z(x) = x \cdot y(x) \Rightarrow y = \frac{z}{x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{z' \cdot x - z \cdot 1}{x^2} = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung folgt:

$$z\left(\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}\right) + \frac{z^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0 \,\Big|\cdot \frac{x}{2}$$

$$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{x^2} + \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\frac{z'}{x} = \frac{z}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{x^2} - \frac{1}{2x}$$

$$z' = \frac{z}{x} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{x} - \frac{1}{2x}$$

$$z' = -\frac{1}{2x} \cdot \left(z^2 - 2z + 1\right)$$

$$z' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2x}\left(z-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\mathrm{d}z}{(z-1)^2} = \frac{1}{2x}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{-\mathrm{d}z}{(z-1)^2} = \int \frac{1}{2x}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2}\ln|x| + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}\ln|x| + C_1} + 1 = 1 + \frac{2}{\ln|x| + 2C_1} = 1 - \frac{2}{\ln|x| + C_2}, C_2 \in \mathbb{R}$$

Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung:

$$y(x) = \frac{z(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x\ln|x| + C_2}, C_2 \in \mathbb{R}$$

Beachte:

$z \equiv 1$ bzw. $y = \frac{1}{x}$ löst Differentialgleichung ebenfalls. Dies ist in unserer Lösung für $|C_2| \mapsto \infty$ erhalten.

Beispiel:

Man löse folgende Differentialgleichung:

$$(xy^2)' = (xy)^3(1+x^2), \qquad x > 0$$

Wir machen folgende Substitution:

$$xy^2 = u \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{u}{x}}$$

Damit gilt:

$$xy = \frac{u}{\sqrt{\frac{u}{x}}} = \sqrt{x}\sqrt{u}$$

Durch Einsetzen folgt:

$$u' = u^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}\left(1 + x^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{3}{2}}} = \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{7}{2}}\right)$$

Durch Integration gilt dann:

$$-2\frac{u}{\sqrt{u}} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + C$$

$\frac{1}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{9}x^{\frac{9}{2}} + D$

$\sqrt{u} = \frac{1}{-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{9}x^{\frac{9}{2}} + D}$

Also erhalten wir für $y(x)$:

$$y = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{-\frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + D\sqrt{x}} = \boxed{-\frac{45}{9x^3 + 5x^5 + E\sqrt{x}}}$$

Beispiel:

$x^2y'' + xy' - y = \ln x, y(1) = 2, y'(1) = 1$

Dies ist eine EULERsche Differentialgleichung.

Lösungsansätze:

- Möglichkeit 1:

  $y(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$ für $x > 0$

  $y(x) = -x^r, r \in \mathbb{R}$ für $x < 0$

- Möglichkeit 2:
  Wir verwenden folgende Substitution:

  $x = \mathrm{e}^t \Rightarrow t = \ln x$ (für $x > 0$ substituiere $x = -\mathrm{e}^t$)

  $\Rightarrow y(x) = y\left(\mathrm{e}^t\right) =: u(t)$

  Damit folgt:

  $$\dot{u}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y\left(\mathrm{e}^t\right) = y'\left(\mathrm{e}^t\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^t = y'\left(\mathrm{e}^t\right) = y' \cdot x\ddot{u}(t) = y''\left(\mathrm{e}^t\right) \cdot \mathrm{e}^t + y'\left(\mathrm{e}^t\right) \cdot \mathrm{e}^t = y''x^2 + \underbrace{y'x}_{=0}$$

  $\Rightarrow \ddot{u} - \dot{u} = x^2y''$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$\ddot{u} - \dot{u} + \dot{u} - u = t \Leftrightarrow \ddot{u} - u = t$

Homogene Differentialgleichung:

$\ddot{u} - u = 0$

Man verwendet hier den Ansatz $u(t) = \mathrm{e}\lambda t \Rightarrow \dot{u} = \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}$, $\ddot{u} = \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}$.

$\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \;\big|: \mathrm{e}^{\lambda t}$

Damit erhalten wir das **Charakteristische Polynom**:

$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$

$u_1(t) = \mathrm{e}^t, u_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$

Alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung:

$u_h(t) = A \cdot \mathrm{e}^t + B \cdot \mathrm{e}^{-t}; A, b \in \mathbb{R}$

Inhomogene Differentialgleichung:

Betrachten wir nun die Differentialgleichung $\ddot{u} - u = t$. Deren Störfunktion ist $r(t) = t$; dies ist ein Polynom 1.Grades. Außerdem liegt **keine** Resonanz vor. Damit verwenden wir als Ansatz zur Lösung des inhomogenen Problems $u_s(t) = C \cdot t + D$, also ebenfalls ein Polynom 1.Grades ($\ddot{u}_s = 0$). Durch Einsetzen folgt:

$0 - ct - D = t \Leftrightarrow C = -1 \wedge D = 0$

$u_s(t) = -t$

Die Differentialgleichung ist linear; die Gesamtlösung ergibt sich durch Superposition der Lösung der homogenen und der inhomogenen Gleichung:

$u_{\text{ges}}(t) = u_h(t) + u_s(t) = A \cdot \mathrm{e}^t + B \cdot \mathrm{e}^{-t} - t$

Bemerkungen:

$\ddot{u}_{\text{ges}} - u_{\text{ges}} = \ln x \Leftrightarrow \ddot{u}_h + \ddot{u}_s - (u_h + u_s) = \ln x$

$\Leftrightarrow \underbrace{\ddot{u}_h - u_h}_{0} + \underbrace{\ddot{u}_s - u_s}_{0} = \ln x$

Rücksubstitution:

$y(x) = u(t)|_{t=\ln x} = u\,(\ln x)$