

Ergänzungen zur Höheren Mathematik I
für die Fachrichtung Physik
Wintersemester 2008/09

Peer Christian Kunstmann
Institut für Analysis, Universität Karlsruhe
Kaiserstr. 89, D – 76128 Karlsruhe, Germany
e-mail: peer.kunstmann@math.uni-karlsruhe.de

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

E1. Relationen und Beweistechniken

E1.1 Definition: Seien X, Y Mengen. Eine *Relation* R ist eine Teilmenge $R \subset X \times Y$ (R setzt gewisse $x \in X$ mit gewissen $y \in Y$ durch $(x, y) \in R$ "in Beziehung").

Beispiele: i) Jede Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist eine Relation, nämlich

$$\{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

ii) Für jede Menge X sind

$$\begin{aligned} \text{Id}_X &:= \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X \\ \text{Tm}_X &:= \{(N, M) : N \subset M \subset X\} \subset \text{Pot}(X) \times \text{Pot}(X) \end{aligned}$$

Relationen (*Gleichheit in X* bzw. *Teilmengenbeziehung* oder *Inklusion* in $\text{Pot}(X)$).

E1.2 Eigenschaften von Relationen

Sei $R \subset X \times X$ eine Relation.

$$\begin{aligned} R \text{ reflexiv} &:\Leftrightarrow \forall x \in X : (x, x) \in R, \\ R \text{ symmetrisch} &:\Leftrightarrow \forall x, y \in X : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R, \\ R \text{ transitiv} &:\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R. \end{aligned}$$

Beispiele: Id_X, Tm_X sind reflexiv und transitiv. Id_X ist symmetrisch. Für $X \neq \emptyset$ ist Tm_X nicht symmetrisch.

Die Elemente A, B, C sollen in dieser Reihenfolge "Schere, Stein, Papier" entsprechen. Wir setzen $X := \{A, B, C\}$ und definieren

$$R := \{(x, y) \in X \times X : x \text{ schlägt } y\}.$$

Dann ist R nicht reflexiv und nicht transitiv (und auch nicht symmetrisch).

E1.3 Operationen mit Relationen

Seien $R \subset X \times Y$ und $S \subset Y \times Z$ Relationen.

$$\begin{aligned} R^{-1} &:= \{(y, x) : (x, y) \in R\} \subset Y \times X \quad \text{inverse Relation} \\ R \bullet S &:= \{(x, z) : \exists y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\} \quad \text{Verknüpfung von Relationen.} \end{aligned}$$

Achtung: Sind R und S *Funktionen*, so ist

$$R \bullet S = S \circ R.$$

Bemerkung: Sei $R \subset X \times X$ eine Relation. Dann gilt:

$$\begin{aligned} R \text{ ist symmetrisch} &\Leftrightarrow R^{-1} \subset R, \\ R \text{ ist transitiv} &\Leftrightarrow R \bullet R \subset R. \end{aligned}$$

Beweis: Die erste Äquivalenz ist klar. Man kann rechts auch “=” schreiben. Zum Beweis der zweiten Äquivalenz zeigen wir *zwei Implikationen*.

“ \Rightarrow ”: Sei R transitiv. Zu zeigen: $R \bullet R \subset R$. Sei $(x, z) \in R \bullet R$. Zu zeigen ist $(x, z) \in R$. Wegen $(x, z) \in R \bullet R$ finden wir nach Definition ein y mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$. Da R transitiv ist, folgt $(x, z) \in R$.

“ \Leftarrow ”: Es gelte $R \bullet R \subset R$. Zu zeigen. R ist transitiv. Dazu seien $x, y, z \in R$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$. Zu zeigen ist $(x, z) \in R$. Nach Definition gehört aber (x, z) zu $R \bullet R$, also auch zu R wegen der vorausgesetzten Inklusion $R \bullet R \subset R$.

Satz: Seien $R \subset X \times Y$, $S \subset Y \times Z$ und $T \subset Z \times W$ Relationen. Dann gilt:

$$R \bullet (S \bullet T) = (R \bullet S) \bullet T,$$

dh die Verknüpfung von Relationen ist assoziativ.

Folgerung: Sind $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : Z \rightarrow W$ Funktionen, so gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis des Satzes: Wir zeigen *zwei Inklusionen*.

“ \subset ”: Sei $(x, w) \in R \bullet (S \bullet T)$. Zu zeigen ist $(x, w) \in (R \bullet S) \bullet T$. Wir finden $y \in Y$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, w) \in S \bullet T$ und dann $z \in Z$ mit $(y, z) \in S$ und $(z, w) \in T$. Es ist dann $(x, z) \in R \bullet S$ und weiter $(x, w) \in (R \bullet S) \bullet T$.

“ \supset ”: Sei $(x, w) \in (R \bullet S) \bullet T$. Zu zeigen ist $(x, w) \in R \bullet (S \bullet T)$. Wir finden $z \in Z$ mit $(x, z) \in R \bullet S$ und $(z, w) \in T$ und dann $y \in Y$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in S$. Es ist dann $(y, w) \in S \bullet T$ und weiter $(x, w) \in R \bullet (S \bullet T)$.

E1.4 Beweis durch Kontraposition

Statt “ $A \Rightarrow B$ ” zeigt man “ $\neg B \Rightarrow \neg A$ ”. Als Beispiel:

Satz: Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Funktionen. Dann gilt:

- (a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv
- (b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv

Beweis: (a) durch Kontraposition: Sei f *nicht* injektiv. Dann finden wir $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Es folgt

$$(g \circ f)(x_1) = g(\underbrace{f(x_1)}_{=f(x_2)}) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2),$$

und wegen $x_1 \neq x_2$ ist $g \circ f$ nicht injektiv.

(b) durch Kontraposition: Sei g *nicht* surjektiv. Dann finden wir $z \in Z$ mit $z \notin g(Y)$.
Wegen

$$(g \circ f)(X) = g(\underbrace{f(X)}_{\subset Y}) \subset g(Y)$$

gilt dann auch $z \notin (g \circ f)(X)$, dh $g \circ f$ ist nicht surjektiv.

E1.5 Beweis durch Widerspruch

Statt " $A \Rightarrow B$ " zeigt man " $A \wedge \neg B \Rightarrow f$ ", wobei f (*falsch*) die Form $C \wedge \neg C$ hat.

Beispiel: " $\sqrt{2}$ ist irrational", dh "Wenn $\frac{p^2}{q^2} = 2$, dann gilt $\neg(p \in \mathbb{N} \wedge q \in \mathbb{N})$ " oder "Wenn $\underbrace{p, q \in \mathbb{N}}_A$, dann $\underbrace{\frac{p^2}{q^2} \neq 2}_B$ ".

Die letzte Aussage beweisen wir durch Widerspruch.

Seien $p, q \in \mathbb{N}$ (A) mit $\frac{p^2}{q^2} = 2$ ($\neg B$). Wir dürfen annehmen, dass p und q keinen gemeinsamen Primfaktor haben (C). Es ist dann $p^2 = 2q^2$, dh 2 ist ein Teiler von p^2 . Dann ist 2 auch ein Teiler von p (zerlege p in Primfaktoren!). Also ist 4 ein Teiler von $p^2 = 2q^2$ und somit 2 ein Teiler von q^2 . Wie eben gezeigt ist dann auch 2 ein Teiler von q . Gezeigt ist: 2 ist gemeinsamer Teiler von p und q , insbesondere gilt $\neg C$, Widerspruch.

E1.6 Äquivalenzrelationen

Eine Relation $R \subset X \times X$ heißt *Äquivalenzrelation* in X , falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiel: Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion, so ist

$$R := \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$$

eine Äquivalenzrelation in X .

konkretes Beispiel: $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ungerade} \\ 0, & x \text{ gerade} \end{cases}$

Ist R eine Äquivalenzrelation in X , so heißt für jedes $x \in X$

$$[x]_R := \{y \in X : (x, y) \in R\}$$

Äquivalenzklasse von x bzgl. R und jedes $y \in [x]_R$ heißt *Repräsentant* der Klasse $[x]_R$.

Es gilt für alle $x, y \in X$ dann $x \in [x]_R$ (R ist reflexiv) und

$$[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \Rightarrow [x]_R = [y]_R,$$

da R symmetrisch und transitiv ist.

Somit: Jede Äquivalenzrelation in X zerlegt X in Äquivalenzklassen, von denen je zwei verschiedene einen leeren Durchschnitt haben.

Im Beispiel oben wird \mathbb{N} zerlegt in die zwei Klassen “gerade Zahlen” und “ungerade Zahlen”.

Ende
Woche 1

E2 Gruppen und Körper

E2.1 Definition: Eine *Gruppe* (G, \cdot) ist eine Menge $G \neq \emptyset$, versehen mit einer *Verknüpfung* $\cdot : G \times G \rightarrow G$ (wir schreiben ab statt $a \cdot b$), für die gilt:

- (G1) $\forall a, b, c \in G : a(bc) = (ab)c$ Assoziativgesetz
- (G2) $\exists e \in G \forall a \in G : ae = ea = a$ neutrales Element
- (G3) $\forall a \in G \exists b \in G : ab = ba = e$ inverses Element

Bemerkung: (i) Das neutrale Element e in (G2) ist eindeutig bestimmt.

[Ist $\tilde{e} \in G$ mit $\forall a \in G : a\tilde{e} = \tilde{e}a$, so folgt $\tilde{e} = \tilde{e}e = e$.]

(ii) Das inverse Element in (G3) ist eindeutig bestimmt.

[Gilt $ab = ba = e$ und $a\tilde{b} = \tilde{b}a = e$, so folgt $\tilde{b} = \tilde{b}e = \tilde{b}(ab) = (\tilde{b}a)b = eb = b$.]

(iii) Wegen (G1) lässt man Klammern weg.

(iv) Es ist nicht gefordert, dass

$$(K) \quad \forall a, b \in G : ab = ba$$

gilt! Eine Verknüpfung mit (K) heißt *kommutativ*, und eine Gruppe (G, \cdot) , in der (K) gilt, heißt *abelsch*. In abelschen Gruppen schreibt man die Verknüpfung gerne “+” statt “.”.

(v) Ist (G, \cdot) eine Gruppe und sind $a, b \in G$, so haben die Gleichungen $ax = b$ und $ya = b$ eindeutige Lösungen, nämlich $x = a^{-1}b$ und $y = ba^{-1}$.

[$ax = b \Rightarrow a^{-1}ax = a^{-1}b \Rightarrow x = a^{-1}b$. Für $x = a^{-1}b$ gilt $ax = aa^{-1}b = b$.]

E2.2 Beispiele

(1) In $(\mathbb{N}, +)$ gilt nur (G1), in $(\mathbb{N}_0, +)$ gelten (G1) und (G2), und $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(2) $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $((0, \infty), \cdot)$ sind abelsche Gruppen.

(3) Sei X eine Menge und $\text{Abb}(X) := \{f : X \rightarrow X\}$. Versieht man $\text{Abb}(X)$ mit der Komposition \circ von Funktionen, so gelten in $(\text{Abb}(X), \circ)$ die Eigenschaften (G1) und (G2): neutrales Element ist id_X . (G3) gilt nicht, wenn X mindestens zwei Elemente enthält.

Aber $\{f : X \rightarrow X : f \text{ ist bijektiv}\}$ ist bzgl. \circ eine Gruppe: das Inverse von f ist die Umkehrabbildung f^{-1} , denn $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_X$. Diese Gruppe ist abelsch genau dann, wenn X höchstens zwei Elemente enthält.

Ist $n \in \mathbb{N}$, so heißt eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ *Permutation* und $S_n := \{\sigma : \sigma \text{ ist Permutation von } \{1, 2, \dots, n\}\}$ heißt *symmetrische Gruppe* (der Ordnung n). Bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente von M , so gilt $|S_n| = n!$ und $|\text{Abb}(X)| = n^n$.

(4) Ist X eine Menge, so ist $\text{Pot}(X)$ bzgl. der symmetrischen Differenz Δ eine abelsche Gruppe [es ist $M\Delta N := M \setminus N \cup N \setminus M$]: neutrales Element ist \emptyset [$M\Delta\emptyset = M$], inverses Element zu M ist M selber [$M\Delta M = \emptyset$] (vgl. Aufgabe 7 vom 1. Übungsblatt).

(5) Endliche Gruppen gibt man gerne durch Verknüpfungstafeln an.

Beispiele: Gruppe mit einem Element $G = \{e\}$, $e \cdot e = e$.

Gruppe mit zwei Elementen $G = \{e, a\}$:

\cdot	e	a
e	e	a
a	a	e

oder $\{\emptyset, X\}$ bzgl. Δ :

Δ	\emptyset	X
\emptyset	\emptyset	X
X	X	\emptyset

Für $X = \{0, 1\}$ sieht $(\text{Pot}(X), \Delta)$ so aus:

Δ	\emptyset	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0, 1\}$
\emptyset	\emptyset	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0, 1\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	\emptyset	$\{0, 1\}$	$\{1\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0, 1\}$	\emptyset	$\{0\}$
$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	\emptyset

Warnung: I.a. kann der Nachweis von (G1) mühsam sein.

E2.3 Definition: Seien G, H Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \rightarrow H$ heißt (*Gruppen-*) *Homomorphismus*, falls gilt

$$\forall a, b \in G : \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Ist φ zusätzlich bijektiv, so heißt φ (*Gruppen-*)*Isomorphismus*. G und H heißen *isomorph*, falls es einen Gruppenisomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ gibt.

Bemerkung: Es gilt stets: $\varphi(e_G) = e_H$, $\varphi(G)$ ist wieder eine Gruppe bzgl. " \cdot_H " und $\varphi^{-1}(\{e_H\})$ ist eine Gruppe bzgl. " \cdot_G ".

Beispiele: (1) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $z \mapsto 2z$ ist ein Homomorphismus bzgl. "+": $\varphi(z+w) = 2(z+w) = 2z + 2w = \varphi(z) + \varphi(w)$.

(2) Rechnen mit Rest: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Setze $\rho_n : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$, $\rho_n(z) :=$ Rest von z bei Division durch n . Definiere $+_n$ in $\{0, 1, \dots, n\}$ durch $m+_n q := \rho_n(m+q)$. Bezeichne die Gruppe $(\{0, 1, \dots, n\}, +_n)$ mit \mathbb{Z}_n . Dann ist $\rho_n : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, +_n)$ ein Homomorphismus. Man bezeichnet die Elemente von \mathbb{Z}_n auch als *Restklassen*, dh $k \sim \{z \in \mathbb{Z} : \rho_n(z) = k\}$ für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Beispiele: $n = 2$:

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$n = 4$:

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

E2.4 Definition: Ein *Körper* $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge $K \neq \emptyset$ mit Verknüpfungen $+, \cdot : K \times K \rightarrow K$ so, dass (A1) – (A9) aus 4.1 gelten.

Beispiele: \mathbb{R} ist ein Körper, \mathbb{Q} ist ein Körper.

Körper mit zwei Elementen \mathbb{F}_2 :
$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Ende
Woche 2

E3 Polynome

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, dh $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

E3.1 Definition: Mit $\mathbb{K}[X]$ bezeichnen wir die Menge aller Polynome mit Koeffizienten aus \mathbb{K} , dh aller formalen Ausdrücke $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{K}$. Der Grad eines Polynoms $p \in \mathbb{K}[X]$ wird wie in Kapitel 5 definiert.

Bemerkung: In $\mathbb{K}[X]$ hat man in natürlicher Weise Verknüpfungen “+” und “·”, indem man wie gewohnt rechnet.

E3.2 Definition: Ein *kommutativer Ring mit Eins* ist eine Menge $R \neq \emptyset$ mit zwei Verknüpfungen “+” und “·”, für die

- (i) $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist (Axiome (A1) – (A4) aus 4.1),
- (ii) “·” assoziativ (A5) und kommutativ (A8) ist,
- (iii) es ein Element $1 \in R \setminus \{0\}$ gibt mit $\forall a \in R : a \cdot 1 = a$ (A6),
- (iv) das Distributivgesetz (A9) gilt.

Beispiele: (0) Jeder Körper ist ein kommutativer Ring mit Eins.

- (1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.
- (2) $\mathbb{K}[X]$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.
- (3) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Definiert man $m \cdot_n q := \rho_n(m \cdot q)$ für alle $m, q \in \mathbb{Z}_n$, so ist $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ein kommutativer Ring mit Eins.

E3.3 Nullteilerfreiheit

In jedem Körper K gilt:

$$(N) \quad \forall a, b \in K : (ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0).$$

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt *nullteilerfrei*, falls (N) in R gilt.

Beispiele: (1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist nullteilerfrei.

- (2) $\mathbb{K}[X]$ ist nullteilerfrei.
- (3) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ genau dann nullteilerfrei, wenn n eine Primzahl ist. Für $n = 6$ ist etwa $2 \cdot_6 3 = 0$. Für eine Primzahl n ist $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ sogar ein Körper (ohne Beweis).

E3.4 Polynomdivision

Satz Sei $p \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom vom Grad $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $l, r \in \mathbb{K}[X]$ mit Grad $l = n - m$ und ($r = 0$ oder Grad $r < m$) so, dass gilt

$$p = l \cdot q + r \quad (\text{Division mit Rest}).$$

Beispiel: $(X^3 + X^2 + X + 1) : (X^2 - 1) = X + 1$ Rest $2X + 2$, also

$$\underbrace{X^3 + X^2 + X + 1}_p = \underbrace{(X + 1)}_l \underbrace{(X^2 - 1)}_q + \underbrace{2X + 2}_r.$$

Folgerung: Ist $p \in \mathbb{K}[X]$ vom Grad $n \geq 1$ und $z_0 \in \mathbb{K}$ Nullstelle von p , so gibt es ein $q \in \mathbb{K}[X]$ vom Grad $n - 1$ mit

$$p(z) = q(z)(z - z_0) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{K}.$$

Beweis: Nach dem Satz ist $p(X) = q(X) \cdot (X - z_0) + r(X)$, wobei $r(X) = a_0$ für ein $a_0 \in \mathbb{K}$. Es folgt

$$a_0 = r(z_0) = p(z_0) - q(z_0)(z_0 - z_0) = p(z_0) = 0.$$

Also ist $r(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{K}$ und das ist die Behauptung.

E3.5 Bemerkung: Ist R ein nullteilerfreier kommutativer Ring, so bilden die formalen Quotienten

$$\left\{ \frac{a}{b} : a \in R, b \in R \setminus \{0\} \right\}$$

einen Körper. Genauer: Auf $R \times (R \setminus \{0\})$ definiert man eine Äquivalenzrelation \sim durch

$$(a, b) \sim (c, d) : \iff ad = bc,$$

und die Verknüpfungen “+” und “·” definiert man in

$$\{ [(a, b)]_{\sim} : a \in R, b \in R \setminus \{0\} \}$$

gemäß den Regeln der Bruchrechnung, also

$$[(a, b)]_{\sim} + [(c, d)]_{\sim} = [(ad + bc, bd)]_{\sim} \quad \text{und} \quad [(a, b)]_{\sim} \cdot [(c, d)]_{\sim} = [(ac, bd)]_{\sim},$$

wobei man sich zunächst davon überzeugen muss, dass dies tatsächlich Funktionen definiert.

Beispiele: (1) Für $R = \mathbb{Z}$ gelangt man so zu \mathbb{Q} .

(2) Für $R = \mathbb{K}[X]$ gelangt man so zum Körper der rationalen Ausdrücke in X :

$$\left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{K}[X], q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \right\}.$$

E4 Anwendungen der Bernoullischen Ungleichung

E4.1 Die Eulersche Zahl e

Setze für jedes $n \in \mathbb{N}$: $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ und $b_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, den Limes bezeichnet man als *Eulersche Zahl* e .

Beweis: Wir gehen in vier Schritten vor.

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$ [klar].

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$ und $b_n \geq b_{n+1}$ [s.u.].

(iii) $M := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nach oben beschränkt [z.B. $b_1 = 4$ ist OS von M].

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup M$.

zu (iv): Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > \sup M - \varepsilon$. Für jedes $n \geq n_0$ gilt dann unter Verwendung von (ii):

$$\sup M \geq a_n \geq a_{n_0} > \sup M - \varepsilon, \quad \text{also} \quad |a_n - \sup M| < \varepsilon.$$

zu (ii): Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} \leq \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^n$$

und nach BU:

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2} \geq 1 - \frac{n}{(n+2)n} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Somit ist $a_n \leq a_{n+1}$ gezeigt. Außerdem gilt:

$$b_n \geq b_{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \Leftrightarrow \left(\frac{(n+1)^2}{(n+2)n}\right)^{n+1} \geq \frac{n+2}{n+1},$$

sowie nach BU:

$$\left(1 + \frac{1}{(n+2)n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{(n+2)n} \geq 1 + \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{n+1}.$$

also ist auch $b_n \geq b_{n+1}$ gezeigt.

Bemerkung: Es gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$ und $e \approx 2.718$. Wir haben aus dem Beweis z.B. die Abschätzung $2 = a_1 < e < b_1 = 4$.

E4.2 Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, so gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Bemerkung: Die Ungleichung gilt auch für $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$.

Beweis durch Induktion nach n . IA $n = 1$: Es gilt $a_1 \leq a_1$.

IS Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $\tilde{a} := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. Dann ist $\tilde{a} > 0$. Es gelte $\tilde{a}^n \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ (IV). Dann ist

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1} \leq \tilde{a}^n a_{n+1} = \tilde{a}^{n+1} \frac{a_{n+1}}{\tilde{a}}$$

und nach BU

$$\frac{a_{n+1}}{\tilde{a}} = 1 + (n+1) \frac{a_{n+1} - \tilde{a}}{(n+1)\tilde{a}} \leq \left(1 + \frac{a_{n+1} - \tilde{a}}{(n+1)\tilde{a}}\right)^{n+1}.$$

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1} &\leq \tilde{a}^{n+1} \left(1 + \frac{a_{n+1} - \tilde{a}}{(n+1)\tilde{a}}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{(n+1)\tilde{a} + a_{n+1} - \tilde{a}}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

Ende
Woche 3

E5 Ergänzungen zu Folgen

E5.1 Definition: Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$, wobei $a_n \leq b_n$, mit $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n - a_n \rightarrow 0$.

Beispiel: $I_n := [0, 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$, definiert eine Intervallschachtelung (I_n) .

E5.2 Satz: Ist (I_n) eine Intervallschachtelung, so gibt es genau eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{r\}$. Es gilt $\max I_n \rightarrow r$ und $\min I_n \rightarrow r$.

Beweis: Setze $a_n := \min I_n$ und $b_n := \max I_n$, so dass $I_n = [a_n, b_n]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (b_n) monoton fallend und beschränkt und (a_n) ist monoton wachsend und beschränkt, also finden wir $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$. Wegen $b_n - a_n \rightarrow 0$ ist $b - a = 0$ und $r := b = a$ ist die eindeutig bestimmte gesuchte Zahl.

Bemerkung: In \mathbb{Q} ist der Satz falsch, es gibt z.B. eine Intervallschachtelung mit $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, dh setzt man $J_n := [a_n, b_n] \cap \mathbb{Q}$, so gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n = \emptyset$.

Beispiel: In E4.1 haben wir gesehen, dass durch $I_n := [(1 + \frac{1}{n})^n, (1 + \frac{1}{n})^{n+1}]$ eine Intervallschachtelung (I_n) definiert wird, für die $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{e\}$ gilt.

E5.3 Bemerkung: Sei (a_n) eine konvergente Zahlenfolge. Dann gilt:

$$(C) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Beweis: Es gelte $a_n \rightarrow a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann finden wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon/2$. Seien nun $n, m \geq n_0$. Dann gilt:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

E5.4 Definition: Eine Folge (a_n) , für welche die Eigenschaft (C) gilt, heißt *Cauchyfolge* (CF).

E5.5 Bemerkung: Jede Cauchyfolge (a_n) ist beschränkt.

Beweis: Übungsaufgabe 9(a) auf Blatt 4.

E5.6 Satz: In \mathbb{R} und in \mathbb{C} gilt, dass jede Cauchyfolge konvergiert.

Beweis: Da Realteil und Imaginärteil einer komplexen Cauchyfolge reelle Cauchyfolgen sind, reicht es zu zeigen, dass reelle Cauchyfolgen konvergieren. Sei (c_n) eine reelle Cauchyfolge. Nach E5.5 ist (c_n) beschränkt. Setze für $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n := \sup\{c_k : k \geq n\}, \quad a_n := \inf\{c_k : k \geq n\}.$$

Dann gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und wir behaupten, dass $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung ist. Ist dies gezeigt, so finden wir nach E5.2 ein $r \in \mathbb{R}$ mit $a_n \rightarrow r$ und $b_n \rightarrow r$. Nach 6.3(4) gilt dann auch $c_n \rightarrow r$, dh (c_n) ist konvergent.

Die Inklusion $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist klar. Noch zu zeigen ist $b_n - a_n \rightarrow 0$. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Nach (C) finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall k, l \geq n_0 : |c_l - c_k| < \varepsilon/2$. Sei $n \geq n_0$. Dann gilt für jedes $k \geq n$:

$$b_n - c_k = \sup\{c_l : l \geq n\} - c_k = \sup\{c_l - c_k : l \geq n\} \leq \varepsilon/2.$$

Folglich ist

$$b_n - a_n = b_n - \inf\{c_k : k \geq n\} = \sup\{b_n - c_k : k \geq n_0\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

womit $b_n - a_n \rightarrow 0$ gezeigt ist.

Bemerkung: Man bezeichnet diese Eigenschaft von \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} als *Vollständigkeit*. \mathbb{Q} ist nicht vollständig: eine Folge (q_n) rationaler Zahlen, die etwa gegen $\sqrt{2}$ konvergiert, ist eine Cauchyfolge in \mathbb{Q} , die in \mathbb{Q} nicht konvergiert.

E5.7 Definition: Eine Menge $M \neq \emptyset$ heißt *endlich*, falls es $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $\varphi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow M$ gibt. Andernfalls heißt M *unendlich*. Eine unendliche Menge M heißt *abzählbar (unendlich)*, falls es eine **surjektive** Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M$ gibt, andernfalls heißt M *überabzählbar*.

Bemerkung: Ist M abzählbar, so gibt es auch eine **bijektive** Abbildung $\psi : \mathbb{N} \rightarrow M$.

Beweis: Wähle zu jedem $m \in M$ ein $\nu(m) \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(\nu(m)) = m$ (etwa $\nu(m) := \min \varphi^{-1}(\{m\})$). Setze $T := \{\nu(m) : m \in M\}$. Dann ist $\varphi : T \rightarrow M$ bijektiv und T ist unendliche Teilmenge von \mathbb{N} . Wir konstruieren rekursiv eine bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \rightarrow T$ wie folgt: $\tau(1) := \min T$ und $\tau(n+1) := \min(T \setminus \{\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n)\})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung $\psi := \varphi \circ \tau : \mathbb{N} \rightarrow M$ bijektiv.

Bemerkung: Wir haben insbesondere gezeigt, dass jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge abzählbar ist.

Beispiele: (1) \mathbb{Z} ist abzählbar: $(0, 1, -1, 2, -2, \dots)$.

(2) Sind M und N abzählbare Mengen, so ist $M \times N$ abzählbar: Für $M = \{m_1, m_2, \dots\}$, $N = \{n_1, n_2, \dots\}$ schreibe

$$M \times N = \{(m_1, n_1), (m_2, n_1), (n_2, m_1), (n_3, m_1), (n_2, m_2), (n_1, m_3), \dots\}.$$

(3) \mathbb{Q} ist abzählbar, denn $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ist nach (1) und (2) abzählbar und die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, $(a, b) \mapsto a/b$ ist surjektiv.

(4) Ist $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen, so ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ abzählbar: Ist nämlich $M_n = \{m_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so wählen wir eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach (2) und haben $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \{m_{\varphi(l)} : l \in \mathbb{N}\}$.

(5) $\text{Pot}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar: Sei $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \text{Pot}(\mathbb{N})$ eine Abbildung. Wir zeigen, dass φ nicht surjektiv ist. Setzt man nämlich $T := \{n \in \mathbb{N} : n \notin \varphi(n)\}$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$n \in T \iff n \notin \varphi(n),$$

so dass $T \neq \varphi(n)$ ist. Somit ist $T \notin \varphi(\mathbb{N})$, dh φ ist nicht surjektiv.

Zusammenhang mit dem *Cantorschen Diagonalverfahren*: Bezeichnet man die Menge aller Abbildungen $x : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, so ist die Abbildung

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \text{Pot}(\mathbb{N}), \quad x \mapsto x^{-1}(\{1\}) = \{n \in \mathbb{N} : x(n) = 1\}$$

bijektiv. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $S \mapsto 1_S$, wobei $1_S : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ die *charakteristische Funktion von S* , gegeben durch $1_S(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \in S \\ 0, & \text{falls } n \notin S \end{cases}$, ist. Man kann hierbei die Folge $(1_S(n))_{n \in \mathbb{N}}$ als “Kodierung” der Teilmenge S verstehen.

Für die Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \text{Pot}(\mathbb{N})$ kann man die Kodierungen $1_{\varphi(1)}, 1_{\varphi(2)}, \dots$ als Zeilen untereinander schreiben. Die Menge T von oben erhält man dann durch “Ändern der Diagonalen”, nämlich durch $1_T(n) := 1 - 1_{\varphi(n)}(n)$. Dann unterscheiden sich 1_T und $1_{\varphi(n)}$ mindestens an der Stelle n . Da dies für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, kommt 1_T nicht als Zeile vor, gehört also nicht zu den Kodierungen der Mengen im Bild von φ .

Bemerkung: Allgemeiner kann man mit demselben Beweis zeigen, dass es für keine Menge $M \neq \emptyset$ eine surjektive Abbildung $M \rightarrow \text{Pot}(M)$ gibt, indem man $T := \{m \in M : m \notin \varphi(m)\}$ betrachtet.

Ende
Woche 4

E6 Ergänzungen zu Reihen

E6.1 Cauchy Kriterium für Reihen

Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $s_N := a_1 + a_2 + \dots + a_N$ für $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} &\Leftrightarrow (s_N)_{N \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert} \Leftrightarrow (s_N)_{N \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge} \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall N, M \geq n_0 : |s_N - s_M| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall N > M \geq n_0 : \left| \sum_{n=M+1}^N a_n \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Satz: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\forall N > M \geq n_0 : \left| \sum_{n=M+1}^N a_n \right| < \varepsilon.$$

E6.2 Satz: Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Dann gilt für $N > M \geq n_0$:

$$\left| \sum_{n=M+1}^N a_n \right| \leq \sum_{n=M+1}^N |a_n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach E6.1.

E6.3 Bemerkung: (1) Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{C} . Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Re} a_n| \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im} a_n| \text{ sind konvergent.}$$

[Das liegt an $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.]

(2) Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R} und

$$b_n := \max\{a_n, 0\}, \quad c_n := -\min\{a_n, 0\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ sind konvergent.}$$

In diesem Fall ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

[Das liegt an $|a_n| = b_n + c_n$ und $a_n = b_n - c_n$.]

(3) Seien (a_n) , (b_n) , (c_n) wie in (2).

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, so gilt $\sum_{n=1}^N a_n \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$).

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty$, so gilt $\sum_{n=1}^N a_n \rightarrow -\infty$ ($N \rightarrow \infty$).

Hierbei schreiben wir $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \alpha \in \{\infty, -\infty\}$, falls $\sum_{n=1}^N d_n \rightarrow \alpha$ für $N \rightarrow \infty$.

[Es gelte etwa $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = s \in [0, \infty)$. Zu $K > 0$ finden wir ein n_0 mit $\sum_{n=1}^{n_0} b_n > K + s$. Für $N \geq n_0$ gilt dann

$$\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N b_n - \underbrace{\sum_{n=1}^N c_n}_{\leq s} \geq \sum_{n=1}^{n_0} b_n - s > (K + s) - s = K,$$

womit $\sum_{n=1}^N a_n \rightarrow \infty$ gezeigt ist.]

Folgerung: Seien (a_n) , (b_n) , (c_n) wie in (2). Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, so gilt $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty$, sowie $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$, $c_n \rightarrow 0$.

Idee zum Beweis des Riemannsches Umordnungssatzes

E6.4 Satz: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Umordnung von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Beweis: Es gibt eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ so, dass $b_n = a_{\varphi(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen E6.3 reicht es, den Fall $a_n \geq 0$ zu betrachten. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{\sum_{n=1}^N a_n : N \in \mathbb{N}\} =: s \in [0, \infty)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sup\{\sum_{k=1}^K b_k : K \in \mathbb{N}\} =: \tilde{s}$. Zu zeigen ist $s = \tilde{s}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=1}^N a_n > s - \varepsilon$. Setze $K := \max\{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \dots, \varphi^{-1}(N)\}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^K b_k = \sum_{k=1}^K a_{\varphi(k)} \geq \sum_{n=1}^N a_n > s - \varepsilon.$$

Also ist $\tilde{s} > s - \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ und damit $\tilde{s} \geq s$.

Sei nun $K \in \mathbb{N}$ und $N := \max\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(K)\}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^K b_k = \sum_{k=1}^K a_{\varphi(k)} \leq \sum_{n=1}^N a_n \leq s.$$

Folglich ist $\tilde{s} \leq s$. Damit ist $\tilde{s} = s$ gezeigt.

Bemerkung: Auf ähnliche Weise lässt sich auch der Beweis des Satzes über das Cauchyprodukt absolut konvergenter Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ führen. Wegen E6.3 kann man sich wieder auf den Fall $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ beschränken.

E6.5 Bemerkung: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und (c_n) eine beschränkte Folge, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ absolut und es gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n a_n| \leq \sup\{|c_n| : n \in \mathbb{N}\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Spezialfälle: (1) “Vorzeichen”, dh $c_n \in \{-1, 1\}$ bzw. $|c_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) “Ausdünnen”, dh $c_n \in \{0, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

In beiden Spezialfällen ist die Aussage für **nicht** absolut konvergente Reihen i.a. falsch.

Beispiel: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Setzt man $c_n = (-1)^n$, so ist $c_n a_n = 1/n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. Setzt man $c_n := (1 + (-1)^n)/2$, so ist $c_n a_n = 1/n$ für n gerade und $= 0$ für n ungerade. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergiert.

E6.6 Satz: \mathbb{R} ist überabzählbar.

Beweis: Es reicht, eine überabzählbare Teilmenge von \mathbb{R} anzugeben. Setze dazu

$$M := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0, 2\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(i) Ist $a_n \in \{0, 2\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ eine konvergente Majorante ist.

(ii) Die Abbildung

$$\psi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow M, \quad (x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$$

ist bijektiv (hierbei ist $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen (x_n) mit $x_n \in \{0, 1\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$).

Surjektivität von ψ ist klar. Zum Beweis der Injektivität seien $(x_n), (y_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ mit $(x_n) \neq (y_n)$. Dann finden wir ein minimales $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} \neq y_{n_0}$, also etwa mit $x_{n_0} = 0$ und $y_{n_0} = 1$. Es gilt dann

$$\psi((x_n)) = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{2x_n}{3^n}}_{=:a} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n} \leq a + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = a + 1/3^{n_0}$$

und

$$\psi((y_n)) = a + \frac{2}{3^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2y_n}{3^n} \geq a + 2/3^{n_0},$$

also $\psi((x_n)) \neq \psi((y_n))$.

(iii) Die Abbildung $\varphi : \text{Pot}(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ gegeben durch $\varphi(T) : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\varphi(T)(n) = 1$, falls $n \in T$, und $= 0$, falls $n \notin T$, ist bijektiv und $\text{Pot}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

Bemerkung: M ist genau die *Cantormenge* C , die man wie folgt erhält: Setze $C_0 := [0, 1]$. C_1 entstehe aus C_0 durch Entfernung des offenen mittleren Drittels $(1/3, 2/3)$. C_2 entstehe aus C_1 durch Entfernen des mittleren Drittels aus jedem verbliebenen Teilintervall, und ebenso entstehe C_{n+1} aus C_n für jedes $n \geq 2$. Man erhält eine Folge $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$ und setzt $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$.

Ende
Woche 5

E7 Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

E7.1 Approximation von Potenzreihen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius R , wobei $0 < R \leq \infty$, sowie

$$f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei $s_N : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto s_N(x) := \sum_{n=0}^N a_n x^n$.

Bekannt: Für jedes $x \in (-R, R)$ gilt: $s_N(x) \rightarrow f(x)$ ($N \rightarrow \infty$).

Fragen: Wie gut ist die Approximation? Wie groß muss, zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$, das N sein, damit $|s_N(x) - f(x)| < \varepsilon$ gilt? Wie hängt das von x ab?

Sei dazu $r \in (0, R)$ und $|x| \leq r$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$|f(x) - s_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| |x|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Dabei gilt $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ absolut konvergiert. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| r^n < \varepsilon$. Für jedes $N \geq n_0$ und alle $x \in [-r, r]$ gilt dann:

$$|f(x) - s_N(x)| < \varepsilon.$$

Das n_0 hängt dabei von $x \in [-r, r]$ nicht ab, d.h. mit diesem n_0 erhalten wir die gewünschte Qualität der Approximation gleich für alle $x \in [-r, r]$.

E7.2 Definition: Sei $D \neq \emptyset$ eine Menge, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion sowie $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt (f_n) eine *Funktionenfolge* und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine *Funktionenreihe*. Die Funktionenfolge (f_n) [bzw. Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$] heißt

- *punktweise konvergent gegen f auf D* , falls für jedes $x \in D$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad [\text{bzw.} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f_n(x) = f(x)].$$

- *gleichmäßig konvergent gegen f auf D* , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
$$[\text{bzw.} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall N \geq n_0 \forall x \in D : \left| \sum_{n=1}^N f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon].$$

E7.3 Satz: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und $r \in (0, R)$. Dann konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $[x_0 - r, x_0 + r]$.

D.h. setzt man $s_N(x) := \sum_{n=0}^N a_n(x-x_0)^n$ und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, so konvergiert $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ auf $[x_0 - r, x_0 + r]$ gleichmäßig gegen f .

Zum Vergleich: $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $(x_0 - R, x_0 + R)$ punktweise gegen f .

Achtung: I.a. hat man keine gleichmäßige Konvergenz auf $(x_0 - R, x_0 + R)$. (vgl. E7.7(1))

E7.4 Satz: Sei $D \neq \emptyset$ und $f, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen sowie (c_n) eine reelle Folge.

- (a) Gilt $|f_n(x) - f(x)| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in D$ und $c_n \rightarrow 0$, so konvergiert (f_n) auf D gleichmäßig gegen f .
- (b) Gilt $|f_n(x)| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in D$ und konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig.

E7.5 Satz: Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen. Die Folge (f_n) konvergiere auf D gleichmäßig gegen f .

- (a) Sind alle f_n beschränkt, so ist auch f beschränkt.
- (b) Sind alle f_n stetig auf D , so ist auch f stetig auf D .

Beweis: (a) Zu $\varepsilon = 1$ finden wir $n \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < 1$ für alle $x \in D$. Da f_n beschränkt ist, finden wir $M \in \mathbb{R}$ mit $|f_n(x)| \leq M$ für alle $x \in D$. Dann gilt für jedes $x \in D$:

$$|f(x)| \leq |f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq M + 1.$$

(b) Sei $x_0 \in D$ und $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_m \rightarrow x_0$ ($m \rightarrow \infty$). Zu zeigen ist $f(x_m) \rightarrow f(x_0)$ ($m \rightarrow \infty$). Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $n \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$. Da f_n stetig ist, finden wir $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x_m) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$ für alle $m \geq m_0$. Für $m \geq m_0$ gilt dann

$$|f(x_m) - f(x_0)| \leq |f(x_m) - f_n(x_m)| + |f_n(x_m) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

E7.6 Folgerung: In der Situation von E7.3 ist f auf $(x_0 - R, x_0 + R)$ stetig.

E7.7 Beispiele: (1) geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $D = (-1, 1)$. Hier ist $f(x) = \frac{1}{1-x}$ nicht beschränkt, aber $f_N(x) := \sum_{n=0}^N x^n$ ist beschränkt für jedes $N \in \mathbb{N}$. Also konvergiert (f_N) nicht gleichmäßig gegen f auf $(-1, 1)$.

(2) $D = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Setzt man $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, so konvergiert (f_n) auf $[0, 1]$ punktweise gegen f . Da alle f_n stetig sind, f jedoch nicht stetig ist, konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f auf $[0, 1]$.

E7.8 Bemerkung: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$ und $r \in (0, R)$, so konvergiert die Reihe auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ gleichmäßig und ist auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ stetig.

Dabei definiert man Stetigkeit und gleichmäßige Konvergenz wörtlich wie bei reellen Funktionen.

Ende
Woche 6

E8 Ergänzungen zur Stetigkeit

E8.1 Beweis des Zwischenwertsatzes

Satz 8.8: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Beweis: O.B.d.A sei $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ [“Ohne Beschränkung der Allgemeinheit”: sonst betrachte man $-f$].

Setze $a_1 := a$, $b_1 := b$. Dann gilt $f(a_1) \leq y_0 \leq f(b_1)$ und $b_1 - a_1 = b - a$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und a_n, b_n mit $a \leq a_n \leq b_n \leq b$, $f(a_n) \leq y_0 \leq f(b_n)$ und $b_n - a_n = 2^{1-n}(b-a)$ schon konstruiert. Wir betrachten $x_n := (a_n + b_n)/2$ und setzen

$$\begin{aligned} a_{n+1} &:= a_n, & b_{n+1} &:= x_n, \text{ falls } f(a_n) \leq y_0 \leq f(x_n) \\ a_{n+1} &:= x_n, & b_{n+1} &:= b_n, \text{ falls } f(x_n) < y_0 \leq f(b_n). \end{aligned}$$

Es ist $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2 = 2^{-n}(b-a)$, $a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b$ und $f(a_{n+1}) \leq y_0 \leq f(b_{n+1})$.

Dann ist (a_n) monoton wachsend, (b_n) monoton fallend, $b_n \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n - a_n \rightarrow 0$. Also ist $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung, und wir finden nach E5.2 ein $x_0 \in [a, b]$ mit $a_n \rightarrow x_0$, $b_n \rightarrow x_0$. Da f stetig ist, folgt

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq y_0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_0),$$

also $f(x_0) = y_0$.

Andere Möglichkeit: Sei $f(a) < y_0 < f(b)$ (der Fall $f(a) = y_0$ oder $f(b) = y_0$ ist klar). Sei $M := \{x \in [a, b] : f(x) > y_0\}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ (wg. $b \in M$), und a ist untere Schranke von M , also existiert $x_0 := \inf M \in [a, b]$.

Wir haben nach den Eigenschaften des Infimums $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x < x_0 + \varepsilon$, also auch $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : |x - x_0| < \varepsilon$. Ist $n \in \mathbb{N}$, so finden wir zu $\varepsilon = 1/n$ ein $x_n \in M$ mit $|x_n - x_0| < 1/n$. Somit haben wir eine Folge (x_n) in M mit $x_n \rightarrow x_0$. Da f in x_0 stetig ist, folgt

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x_n)}_{> y_0 \text{ wg. } x_n \in M} \geq y_0.$$

Insbesondere ist $x_0 > a$ (wg. $f(a) < y_0$) und wir finden eine Folge (\tilde{x}_n) in $[a, x_0]$ mit $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$. Da f in x_0 stetig ist, folgt

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(\tilde{x}_n)}_{\leq y_0 \text{ wg. } \tilde{x}_n \in M} \leq y_0.$$

Damit ist $f(x_0) = y_0$ gezeigt.

E8.2 Beweis des Satzes in 8.10

Satz: Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende und stetige Funktion. Dann ist $f(I)$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.

Beweis: Nur die Stetigkeit ist noch zu zeigen. Sei dazu $y_0 \in f(I)$ und seien (y_n) und (\tilde{y}_n) Folgen in $f(I)$ mit $y_n \rightarrow y_0$ und $\tilde{y}_n \rightarrow y_0$, wobei (y_n) monoton fallend und (\tilde{y}_n) monoton wachsend sei. Dann ist $(f^{-1}(y_n))$ monoton fallend und durch $f^{-1}(y_0)$ nach unten beschränkt, und $(f^{-1}(\tilde{y}_n))$ ist monoton wachsend und durch $f^{-1}(y_0)$ nach oben beschränkt, also gibt es $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(y_n) \rightarrow x$ und $f^{-1}(\tilde{y}_n) \rightarrow \tilde{x}$. Wegen der Monotonie von f^{-1} gilt dabei für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{-1}(\tilde{y}_n) \leq \tilde{x} \leq f^{-1}(y_0) \leq x \leq f^{-1}(y_n).$$

Da I ein Intervall ist, folgt $\tilde{x}, x \in I$. Aufgrund der Stetigkeit von f haben wir

$$f(\tilde{x}) = \lim f(f^{-1}(\tilde{y}_n)) = \lim \tilde{y}_n = y_0 = \lim y_n = \lim f(f^{-1}(y_n)) = f(x).$$

Es folgt $\tilde{x} = f^{-1}(y_0) = x$.

Wir verwenden den Satz aus 8.9. Sei dazu (z_n) eine Folge in $f(I)$ mit $z_n \rightarrow y_0$ und $z_n > y_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $y_n := \sup\{z_k : k \geq n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen $z_k \rightarrow y_0$ für $k \rightarrow \infty$, wobei $z_k > y_0$ für alle k , gilt $z_k > z_n$ nur für endlich viele $k \geq n$. Also ist $y_n = \max\{z_k : k \geq n\}$ und somit insbesondere $y_n \in f(I)$. Außerdem ist (y_n) monoton fallend mit $y_n \rightarrow y_0$. Nach dem eben Gezeigten folgt $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y_0)$, und wegen $f^{-1}(y_n) \geq f^{-1}(z_n) \geq f^{-1}(y_0)$ gilt dann auch $f^{-1}(z_n) \rightarrow f^{-1}(y_0)$.

Eine Folge (\tilde{z}_n) in $f(I)$ mit $\tilde{z}_n < y_0$ und $\tilde{z}_n \rightarrow y_0$ behandelt man ähnlich.

E8.3 Beweis von Satz 8.14

Satz 8.14: Sei $D \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(D)$ abgeschlossen und beschränkt und es gibt $x_1, x_2 \in D$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in D$.

Beweis: Wir beginnen mit einer **Vorbetrachtung**:

Sei (y_n) eine Folge in $f(D)$ mit $y_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Dann finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $f(x_n) = y_n$. Somit ist (x_n) eine Folge in D , und da D beschränkt ist, finden wir eine Teilfolge $(x_{k(n)})$ mit $x_{k(n)} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$. Da D abgeschlossen ist, folgt $x_0 \in D$. Aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 erhalten wir $f(x_{k(n)}) \rightarrow f(x_0)$. Es folgt $\alpha = f(x_0) \in \mathbb{R}$.

Den eigentlichen Beweis führen wir wie folgt:

(i) $f(D)$ ist abgeschlossen: Dies folgt aus der Vorbemerkung, wenn wir $\alpha := y_0 \in \mathbb{R}$ nehmen. Wir erhalten $y_0 = f(x_0) \in f(D)$.

(ii) $f(D)$ ist beschränkt: In der Vorbetrachtung haben wir gezeigt, dass es keine Folge (y_n) in $f(D)$ gibt mit $|y_n| \rightarrow \infty$.

(iii) Existenz von x_1 und x_2 : Wir wählen Folgen (y_n) und (z_n) in $f(D)$ mit $y_n \rightarrow \inf f(D)$ und $z_n \rightarrow \sup f(D)$. Nach der Vorbetrachtung finden wir $x_1, x_2 \in D$ mit $f(x_1) = \inf f(D)$ und $f(x_2) = \sup f(D)$. Für jedes $x \in D$ gilt dann $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, wie gewünscht.

E8.4 Kompaktheit

Definition: Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ heißt *kompakt*, falls jede Folge (x_n) in K eine Teilfolge besitzt, die gegen ein $x_0 \in K$ konvergiert.

Satz: Sei $K \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

$$K \text{ ist kompakt} \Leftrightarrow K \text{ ist abgeschlossen und beschränkt.}$$

Beweis: “ \Rightarrow ”: Sei K kompakt. Dann enthält K keine Folge (x_n) mit $|x_n| \rightarrow \infty$. Somit ist K beschränkt. Ist (x_n) eine Folge in K mit $x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen x_0 . Da K kompakt ist, existiert aber eine Teilfolge, die gegen ein Element von K konvergiert. Somit folgt $x_0 \in K$, und die Abgeschlossenheit ist gezeigt.

“ \Leftarrow ”: Sei K abgeschlossen und beschränkt, sowie (x_n) eine Folge in K . Da K beschränkt ist, hat (x_n) eine Teilfolge, die gegen ein $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert. Da K abgeschlossen ist, folgt $x_0 \in K$. Damit ist die Kompaktheit von K gezeigt.

Beispiel: Die Cantormenge C ist kompakt.

Ende
Woche 7

E8.5 Satz: Sei $K \subset \mathbb{R}$ und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt.

Bemerkung: Das ist Satz 8.14. Man beweise die Aussage zur Übung mit der Definition aus E8.4.

E8.6 Satz: Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gilt $d(A, B) > 0$, wobei

$$d(A, B) := \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\} \quad \text{Abstand von } A \text{ und } B,$$

und es gibt $x_0 \in A, y_0 \in B$ mit $|x_0 - y_0| = d(A, B)$.

Bemerkung: Gilt $B = \{y_0\}$, so gibt es also in A (mindestens) eine *Bestapproximation* x_0 von y_0 .

Beweis des Satzes: Wir finden Folgen (x_n) in A und (y_n) in B mit $|x_n - y_n| \rightarrow d(A, B) =: \delta$. Da A kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{k(n)})$ von (x_n) und $x_0 \in A$ mit $x_{k(n)} \rightarrow x_0$. Da B kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(y_{k(l(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(y_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ und $y_0 \in B$ mit $y_{k(l(n))} \rightarrow y_0$ für $n \rightarrow \infty$. Es folgt

$$|x_0 - y_0| = \lim_n |x_{k(l(n))} - y_{k(l(n))}| = \delta.$$

Wegen $A \cap B = \emptyset$ ist $x_0 \neq y_0$ und somit $\delta = |x_0 - y_0| > 0$. Damit ist alles gezeigt.

E8.7 Der Raum der beschränkten Funktionen

Hierbei heißt “Raum” zunächst nichts anderes als “Menge”.

Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und

$$B(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist beschränkt}\}.$$

Dann ist $B(M) \neq \emptyset$ und für alle $f, g \in B(M)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $f + \alpha g \in B(M)$, denn: Ist $|f(x)| \leq c$ und $|g(x)| \leq d$ für alle $x \in M$, so gilt für jedes $x \in M$:

$$|f(x) + \alpha g(x)| \leq |f(x)| + |\alpha| |g(x)| \leq c + |\alpha| d. \quad (+)$$

Bemerkung: $B(M)$ ist ein “Vektorraum” über \mathbb{R} (\rightarrow später!).

E8.8 Definition: Für $f \in B(M)$ sei

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in M\}.$$

Die Zahl $\|f\|_\infty \in [0, \infty)$ heißt *Supremumsnorm von f* . Die Abbildung $\|\cdot\|_\infty : B(M) \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f \mapsto \|f\|_\infty$ hat folgende Eigenschaften:

Für alle $f, g \in B(M)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(N1) \quad \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ für alle } x \in M;$$

$$(N2) \quad \|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty;$$

$$(N3) \quad \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Bemerkung: Dh $\|\cdot\|_\infty$ ist eine “Norm” auf $B(M)$ (\rightarrow später!).

Zum Beweis der Eigenschaften bemerken wir, dass (N1) klar ist und (N3) in (+) schon gezeigt wurde (setze $\alpha = 1$ und $c = \|f\|_\infty$, $d = \|g\|_\infty$). Auch “ \leq ” in (N2) ist durch (+) schon gezeigt (allerdings für g , setze $f = 0$ in (+)). Für $\alpha = 0$ ist (N2) klar. Für $\alpha \neq 0$ schreiben wir

$$\|f\|_\infty = \left\| \frac{1}{\alpha} \alpha f \right\|_\infty \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha f\|_\infty,$$

wobei wir die schon eingesehene Ungleichung verwendet haben. Damit ist auch “ \geq ” in (N2) gezeigt.

In den folgenden Abschnitten E8.9–E8.11 fassen wir beschränkte Funktionen f, g auf M (bzw. K) als “Punkte” der Menge $B(M)$ auf, für die wir durch $\|f - g\|_\infty$ einen “Abstand” erklärt haben. Diese Betrachtungsweise erlaubt es z.B., die Qualität einer Approximation von Funktionen zu *messen*. Das Prinzip ist in der mathematischen Physik von großer Bedeutung.

¹Der Punkt in $\|\cdot\|_\infty$ deutet an, dass hier das Argument der Abbildung eingesetzt werden muss, in diesem Fall also Funktionen $f \in B(M)$

E8.9 Definition: Sei (f_n) eine Folge in $B(M)$.

(1) Es heißt (f_n) *konvergent* bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, falls es ein $f \in B(M)$ gibt mit $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

(2) Es heißt (f_n) *Cauchyfolge* bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ($\|\cdot\|_\infty$ -CF), falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \quad (\text{CF})$$

Bemerkung: Sei (f_n) eine Folge in $B(M)$ und $f \in B(M)$. Dann gilt:

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad (f_n) \text{ konvergiert auf } M \text{ gleichmäßig gegen } f.$$

[Denn: $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.]

E8.10 Satz: Ist (f_n) eine $\|\cdot\|_\infty$ -Cauchyfolge in $B(M)$, so gibt es ein $f \in B(M)$ mit $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Beweis: (i) Sei $x \in M$. Wegen $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ ist $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} und somit konvergent.

(ii) Setze $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := \lim_n f_n(x)$. Wir zeigen $f \in B(M)$ und $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

(iii) Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen n_0 gemäß (CF) und haben für alle $n, m \geq n_0$ und alle $x \in M$: $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Sei nun $n \geq n_0$ fest. Dann gilt für jedes $x \in M$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Wir erhalten $f_n - f \in B(M)$ und $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Also gilt auch $f = f_{n_0} - (f_{n_0} - f) \in B(M)$, und wir haben $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ gezeigt.

E8.11 Satz: Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und

$$C(K) := \{f : K \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}.$$

Dann gilt $C(K) \subseteq B(K)$ und zu jeder $\|\cdot\|_\infty$ -Cauchyfolge (f_n) in $C(K)$ gibt es ein $f \in C(K)$ mit $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Bemerkung: Ein wichtiger Fall ist $K = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Beweis: Nach Satz 8.14 gilt $C(K) \subseteq B(K)$. Zu (f_n) gibt es nach E8.10 ein $f \in B(K)$ mit $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. Nach E7.4 und der Bemerkung in E8.9 ist $f \in C(K)$.

E8.12 Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f *gleichmäßig stetig* (auf D), falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, \tilde{x} \in D : |x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon.$$

Zum Vergleich: f ist stetig auf D bedeutet

$$\forall x \in D, \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tilde{x} \in D : |x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon.$$

Also ist eine auf D gleichmäßige Funktion auch auf D stetig. Die Umkehrung gilt i.a. nicht (vgl. Beispiel (2) unten).

Beispiele: (1) $f(x) = x$ ist auf $D = \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig (das geht mit $\delta = \varepsilon$).

(2) $f(x) = x^2$ ist auf $D = \mathbb{R}$ **nicht gleichmäßig stetig**: Setze $\varepsilon := 1$. Sei $\delta > 0$. Setzt man dann $x := \delta^{-1}$, $\tilde{x} := x + \delta/2$, so gilt $|x - \tilde{x}| = \delta/2 < \delta$ und

$$|f(x) - f(\tilde{x})| = (\tilde{x})^2 - x^2 = (\tilde{x} - x)(\tilde{x} + x) = \frac{\delta}{2} \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geq 1 = \varepsilon.$$

E8.13 Satz: Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auf K gleichmäßig stetig.

Beweis: Sonst gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, \tilde{x}_n \in K$ finden mit $|x_n - \tilde{x}_n| < 1/n$ (*) und $|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon$ (**). Da K kompakt ist, hat (x_n) ein konvergente Teilfolge $(x_{k(n)})$ mit Grenzwert $x_0 \in K$. Wegen (*) gilt dann auch $\tilde{x}_{k(n)} \rightarrow x_0$. Da f stetig ist, folgt

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| = \lim_n |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon,$$

(die letzte Ungleichung folgt aus (**)). Das ist ein Widerspruch zu $\varepsilon > 0$.

Bemerkung: Wir werden diesen Satz für $K = [a, b]$ verwenden, um die Integrierbarkeit stetiger Funktionen einzusehen.

Ende
Woche 8

E8.14 Der Abschluss einer Menge

Definition: Für $D \subset \mathbb{R}$ heißt

$$\overline{D} := \{x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset\}$$

der *Abschluss* von D .

Bemerkung: Es ist $D \subseteq \overline{D}$, und für $x \notin D$ gilt:

$$x \in \overline{D} \Leftrightarrow x \text{ ist Häufungspunkt von } D$$

(zur Definition von "Häufungspunkt" siehe 8.4).

Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) \overline{D} ist abgeschlossen.

(2) D ist abgeschlossen $\Leftrightarrow D = \overline{D}$.

Beweis: (1) Sei (x_n) Folge in \overline{D} mit $x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $x_0 \in \overline{D}$. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Wir finden ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \varepsilon/2$ und (wg. $x_n \in \overline{D}$) ein $\tilde{x} \in D$ mit $|x_n - \tilde{x}| < \varepsilon/2$. Es folgt $|\tilde{x} - x_0| < \varepsilon$, dh $\tilde{x} \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$.

(2) “ \Leftarrow ” gilt nach (1). “ \Rightarrow ”: Sei D abgeschlossen. Die Inklusion $D \subset \overline{D}$ ist nach obiger Bemerkung klar. Sei also $x \in \overline{D}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ finden wir ein $x_n \in U_{1/n}(x) \cap D$. Dann ist (x_n) eine Folge in D mit $x_n \rightarrow x$ (wg. $|x_n - x| < 1/n$). Da D abgeschlossen ist, folgt $x \in D$.

Beispiele: Für $D = (0, 1]$ ist $\overline{D} = [0, 1]$. Für $D = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ist $\overline{D} = [0, 1]$.

E8.15 Satz (Fortsetzung gleichmäßig stetiger Funktionen): Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in D$. Die Funktion g ist gleichmäßig stetig.

Beweis: Wir beginnen mit einer

Vorbetrachtung: Für jede Cauchyfolge (x_n) in D ist $(f(x_n))$ wieder eine Cauchyfolge und somit konvergent.

Beweis dafür: Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $\delta > 0$ gemäß der gleichmäßigen Stetigkeit von f und dann $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \delta$ für alle $n, m \geq n_0$. Es folgt $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$.

(i) Sei $x \in \overline{D}$. Wir finden eine Folge (x_n) in D mit $x_n \rightarrow x$. Da (x_n) eine Cauchyfolge ist, existiert $\lim_n f(x_n)$ nach der Vorbetrachtung.

(ii) Wir setzen

$$g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \text{ falls } (x_n) \text{ Folge in } D \text{ ist mit } x_n \rightarrow x.$$

Sind $(x_n), (\tilde{x}_n)$ Folgen in D mit $x_n \rightarrow x, \tilde{x}_n \rightarrow x$, so konvergiert auch die durch $\xi_{2n} := x_n, \xi_{2n+1} := \tilde{x}_n$ definierte Folge (ξ_n) gegen x , und es folgt $\lim_n f(x_n) = \lim_n f(\xi_n) = \lim_n f(\tilde{x}_n)$.

(iii) Für $x \in D$ gilt $g(x) = f(x)$ [wähle $x_n = x$ für alle n].

(iv) g ist gleichmäßig stetig: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ gemäß der gleichmäßigen Stetigkeit von f . Seien nun $x, \tilde{x} \in D$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta$. Wähle Folgen $(x_n), (\tilde{x}_n)$ mit $x_n \rightarrow x, \tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \tilde{x}_n| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, also

$$|f(x) - f(\tilde{x})| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \leq \varepsilon.$$

Beispiel: $D = (0, 1], \overline{D} = [0, 1], f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sin(1/x)$. Es gilt $x_n := (n\pi)^{-1} \rightarrow 0, f(x_n) = 0 \rightarrow 0$ und $\tilde{x}_n := (2n\pi + \pi/2)^{-1} \rightarrow 0, f(\tilde{x}_n) = 1 \rightarrow 1$. Also existiert $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ nicht, und es gibt kein $g \in C([0, 1])$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in [0, 1]$. Nach dem Satz ist f nicht gleichmäßig stetig (das lässt sich natürlich auch direkt zeigen!).

E9 Ergänzungen zur Integration

E9.1 Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und

$$M := \{x \in [a, b] : f \text{ ist in } x \text{ nicht stetig}\}.$$

Ist M endlich, so gilt $f \in R[a, b]$.

Beweis: Es gelte $M = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Nach 10.9(1) können wir das Intervall in Teilintervalle I der Form $[\xi_j, c]$ oder $[c, \xi_j]$ aufteilen mit $I \cap M = \{\xi_j\}$. Man braucht also nur die Fälle $M = \{a\}$ und $M = \{b\}$ zu betrachten.

Wir finden $\gamma > 0$ mit $|f(x)| \leq \gamma$ für alle $x \in [a, b]$.

Falls $M = \{a\}$, so wählen wir $c \in (a, b]$ mit $c - a < \frac{\varepsilon}{4\gamma}$. Dann gilt $f \in R[c, b]$ und wir finden eine Zerlegung \tilde{Z} von $[c, b]$ mit $S_f(\tilde{Z}) - s_f(\tilde{Z}) < \varepsilon/2$. Wir setzen $Z := \{a\} \cup \tilde{Z}$ und erhalten

$$S_f(Z) - s_f(Z) = \underbrace{(\sup f([a, c]) - \inf f([a, c]))}_{\leq 2\gamma} (c - a) + S_f(\tilde{Z}) - s_f(\tilde{Z}) < 2\gamma \frac{\varepsilon}{4\gamma} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Der Fall $M = \{b\}$ geht analog.

E9.2 Vertauschen von Limes und Integral

Bemerkung: 10.10 besagt: Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gehört zu $R[a, b]$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in R[a, b]$ existiert mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Satz: Ist (f_n) eine Folge in $R[a, b]$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf $[a, b]$. Dann gilt $f \in R[a, b]$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Beweis: $f \in R[a, b]$ folgt aus der Bemerkung oben. Außerdem gilt

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\leq \|f_n - f\|_\infty} dx \leq (b - a) \|f_n - f\|_\infty,$$

woraus wegen $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$ Konvergenz der Integrale folgt.

Beispiel: Sei $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \begin{cases} 4x - 1 & , x \in [1/4, 1/2] \\ 2 - 2x & , x \in (1/2, 1] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ und $f_n(x) := 2^{n-1}g(2^{n-1}x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 1]$. Dann gilt für alle $x \in [0, 1]$: $f_n(x) \rightarrow 0$, aber

für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{3}{8}$ und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{3}{8} \neq 0 = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{=0} dx.$$

Hier konvergiert (f_n) auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig gegen Null.

E9.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung: Seien $f, g \in R[a, b]$ und $g \geq 0$ auf $[a, b]$. Setzt man $M := \sup f([a, b])$ und $m := \inf f([a, b])$, so gibt es ein $\mu \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b fg dx = \mu \int_a^b g dx.$$

Ist f zusätzlich stetig auf $[a, b]$, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $\mu = f(\xi)$.

Beweis: Der Zusatz folgt aus 8.14 und 8.8. Wegen $m \leq f \leq M$ und $g \geq 0$ gilt $mg \leq fg \leq Mg$ und nach Integration

$$m \int_a^b g dx \leq \int_a^b fg dx \leq M \int_a^b g dx.$$

Ist $\int_a^b g dx = 0$, so wähle man $\mu \in [m, M]$ beliebig. Wegen $g \geq 0$ ist andernfalls $A := \int_a^b g dx > 0$ und $\mu := \int_a^b fg dx / A$.

Ende
Woche 9

E10 Bemerkungen zu Differentialgleichungen

E10.1 Schreibweisen: Sei $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Statt y' schreibt man für Ableitungen nach Leibniz auch $\frac{dy}{dx}$.

Vorstellung dabei:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

wobei $\Delta y = y(x) - y(x_0)$ und $\Delta x = x - x_0$ Differenzen sind und dy , dx “Differenziale” (“infinitesimale Größen”). Diese Vorstellung ist eher von historischem Interesse. Trotzdem sehen einige Ableitungsregeln in dieser Schreibweise sehr suggestiv aus, z.B.

Ableitung der Umkehrfunktion (x als Funktion von y):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Kettenregel (z als Funktion von y ; y als Funktion von x):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

Die Argumente werden dabei in der Notation unterdrückt.

E10.2 Explizite Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = f(x, y), \tag{D}$$

wobei $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion sei und $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle.

Bedeutung: Häufig ist x hier ein Zeitparameter und $y = y(x)$ beschreibt einen Zustand zur Zeit x . (D) besagt, dass die Zustandsänderung (zum Zeitpunkt x) abhängt vom gegebenen Zeitpunkt x und dem gegebenen Zustand y .

Veranschaulichung durch Richtungsfeld: In jedem Punkt $(x, y) \in I \times J$ gibt $f(x, y)$ die durch (D) gegebene **Steigung** in diesem Punkt an. Dies lässt sich graphisch darstellen.

Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{AWP}$$

wobei $(x_0, y_0) \in I \times J$ gegeben ist.

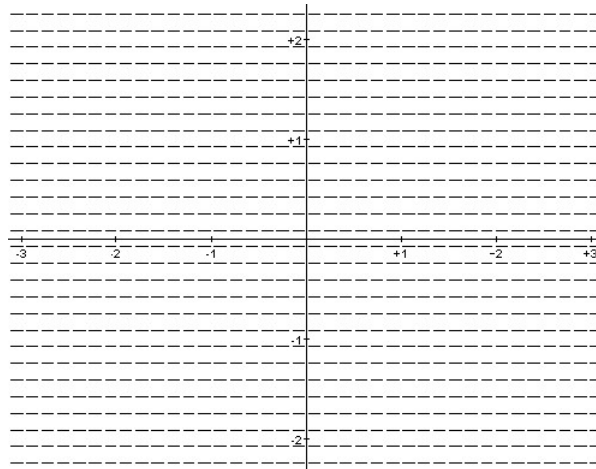
E10.3 Definition: Eine *Lösung von (D)* ist eine differenzierbare Funktion $\phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $\tilde{I} \subset I$ ein Intervall ist, mit $\phi(x) \in J$ für alle $x \in \tilde{I}$ und

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \text{für alle } x \in \tilde{I}.$$

Eine *Lösung von (AWP)* ist eine Lösung $\phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ von (D) mit $x_0 \in \tilde{I}$ und $\phi(x_0) = y_0$.

E10.4 Einfache Beispiele

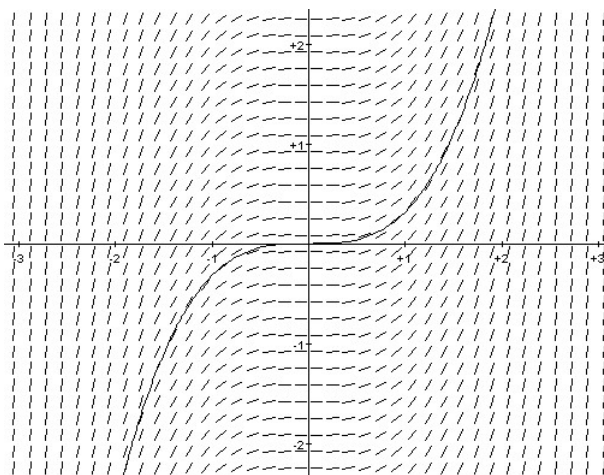
1) $y' = 0$: Nach 11.8 (Folgerung aus dem MWS) sind Lösungen genau die konstanten Funktionen.



Richtungsfeld von $y' = 0$.

2) $y' = a(x)$ mit $y(x_0) = y_0$, wobei $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in I$. Nach dem Hauptsatz 11.9 ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x a(t) dt, \quad x \in I.$$



Richtungsfeld von $y' = x^2$.

3) $y' = \alpha y$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$. Hier sind $I = J = \mathbb{R}$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist durch $y(x) = ce^{\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$, eine Lösung gegeben (nachrechnen!). Andere Lösungen gibt es nicht: Ist ϕ eine

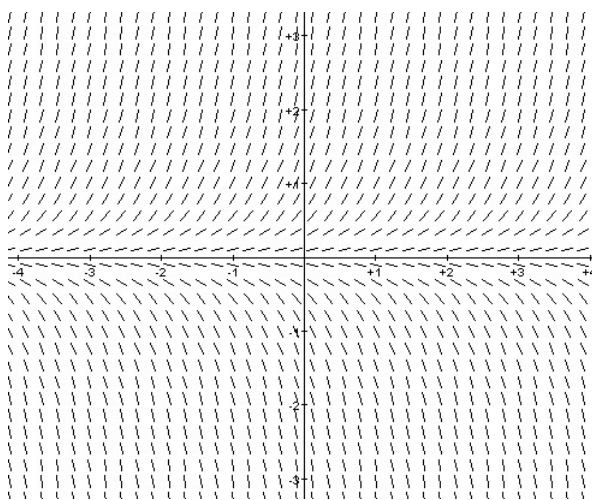
Lösung, so gilt

$$(\phi e^{-\alpha x})' = \phi' e^{-\alpha x} + \phi e^{-\alpha x}(-\alpha) = \underbrace{(\phi' - \alpha\phi)}_{=0} e^{-\alpha x} = 0.$$

Nach 11.8 gibt es dann eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $\phi(x)e^{-\alpha x} = c$ für alle x , dh mit $\phi(x) = ce^{\alpha x}$ für alle x .

Eindeutige Lösung mit der Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$ ist dann

$$y(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}, \quad x \in I.$$



Richtungsfeld von $y' = 2y$.

4) $y' = a(x)y$, wobei $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Setze $A(x) := \int_b^x a(t) dt$, $x \in I$, wobei $b \in I$ fest ist. Dann gilt $A' = a$ auf I und Lösungen sind gegeben durch

$$y(x) = ce^{A(x)}, \quad x \in I,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Wie bei 3) zeigt man, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Eindeutige Lösung mit der Anfangswertbedingung $y(x_0) = y_0$ ist

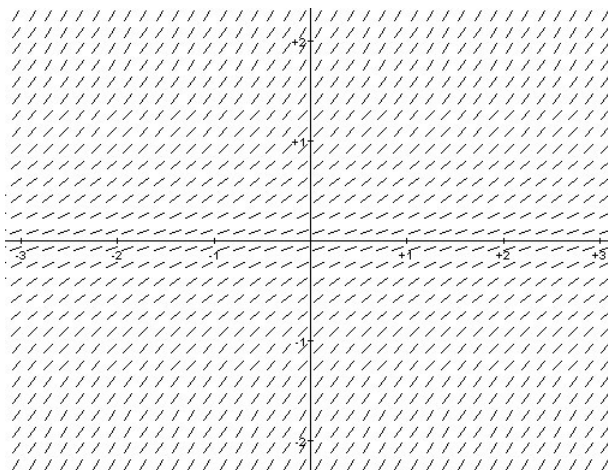
$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(t) dt}, \quad x \in I.$$

5) $y' = \sqrt{|y|}$: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\phi_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \phi_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{4} & , x \geq x_0 \\ 0 & , x < x_0 \end{cases}$$

eine Lösung (nachrechnen!) mit dem Anfangswert $\phi_{x_0}(x_0) = 0$. Eine weitere Lösung mit diesem Anfangswert ist $z(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Das Anfangswertproblem $y' = \sqrt{|y|}$, $y(x_0) = 0$

hat also keine eindeutige Lösung, die Lösung verzweigt sich bei x_0 . Es gibt sogar unendlich viele Lösungen dieses Anfangswertproblems, denn für jedes $c > x_0$ ist ϕ_c ebenfalls eine Lösung des Anfangswertproblems. Es ist nicht klar, ob überhaupt und - wenn ja - an welchem Punkt $c \geq x_0$ eine Lösung die Null verlässt.



Richtungsfeld von $y' = \sqrt{|y|}$.

6) $y' = (1 - y)y$ (logistisches Wachstum): Es ist klar, dass $y(x) = 0$ und $y(x) = 1$ Lösungen sind. Wir betrachten die Anfangsbedingung $y(0) = y_0 \in (0, 1)$. Ist ϕ eine Lösung des Anfangswertproblems auf dem Intervall $[0, a)$, wobei $a > 0$ so gewählt ist, dass $\phi(t) \in (0, 1)$ für alle $t \in [0, a)$ ist, so gilt für alle $t \in [0, a)$:

$$\frac{\phi'(t)}{(1 - \phi(t))\phi(t)} = 1.$$

Wir integrieren dies über $[0, x]$ und erhalten für $x \in [0, a)$:

$$x = \int_0^x \frac{\phi'(t)}{(1 - \phi(t))\phi(t)} dt = \int_0^x \frac{\phi'(t)}{1 - \phi(t)} + \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} dt.$$

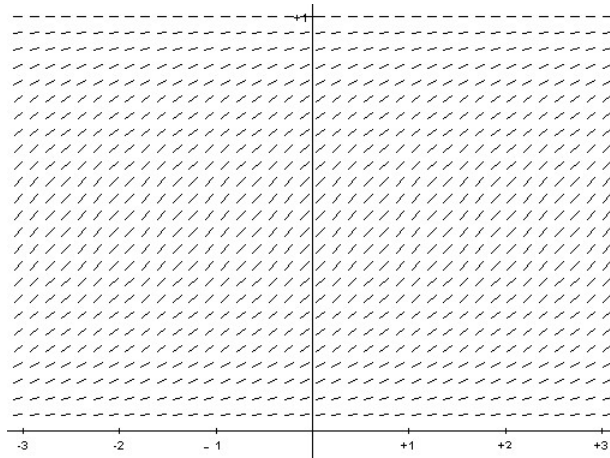
Nach dem Hauptsatz ist das Integral

$$= [-\ln(1 - \phi(t)) + \ln \phi(t)]_0^x = \ln \frac{\phi(x)}{1 - \phi(x)} - \underbrace{\ln \frac{y_0}{1 - y_0}}_{=:d}.$$

Wir erhalten somit für jedes $x \in [0, a)$:

$$\frac{\phi(x)}{1 - \phi(x)} = e^{x+d}, \quad \text{dh} \quad \phi(x) = 1 - (e^{x+d} + 1)^{-1} = 1 - \left(\frac{y_0}{1 - y_0} e^x + 1\right)^{-1}.$$

Umgekehrt prüft man nach, dass dadurch tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems gegeben ist. Wir sehen nun, dass wir a beliebig groß machen können, so dass die Lösung auf $[0, \infty)$ existiert.



Richtungsfeld von $y' = (1 - y)y$.

Ende
Woche 10

E10.5 Die lineare Differentialgleichung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem für die lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y + b(x) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (1)$$

wobei $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Sind $y, z : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen von

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (\text{inhomogene Gleichung}), \quad (2)$$

so ist $w := y - z : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung der zugehörigen *homogenen Gleichung*

$$y' = a(x)y, \quad (3)$$

denn:

$$w' = y' - z' = ay + b - (az + b) = a(y - z) = aw.$$

Folgerung: (1) Wenn (1) lösbar ist, ist die Lösung eindeutig.

(2) Ist y_P eine Lösung von (2), so gibt es zu **jeder** Lösung \tilde{y} von (2) ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{y}(x) = ce^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + y_P(x), \quad x \in \tilde{I}.$$

Beides folgt aus der Bemerkung und Beispiel E10.4(4).

Variation der Konstanten

Setze $A(x) := \int_{x_0}^x a(t) dt$, $x \in I$. Eine Lösung $y_P : I \rightarrow \mathbb{R}$ von (2) erhält man aus dem Ansatz

$$y_P(x) = c(x)e^{A(x)}, \quad x \in I.$$

Wir rechnen

$$y'_P(x) = c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)y_P(x) + c'(x)e^{A(x)}.$$

Wenn dies $= a(x)y_P(x) + b(x)$ sein soll, dann muss also gelten

$$c'(x) = e^{-A(x)}b(x), \quad x \in I.$$

Die rechte Seite ist stetig auf I und wir erhalten

$$c(x) = \int e^{-A(x)}b(x) dx, \quad x \in I.$$

Die Funktion c ist nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt, was aber genau zu Folgerung (2) oben passt.

Fazit: Setzt man $A(x) := \int_{x_0}^x a(t) dt$, so ist die eindeutige Lösung von (1) gegeben durch

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt, \quad x \in I.$$

Beispiel: $y' = -(\sin x)y + \sin^3 x$. Hier ist $A(x) = \cos x$ und die Lösung der homogenen Gleichung ist gegeben durch $y(x) = ce^{\cos x}$. Eine Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir durch die "Variation-der-Konstanten"-Formel (wobei wir $s = \cos t$, $ds = -\sin t dt$ substituieren):

$$\begin{aligned} y_P(x) &= e^{\cos x} \int_0^x e^{-\cos t} \sin^3 t dt \\ &= e^{\cos x} \int_1^{\cos x} (s^2 - 1)e^{-s} ds \\ &= -e^{\cos x} (s^2 - 1 + 2s + 2)e^{-s} \Big|_1^{\cos x} \\ &= \sin^2 x - 2 \cos x - 2 + \underbrace{4e^{\cos x - 1}}_{\text{Lsg. der hom. Gl.}} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$y(x) = \sin^2 x - 2 \cos x - 2 + ce^{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

E10.6 Trennung der Variablen

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(x)g(y) \tag{1}$$

heißt Differentialgleichung *mit getrennten Veränderlichen* (oder *Variablen*). Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= f(x)g(y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

mit $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ behandelt man wie folgt:

Fall $g(y_0) = 0$: Eine Lösung ist gegeben durch $y(x) = y_0$, $x \in I$.

Fall $g(y_0) \neq 0$: Ist $y : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (2) mit $g(y(x)) \neq 0$ für alle $x \in \tilde{I}$, so gilt

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \quad x \in \tilde{I},$$

und mittels Substitution $\eta = y(t)$, $d\eta = y'(t) dt$:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{x_0}^x \frac{y'(t) dt}{g(y(t))} = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in \tilde{I}.$$

Sei F eine Stammfunktion von f auf I und G eine Stammfunktion von $1/g$ auf \tilde{J} , wobei \tilde{J} das größte Teilintervall von J sei, für das $y_0 \in \tilde{J}$ und $g(y) \neq 0$ für alle $y \in \tilde{J}$ gilt (beachte, dass $y(\tilde{I}) \subseteq \tilde{J}$ gilt nach Voraussetzung an die Lösung y). Dann gilt

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0), \quad \text{also} \quad G(y(x)) = F(x) - F(x_0) + G(y_0) \quad \text{für alle } x \in \tilde{I}.$$

Wegen $G' = 1/g \neq 0$ auf \tilde{J} und der Stetigkeit von $1/g$ auf \tilde{J} ist G auf \tilde{J} streng monoton und besitzt also auf $G(\tilde{J})$ eine Umkehrfunktion G^{-1} . Wir erhalten

$$y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)), \quad x \in \tilde{I}. \tag{1}$$

Insbesondere ist die Lösung im Falle der Existenz eindeutig.

Umgekehrt definiert (1) auch eine Lösung von (2) (wenn man als \tilde{I} ein Teilintervall von I nimmt mit $x_0 \in \tilde{I}$ und $F(x) - F(x_0) + G(y_0) \in G(\tilde{J})$ für alle $x \in \tilde{I}$), denn

$$y(x_0) = G^{-1}(F(x_0) - F(x_0) + G(y_0)) = G^{-1}(G(y_0)) = y_0$$

und für $x \in \tilde{I}$ gilt

$$y'(x) = (G^{-1})'(F(x) - F(x_0) + G(y_0)) \cdot \underbrace{F'(x)}_{=f(x)},$$

sowie nach der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$(G^{-1})'(F(x) - F(x_0) + G(y_0)) = (G'(\underbrace{G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0))}_{=y(x)}))^{-1} = g(y(x)).$$

Beispiele: Schon behandelt haben wir $y' = \sqrt{|y|}$ und $y' = a(x)y$ (vgl. E10.4). Die Berechnung der Lösung in E10.4(5) ist dabei dieselbe, die wir eben durchgeführt haben.

Wir betrachten nun $y' = e^y \sin x$ (zunächst ohne Anfangswerte). Hier ist $I = J = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ und $g(y) = e^y \neq 0$ für alle y , also $\tilde{J} = \mathbb{R}$ in jedem Fall. Trennung der Veränderlichen führt auf

$$-e^{-y} = \int e^{-y} dy = \int \sin x dx = -\cos x - C,$$

dh $e^{-y} = \cos x + C$ und

$$y(x) = -\ln(\cos x + C), \quad \text{wobei } \cos x + C > 0.$$

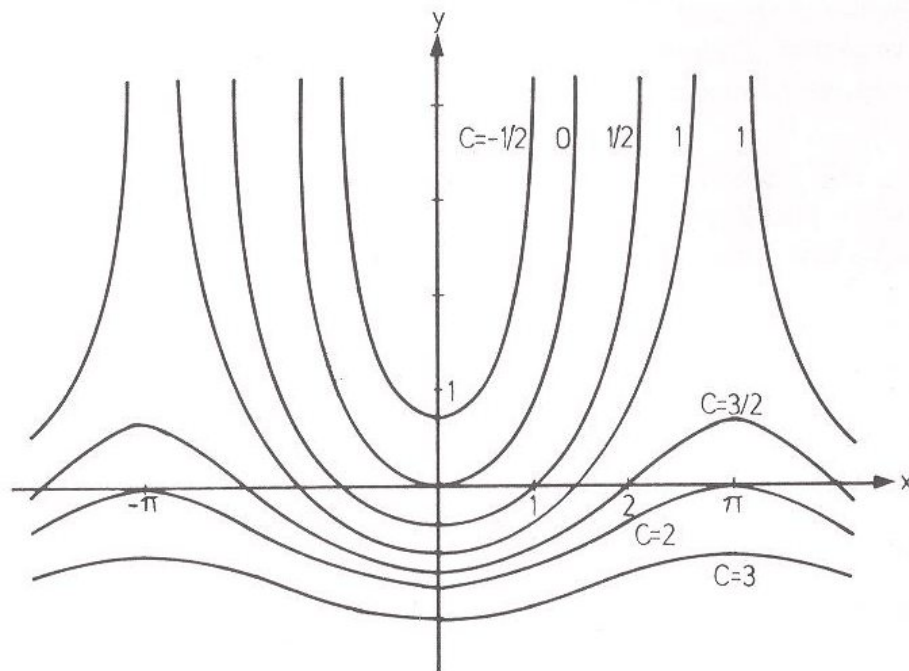
Berücksichtigen wir den Anfangswert $y(x_0) = y_0$ und setzen $F(x) = -\cos x$, $G(y) = -e^{-y}$, so ist $G(\tilde{J}) = G(\mathbb{R}) = (-\infty, 0)$ und $G^{-1} : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto -\ln(-s)$. Wir erhalten

$$y(x) = -\ln(\cos x - \cos x_0 + e^{-y_0}), \quad x \in \tilde{I},$$

wobei sich \tilde{I} ein Intervall ist mit $x_0 \in \tilde{I}$ und $-\cos x + \cos x_0 - e^{-y_0} \in G(\mathbb{R})$, also mit $\cos x - \cos x_0 + e^{-y_0} > 0$ für alle $x \in \tilde{I}$. Durch Vergleich sehen wir $C = e^{-y_0} - \cos x_0$, also insbesondere $C > -1$.

Für $C > 1$ kann man $\tilde{I} = \mathbb{R}$ setzen. Für $C \in (-1, 1]$ hingegen ist das Existenzintervall der Lösung beschränkt. Für $x_0 = 0$ ist etwa $C \leq 1$ genau dann, wenn $y_0 \geq -\ln 2$. Für $y_0 \geq -\ln 2$ ist dann das maximale Existenzintervall gegeben durch $\tilde{I} = \{x \in (-\pi, \pi) : |x| < \arccos(1 - e^{-y_0})\}$.

$$y(x; C) = -\log(\cos x + C) \quad (C + \cos x > 0).$$



Lösungskurven der Differentialgleichung $y' = e^y \sin x$

Zum Problem der Eindeutigkeit: Die Frage ist, ob eine Lösung mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$ und $g(y_0) \neq 0$ durch einen Punkt $y_* \in J$ mit $g(y_*) = 0$ verlaufen kann. Wenn ja, dann gibt es $x_1 \in I$ so, dass Lösungen mit dem Anfangswert $z(x_1) = y_*$ nicht eindeutig sind (es gibt die Lösung y , die y_* erreicht, und die konstante Lösung $\phi(x) = y_*$). Obige Überlegungen zeigen, dass in diesem Fall das uneigentliche Integral $\int_{y_0}^{y_*} \frac{1}{g(\eta)} d\eta$ konvergiert.

Somit gilt: Sind alle solchen Integrale divergent, so sind alle Lösungen von (2) eindeutig.

Beispiele: Diese Bedingung ist bei $y' = a(x)y$ erfüllt, denn $\int_0^a 1/\eta d\eta$ **divergiert** für alle $a \neq 0$.

Bei $y' = \sqrt{|y|}$ ist es hingegen so, dass die Integrale $\int_0^a 1/\sqrt{|\eta|} d\eta$ **konvergieren**. Nach E10.4(5) sind Lösungen mit $y(x_0) = 0$ nicht eindeutig. Lösungen mit $y(x_0) \neq 0$ sind solange eindeutig, bis sie durch Null verlaufen. Dort verlieren sie die Eindeutigkeit.

Ende
Woche 11

E10.7 Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= f(x), & x \in I, \\ y(x_0) &= y_0, & y'(x_0) = y_1, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $x_0 \in I$ und $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

Wieder gilt (vgl. E10.5): Sind $y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen der *inhomogenen Gleichung*

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad x \in I, \tag{2}$$

so ist $w := y - z : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der zugehörigen *homogenen Gleichung*

$$w'' + aw' + bw = 0, \quad x \in I, \tag{3}$$

dh wir bekommen jede Lösung von (2) als Summe einer **speziellen** Lösung von (2) und einer Lösung von (3) (wie in E10.5).

Satz (ohne Beweis): Für jedes Paar $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ hat das Anfangswertproblem (1) genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Lösung der homogenen Gleichung (3): Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$. Dann ist $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ und

$$y'' + ay' + by = \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{=:p(\lambda)} e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0, \quad x \in I,$$

also $p(\lambda) = 0$, dh λ ist Nullstelle des *charakteristischen Polynoms* p der Gleichung, somit

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Fallunterscheidung: (i) $a^2/4 > b$: Dann sind λ_1, λ_2 reell, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und die allgemeine Lösung von (3) ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad x \in I,$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

(ii) $a^2/4 = b$: Dann ist $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ doppelte Nullstelle von p und die allgemeine Lösung von (3) ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \quad x \in I,$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

(iii) $a^2/4 < b$: Dann ist $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, dh $\lambda_{1/2} = \mu \pm i\omega$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die allgemeine (reelle!) Lösung von (3) ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 e^{\mu x} \cos(\omega x) + c_2 e^{\mu x} \sin(\omega x), \quad x \in I,$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

Eine **spezielle Lösung von** (2) erhält man etwa durch *Variation der Konstanten*, z.B.

$$y_P(x) = c_1(x) e^{\lambda_1 x} + c_2(x) e^{\lambda_2 x}, \quad x \in I,$$

wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist. Dies führt im Fall $\lambda_1 \neq \lambda_2$ auf

$$y_P(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[e^{\lambda_1 x} \int_{x_0}^x e^{-\lambda_1 t} f(t) dt - e^{\lambda_2 x} \int_{x_0}^x e^{-\lambda_2 t} f(t) dt \right]$$

und im Fall $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$ auf

$$y_P(x) = e^{\lambda x} \left[x \int_{x_0}^x e^{-\lambda t} f(t) dt - \int_{x_0}^x t e^{-\lambda t} f(t) dt \right].$$

Für rechte Seiten f der Form $f(x) = q_m(x) e^{\alpha x} \begin{cases} \cos(\beta x) \\ \sin(\beta x) \end{cases}$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und q_m ein Polynom vom Grad $m \in \mathbb{N}_0$ ist, führt auch der **Ansatz**

$$y_P(x) = \left[r_m(x) \cos(\beta x) + \tilde{r}_m(x) \sin(\beta x) \right] e^{\alpha x} x^\nu$$

zum Ziel, wobei r_m und \tilde{r}_m Polynome vom Grad $\leq m$ sind und $\alpha + i\beta$ eine ν -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms p ist (beachte die Spezialfälle $\alpha = 0, \beta = 0, m = 0, \nu = 0$).

Beispiel $a = 0, b = 1$: Hier ist $p(\lambda) = \lambda^2 + b$, also $\lambda_{1/2} = \pm i$. Die Lösung der homogenen Gleichung $y'' + y = 0$ ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten jetzt die **rechte Seite** $f(x) = \cos(\beta x)$ mit $\beta \geq 0$.

Fallunterscheidung: $\beta \neq 1$: Dann ist $i\beta$ keine Nullstelle von p und wir machen den Ansatz

$$y_P(x) = \gamma \cos(\beta x) + \delta \sin(\beta x).$$

Dann ist

$$y'_P(x) = -\gamma\beta \sin(\beta x) + \delta\beta \cos(\beta x), \quad y''_P(x) = -\gamma\beta^2 \cos(\beta x) - \delta\beta^2 \sin(\beta x),$$

und

$$y''_P + y_P = \gamma(1 - \beta^2) \cos(\beta x) + \delta(1 - \beta^2) \sin(\beta x) \stackrel{!}{=} \cos(\beta x)$$

führt auf $\delta = 0$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1}$ (beachte $\beta^2 \neq 1$). Wir erhalten die Lösung

$$y_P(x) = (1 - \beta^2) \cos(\beta x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (1 - \beta^2)^{-1} \cos(\beta x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ist also für jede Wahl der Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beschränkt.

Fall $\beta = 1$: Hier ist $i\beta$ einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms p . Der Ansatz

$$y_P(x) = \gamma x \cos x + \delta x \sin x$$

gibt

$$y'_P(x) = (\gamma + \delta x) \cos x + (\delta - \gamma x) \sin x, \quad y''_P(x) = (2\delta - \gamma x) \cos x + (-2\gamma - \delta x) \sin x,$$

und

$$y''_P + y_P = 2\delta \cos x - 2\gamma \sin x \stackrel{!}{=} \cos x$$

führt auf $\delta = 1/2$, $\gamma = 0$. Wir erhalten die Lösung

$$y_P(x) = \frac{x}{2} \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

ist also für jede Wahl der Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ **unbeschränkt**: Die periodische Anregung mit der Eigenfrequenz $\omega = 1$ des ungestörten Systems führt zur *Resonanzkatastrophe*.

E10.8 Allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in folgendem Sinne

Für alle $x \in I$, $y \in J$ und alle Folgen (x_n) in I und (y_n) in J mit $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ gilt: $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x, y)$.

Bemerkung: Ist dann $y : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei $\tilde{I} \subseteq I$ und $y(\tilde{I}) \subseteq J$ gelte, so ist die Funktion $\tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y(x))$ stetig.

Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$.

Satz: Eine Funktion $y : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x_0 \in \tilde{I} \subseteq I$ ist Lösung von (1) genau dann, wenn y auf I stetig ist und

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad x \in \tilde{I} \tag{2}$$

gilt.

Anwendungen: (a) Existenz (und Eindeutigkeit) von Lösungen von (1) über Fixpunktsätze im Raum der stetigen Funktionen $C([x_0, x_0 + a])$.

(b) Numerische Verfahren zur Lösung von (1): Man möchte näherungsweise die Funktionswerte einer Lösung y an den Stellen $x_n = x_0 + nh$, $n \in \mathbb{N}_0$, berechnen (wobei $h > 0$ eine "kleine" Schrittweite sei), also $y_n := y(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ ($y_0 = y(x_0)$ ist der gegebene Anfangswert). Beachtet man, dass eine Lösung von (1) für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch eine Lösung von

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_n) &= y_n, \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t)) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

In vielen numerischen Verfahren wird nun das Integral auf der rechten Seite durch eine Formel approximiert. Besonders einfach geschieht dies im *Euler-Verfahren* durch

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx (x_{n+1} - x_n) f(x_n, y(x_n)) = hf(x_n, y_n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Man gelangt so zu dem folgenden Verfahren für eine Berechnung von Näherungen \tilde{y}_n der y_n : Setze $\tilde{y}_0 := y_0$ und sukzessive für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\tilde{y}_{n+1} := \tilde{y}_n + hf(x_0 + nh, \tilde{y}_n).$$

Das Verfahren heißt auch *Polygonzug-Verfahren*, da man jeweils im Punkt $(x_n, \tilde{y}_n) \in I \times J$ zum nächsten Punkt $(x_n + h, \tilde{y}_{n+1})$ gelangt, indem man in der durch das Richtungsfeld im Punkt (x_n, \tilde{y}_n) gegebenen Richtung geraderaus weitergeht.

Wir bringen am Ende die folgende Ergänzung zu Kapitel 13:

E10.9 Satz: Sei (f_n) eine Funktionenfolge in $C^1([a, b])$ mit

- (i) die Folge $(f_n(a))$ konvergiert in \mathbb{R} ,
- (ii) die Funktionenfolge (f'_n) konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen eine Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann konvergiert die Funktionenfolge (f_n) auf $[a, b]$ gleichmäßig und für die Funktion

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

gilt $f \in C^1([a, b])$ und $f' = g$ auf $[a, b]$.

Das heißt:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = f'(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad x \in [a, b],$$

Vertauschen von Limes und Ableitung ist möglich, wenn die **Ableitungen f'_n gleichmäßig** konvergieren.

Beweis: Setze $c := \lim f_n(a)$ und $G(x) := c + \int_a^x g(t) dt$, $x \in [a, b]$ (beachte, dass g auf $[a, b]$ stetig ist). Nach Hauptsatz gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in [a, b]$ ist dann

$$\begin{aligned} |f_n(x) - G(x)| &= \left| f_n(a) - c + \int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right| \leq |f_n(a) - c| + \int_a^x |f'_n(t) - g(t)| dt \\ &\leq |f_n(a) - c| + (b - a) \|f'_n - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\|f_n - G\|_\infty \leq \underbrace{|f_n(a) - c|}_{\rightarrow 0} + (b - a) \underbrace{\|f'_n - g\|_\infty}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Also ist $G = f$ und $f' = G' = g$.

Beispiele: (1) $[a, b] = [0, 1]$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$. Dann ist $\|f_n\|_\infty \leq 1/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und (f_n) konvergiert auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen 0. Aber $f'_n(x) = n \cos(nx)$ konvergiert auf $[0, 1]$ nicht punktweise.

(2) $[a, b] = [0, 1]$ und $f_n(x) = \begin{cases} \cos(nx) & , x \in [0, \pi/n] \\ 0 & , x \in (\pi/n, 1] \end{cases}$. Dann konvergiert $(f_n(x))$ gegen $f(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ -1 & , x \in (0, 1] \end{cases}$. Es gilt $f'_n(x) = \begin{cases} -n \sin(nx) & , x \in [0, \pi/n] \\ 0 & , x \in (\pi/n, 1] \end{cases}$ und $f'_n(x) \rightarrow 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Aber f ist in 0 nicht stetig, also auch in 0 **nicht differenzierbar**.

Ende
Woche 12

E11 Ergänzungen zu Vektorräumen

E11.1 Satz: Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und seien $n, m \in \mathbb{N}$, sowie b_1, b_2, \dots, b_n und c_1, c_2, \dots, c_m Basen in V . Dann gilt $n = m$.

Beweis: Zu jedem $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ existieren $\alpha_{jk} \in \mathbb{K}$ ($k = 1, \dots, m$) mit

$$b_j = \sum_{k=1}^m \alpha_{jk} c_k,$$

und zu jedem $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ existieren $\beta_{kj} \in \mathbb{K}$ ($j = 1, \dots, n$) mit

$$c_k = \sum_{j=1}^n \beta_{kj} b_j.$$

Somit gilt für jedes $j = 1, 2, \dots, n$:

$$b_j = \sum_{k=1}^m \alpha_{jk} c_k = \sum_{k=1}^m \alpha_{jk} \sum_{l=1}^n \beta_{kl} b_l = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m \alpha_{jk} \beta_{kl} \right) b_l,$$

also

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{jk} \beta_{kl} = \delta_{jl}.$$

Analog ist für jedes $k = 1, 2, \dots, m$:

$$c_k = \sum_{j=1}^n \beta_{kj} b_j = \sum_{j=1}^n \beta_{kj} \sum_{l=1}^m \alpha_{jl} c_l = \sum_{l=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \beta_{kj} \alpha_{jl} \right) c_l,$$

also

$$\sum_{j=1}^n \beta_{kj} \alpha_{jl} = \delta_{kl}.$$

Wir erhalten

$$n = \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{k=1}^m \alpha_{jk} \beta_{kj}}_{=1} = \sum_{k=1}^m \underbrace{\sum_{j=1}^n \beta_{kj} \alpha_{jk}}_{=1} = m.$$

E11.2 Die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (vgl. E10.7)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad x \in I, \quad (1)$$

und die zugehörige homogene Gleichung

$$y'' + ay' + by = 0, \quad x \in I. \quad (2)$$

Bemerkung: Es sei

$$\mathcal{L}_0 := \{y : I \rightarrow \mathbb{R} : y \text{ ist Lösung von (2)}\}.$$

Dann ist \mathcal{L}_0 ein Untervektorraum von \mathbb{R}^I .

Beweis: Es gilt $0 \in \mathcal{L}_0$ (Nullfunktion auf I). Seien $y, z \in \mathcal{L}_0$, dh $y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen von (2), und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(\alpha y + z)'' + a(\alpha y + z)' + b(\alpha y + z) = \alpha \underbrace{(y'' + ay' + by)}_{=0} + \underbrace{(z'' + az' + bz)}_{=0} = 0,$$

also $\alpha y + z \in \mathcal{L}_0$.

Satz: Es gilt $\dim \mathcal{L}_0 = 2$.

Beweis: (i) Wähle $x_0 \in I$. Es gibt eine Lösung $\psi_1 \in \mathcal{L}_0$ mit $\psi_1(x_0) = 1, \psi_1'(x_0) = 0$ und eine Lösung $\psi_2 \in \mathcal{L}_0$ mit $\psi_2(x_0) = 0, \psi_2'(x_0) = 1$.

(ii) ψ_1 und ψ_2 sind linear unabhängig: Sind $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 = 0$ auf I , so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2)(x_0) = \alpha_1\psi_1(x_0) + \alpha_2\psi_2(x_0) = \alpha_1 \\ 0 &= (\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2)'(x_0) = \alpha_1\psi_1'(x_0) + \alpha_2\psi_2'(x_0) = \alpha_2. \end{aligned}$$

(iii) Sei $\psi \in \mathcal{L}_0$. Setze $\alpha_1 := \psi(x_0)$ und $\alpha_2 := \psi'(x_0)$, sowie $\tilde{\psi} := \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$. Dann gilt $\tilde{\psi} \in \mathcal{L}_0$ und (wie in (ii) eben)

$$\tilde{\psi}(x_0) = \alpha_1 = \psi(x_0) \quad \text{und} \quad \tilde{\psi}'(x_0) = \alpha_2 = \psi'(x_0).$$

Nach dem Satz in E10.7 ist die Lösung des Anfangswertproblems aber eindeutig. Somit gilt $\psi = \tilde{\psi} \in \text{lin}\{\psi_1, \psi_2\}$.

Bemerkung: Seien $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}_0$ beliebig (nicht unbedingt die Funktionen aus dem Beweis!). Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\psi_1, \psi_2 \text{ sind linear unabhängig} \\ \Leftrightarrow &\text{ es gibt } x_0 \in I \text{ so, dass } \begin{pmatrix} \psi_1(x_0) \\ \psi_1'(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_2(x_0) \\ \psi_2'(x_0) \end{pmatrix} \text{ in } \mathbb{R}^2 \text{ linear unabhängig sind} \\ \Leftrightarrow &\text{ für alle } x_0 \in I \text{ sind } \begin{pmatrix} \psi_1(x_0) \\ \psi_1'(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_2(x_0) \\ \psi_2'(x_0) \end{pmatrix} \text{ in } \mathbb{R}^2 \text{ linear unabhängig.} \end{aligned}$$

In der ersten Äquivalenz gilt “ \Leftarrow ” immer, aber “ \Rightarrow ” verwendet, dass $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}_0$!

Bemerkung: Der Satz gilt genauso auch für Differentialgleichungen der Form

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad x \in I,$$

wobei $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Die spezielle Struktur der Lösungen aus E10.7 wurde gar nicht benutzt, nur der Satz über die eineutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems.

E11.3 Definition (Norm): (vgl. E8.8) Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls gilt:

- (N1) $\forall v \in V : \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$,
- (N2) $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{K} : \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$,
- (N3) $\forall u, v \in V : \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecks-Ungleichung)

$(V, \|\cdot\|)$ heißt dann *normierter Raum*. Der normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *vollständig* oder ein *Banachraum*, falls jede $\|\cdot\|$ -Cauchyfolge in V konvergiert. Dabei heißt eine Folge $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in V $\|\cdot\|$ -*Cauchyfolge* ($\|\cdot\|$ -*CF*), falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall m, l \geq m_0 : \|v_m - v_l\| < \varepsilon.$$

Vorstellung: $\|u - v\|$ entspricht dem “Abstand” von u und v .

Bemerkung: Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so gilt $\|0\| = 0$ und $\|v\| \geq 0$ für jedes $v \in V$.

Beweis: Es ist

$$\|0\| = \|0 \cdot 0\| \stackrel{(N2)}{=} |0| \cdot \|0\| = 0 \cdot \|0\| = 0,$$

und für jedes $v \in V$ gilt:

$$0 = \|v + (-v)\| \stackrel{(N3)}{\leq} \|v\| + \|(-1) \cdot v\| = \|v\| + |(-1)| \|v\| = 2\|v\|,$$

also $\|v\| \geq 0$.

Beispiele: (1) Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Dann ist

$$B(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist beschränkt}\}$$

ein Untervektorraum von \mathbb{R}^M (vgl. E8.7) und

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in M\}$$

definiert eine Norm auf $B(M)$ (vgl. E8.8). Nach E8.10 ist $(B(M), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

(2) Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

(3) Spezialfall von (1), $M = \{1, 2, \dots, n\}$: Der Raum $B(M)$ lässt sich dann auffassen als \mathbb{R}^n . Also ist \mathbb{R}^n bzgl. der *Maximumsnorm* $\|x\| := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ein Banachraum.

(4) Die Beispiele (1)–(3) kann man auf komplexwertige Funktionen übertragen. Insbesondere ist \mathbb{C}^n bzgl. der Maximumsnorm $\|z\|_\infty := \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|\}$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, ein Banachraum.

(5) Sei $l_{\mathbb{K}}^1 := \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ der Raum aller *absolut summierbaren* Folgen. Dann ist $l_{\mathbb{K}}^1$ ein \mathbb{K} -Vektorraum (als Untervektorraum von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$) und

$$\|(x_n)\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

definiert eine Norm auf $l_{\mathbb{K}}^1$.

Bemerkung: $(l_{\mathbb{K}}^1, \|\cdot\|_1)$ ist ein Banachraum (ohne Beweis).

E11.4 Definition: Sei H ein \mathbb{K} -Vektorraum. H heißt *Prä-Hilbertraum*, falls auf H ein *Skalarprodukt* gegeben ist, dh eine Abbildung $(\cdot|\cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften:

- (S1) $\forall x, y \in H: (x|y) = \overline{(y|x)}$,
- (S2) $\forall x, y, z \in H, \alpha \in \mathbb{K}: (\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$,
- (S3) $\forall x \in H \setminus \{0\}: (x|x) > 0$.

Bemerkung: Für alle $x, y, z \in H$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(x|\alpha y + z) \stackrel{(S1)}{=} \overline{(\alpha y + z|x)} \stackrel{(S2)}{=} \overline{\alpha(y|x) + (z|x)} = \overline{\alpha(y|x)} + \overline{(z|x)} \stackrel{(S1)}{=} \overline{\alpha}(x|y) + (x|z),$$

sowie $(0|y) = (2 \cdot 0|y) = 2(0|y)$, also $(0|y) = 0$ und analog $(x|0) = 0$.

E11.5 Satz: Ist $(H, (\cdot|\cdot))$ ein Prä-Hilbertraum, so gilt die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$\forall x, y \in H : |(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)},$$

und $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$ definiert eine Norm auf H .

Ende
Woche 13

Zusatz: Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt genau dann, wenn x, y linear abhängig sind.

Beweis: Die Ungleichung ist klar für $y = 0$. Sei also $y \neq 0$. Dann gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$0 \leq (x - \alpha y|x - \alpha y) = (x|x) - \alpha(y|x) - \overline{\alpha}(x|y) + |\alpha|^2(y|y).$$

Für $\alpha := (x|y)/(y|y)$ erhalten wir $0 \leq (x|x) - |(x|y)|^2/(y|y)$, woraus die Ungleichung folgt. Wir sehen, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $(x - \alpha y|x - \alpha y) = 0$, dh $x = \alpha y$ ist. Damit ist der Zusatz bewiesen.

Wir zeigen die Normeigenschaften: (N1) folgt aus (S3), (N2) folgt aus (S2). Zum Nachweis von (N3) rechnen wir (ähnlich wie eben)

$$\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x|y) + \|y\|^2 \stackrel{(CSU)}{\leq} (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Beispiel: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist \mathbb{R}^n ein Hilbertraum bzgl. des Skalarprodukts

$$(x|y) := \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

und \mathbb{C}^n ist ein Hilbertraum bzgl. des Skalarprodukts

$$(z|w) := \sum_{j=1}^n z_j \overline{w_j} \quad \text{für } z = (z_1, \dots, z_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Die zugehörige Norm wird mit $\|\cdot\|_2$ bezeichnet, dh

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

E11.6 Definition (Hilbertraum): Ein Prä-Hilbertraum $(H, (\cdot|\cdot))$ heißt *Hilbertraum*, falls H bzgl. der in E11.5 definierten Norm vollständig ist.

Beispiele (1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist \mathbb{K}^n ein Hilbertraum bzgl. des Skalarprodukts aus Beispiel 11.5. Zum Beweis der Vollständigkeit notieren wir $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ und verweisen auf Beispiel E11.3(3)/(4): Ist $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_2$ -Cauchyfolge in \mathbb{K}^n , so auch eine $\|\cdot\|_\infty$ -Cauchyfolge (wegen der linken Ungleichung), die nach E11.3 bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$ konvergiert. Wegen der rechten Ungleichung konvergiert $(x^{(m)})$ dann auch bzgl. $\|\cdot\|_2$ gegen x .

(2) Ein nicht vollständiger Prä-Hilbertraum: Wir betrachten den Raum c_{00} aller Folgen $x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$ für nur endlich viele n . c_{00} ist ein \mathbb{C} -Vektorraum, und

$$(x|y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \quad \text{für } x = (x_n), y = (y_n) \in c_{00}$$

definiert ein Skalarprodukt auf c_{00} . Die induzierte Norm wird ebenfalls mit $\|\cdot\|_2$ bezeichnet. Der Prä-Hilbertraum $(c_{00}, (\cdot|\cdot))$ ist **nicht** vollständig: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definiert

$$x_n^{(m)} := \begin{cases} 2^{-n/2} & , n \leq m \\ 0 & , n > m \end{cases}$$

ein Element $x^{(m)} \in c_{00}$. Die Folge $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ ist eine $\|\cdot\|_2$ -Cauchyfolge, die in c_{00} nicht konvergiert.

Zum Nachweis stellen wir zunächst fest, dass für alle $l > m$ gilt

$$\|x^{(l)} - x^{(m)}\|_2 = \left(\sum_{n=m+1}^l 2^{-n} \right)^{1/2} \stackrel{n=m+1+k}{\leq} \left(2^{-m-1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \right)^{1/2} = 2^{-m/2}.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$, so finden wir $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{-m_0/2} < \varepsilon$. Für alle $l > m \geq m_0$ gilt dann

$$\|x^{(l)} - x^{(m)}\|_2 \leq 2^{-m/2} \leq 2^{-m_0/2} < \varepsilon,$$

dh $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ ist eine $\|\cdot\|_2$ -Cauchyfolge.

Wenn wir annehmen, dass $(x^{(m)})$ für $m \rightarrow \infty$ gegen ein $x = (x_n) \in c_{00}$ konvergiert, erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n^{(m)} - x_n| \leq \|x^{(m)} - x\|_2 \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty),$$

also $x_n = 2^{-n/2}$. Somit ist aber $x \notin c_{00}$ im Widerspruch zur Annahme. Somit hat $(x^{(m)})$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ keinen Grenzwert in l^2 .

(3) Der Raum $C([a, b])$ ist ein Prä-Hilbertraum bzgl. des Skalarproduktes

$$(f|g) := \int_a^b f(x)g(x) dx \quad \text{für } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig.}$$

Die zugehörige Norm ist

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad f \in C([a, b]).$$

Der Raum $C([a, b])$ ist **nicht** vollständig bzgl. $\|\cdot\|_2$ (vgl. Aufgabe 9, Blatt 14, was ähnlich ist).

E11.7 Der Hilbertraum l^2

Der Raum der *quadratsummierbaren Folgen* ist definiert als

$$l^2 := \{x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}.$$

Satz: l^2 ist ein \mathbb{C} -Vektorraum, und

$$(x|y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \quad \text{für } x = (x_n), y = (y_n) \in l^2$$

definiert ein Skalarprodukt auf l^2 , das l^2 zu einem Hilbertraum macht. Die zugehörige Norm ist

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \quad \text{für } x = (x_n) \in l^2.$$

Beweis: (i) Seien $x, y \in l^2$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Setze $M := \max\{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2, \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\} \in \mathbb{R}$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt nach Beispiel E11.6(1)

$$\sum_{n=1}^N |x_n \bar{y}_n| = \sum_{n=1}^N |x_n| |y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right)^{1/2} \leq M$$

und

$$\left(\sum_{n=1}^N |x_n + \alpha y_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^N |x_n|^2\right)^{1/2} + |\alpha| \left(\sum_{n=1}^N |y_n|^2\right)^{1/2} \leq M^{1/2} + |\alpha| M^{1/2}.$$

Für $N \rightarrow \infty$ bleiben die Abschätzungen erhalten, und wir sehen so, dass $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ absolut konvergiert und $x + \alpha y \in l^2$ gilt.

Also ist l^2 ein \mathbb{C} -Vektorraum, die Abbildung $(\cdot|\cdot)$ ist sinnvoll definiert, und man kann leicht einsehen, dass $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf l^2 ist.

(ii) Vollständigkeit: Sei $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_2$ -Cauchyfolge in l^2 . Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle m, l gilt dann

$$|x_n^{(m)} - x_n^{(l)}| \leq \|x^{(m)} - x^{(l)}\|_2.$$

Also ist $(x_n^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{C} und $x_n := \lim_{m \rightarrow \infty} x_n^{(m)} \in \mathbb{C}$ existiert. Noch zu zeigen: $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ und $\|x^{(m)} - x\|_2 \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$).

(iii) Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|x^{(m)} - x^{(l)}\|_2 < \varepsilon$ für alle $m, l \geq m_0$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\left(\sum_{n=1}^N |x_n^{(m)} - \underbrace{x_n}_{=\lim_{l \rightarrow \infty} x_n^{(l)}}|^2\right)^{1/2} = \lim_{l \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^N |x_n^{(m)} - x_n^{(l)}|^2\right)^{1/2}}_{\leq \|x^{(m)} - x^{(l)}\|_2} \leq \varepsilon.$$

Für $N \rightarrow \infty$ bleibt diese Abschätzung erhalten, und wir haben somit für alle $m \geq m_0$ gezeigt, dass $x^{(m)} - x \in l^2$ ist und $\|x^{(m)} - x\|_2 \leq \varepsilon$ gilt.

(iv) Da l^2 ein Vektorraum ist, gilt $x \in l^2$, und $\|x^{(m)} - x\|_2 \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ ist gezeigt.

Ende
Woche 14

E11.8 Der Projektionssatz

Vorbereitungen: Eine Teilmenge M eines Prä-Hilbertraumes H heißt *abgeschlossen*, falls für jede Folge (x_m) in M , die in H konvergiert, der Grenzwert zu M gehört.

Eine Teilmenge K eines \mathbb{K} -Vektorraumes V heißt *konvex*, falls für alle $k_1, k_2 \in K$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt, dass $\lambda k_1 + (1 - \lambda)k_2 \in K$ ist (anschaulich bedeutet dies, dass für je zwei Punkte $k_1, k_2 \in K$ die *Verbindungsstrecke*

$$[k_1, k_2] := \{\lambda k_1 + (1 - \lambda)k_2 : \lambda \in [0, 1]\}$$

auch zu K gehört).

Parallelogrammgleichung: Für alle x, y in einem Prä-Hilbertraum gilt:

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

denn die linke Seite ist

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - (y|x) - (x|y) + (y|x) + (x|y) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Satz: Sei H ein Hilbertraum und $\emptyset \neq K \subset H$ abgeschlossen und konvex. Dann gibt es zu jedem $x \in H$ ein eindeutig bestimmtes Element $k_0 \in K$ mit

$$\|x - k_0\| = \inf\{\|x - k\| : k \in K\}.$$

Ein solches k_0 heißt *Bestapproximation* von x in K .

Beweis: Das Infimum auf der rechten Seite nennen wir d . Wähle eine Folge (k_m) in K mit $\|x - k_m\| \rightarrow d$. Für alle l, m gilt dann nach der Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned} \|k_l - k_m\|^2 &= \|(x - k_m) - (x - k_l)\|^2 = 2\|x - k_m\|^2 + 2\|x - k_l\|^2 - \|(x - k_m) + (x - k_l)\|^2 \\ &= 2\|x - k_m\|^2 + 2\|x - k_l\|^2 - 4\|x - \underbrace{\left(\frac{k_m + k_l}{2}\right)}_{\in K}\|^2 \\ &\leq 2\|x - k_m\|^2 + 2\|x - k_l\|^2 - 4d^2 \rightarrow 0 \quad (m, l \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Also ist (k_m) eine $\|\cdot\|$ -Cauchyfolge in K , die somit in H gegen ein k_0 konvergiert. Da K abgeschlossen ist, folgt $k_0 \in K$. Wegen

$$\|\|x - k_m\| - \|x - k_0\|\| \leq \|(x - k_m) - (x - k_0)\| = \|k_0 - k_m\| \rightarrow 0$$

ist $\|x - k_0\| = \lim_m \|x - k_m\| = d$. Ist $\tilde{k}_0 \in K$ eine weitere Bestapproximation von x in K , so folgt mit demselben Argument wie eben:

$$\|k_0 - \tilde{k}_0\|^2 = \underbrace{2\|x - k_0\|^2 + 2\|x - \tilde{k}_0\|^2}_{=4d^2} - 4\|x - \left(\frac{k_0 + \tilde{k}_0}{2}\right)\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

also $k_0 = \tilde{k}_0$.

Zusatz: Es ist $k_0 \in K$ Bestapproximation von $x \in H$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall k \in K : \quad \operatorname{Re}(x - k_0 | k - k_0) \leq 0.$$

Beweis: Falls die Bedingung gilt, so ist für jedes $k \in K$:

$$\|x - k\|^2 = \|(x - k_0) - (k - k_0)\|^2 = \|x - k_0\|^2 + \underbrace{\|k - k_0\|^2}_{\geq 0} - \underbrace{2\operatorname{Re}(x - k_0 | k - k_0)}_{\geq 0} \geq \|x - k_0\|^2.$$

Ist umgekehrt k_0 Bestapproximation und $k \in K$, so setzen wir $f(t) := \|(x - k_0) - t(k - k_0)\|^2$, $t \in [0, 1]$. Dann ist $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, da

$$f(t) = \|x - k_0\|^2 + t^2\|k - k_0\|^2 - 2t\operatorname{Re}(x - k_0 | k - k_0), \quad t \in [0, 1],$$

und $f(0) \leq f(t)$ für alle $t \in [0, 1]$. Somit ist

$$0 \leq f'(0) = -2\operatorname{Re}(x - k_0 | k - k_0).$$

Folgerung: Ist Y ein abgeschlossener Untervektorraum des Hilbertraumes X , so ist ein $y_0 \in Y$ genau dann Bestapproximation von $x \in H$, wenn gilt:

$$\forall y \in Y : (x - y_0 | y) = 0.$$

Bemerkung: In der Situation der Folgerung ist die Abbildung P , die jedem $x \in H$ die eindeutig bestimmte Bestapproximation y_0 von x in Y zuordnet, linear und heißt *Orthogonalprojektion auf Y* (es ist $P^2 = P$).

E11.9 Lineare Operatoren

Definition: Seien X, Y normierte Räume. Ein *linearer Operator von X nach Y* ist eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$. Der lineare Operator T heißt *beschränkt*, falls es ein $C \in [0, \infty)$ gibt mit

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Bemerkung: Ein linearer Operator T ist beschränkt genau dann, wenn für alle Folgen (x_n) in X , die in X gegen ein x_0 konvergieren, gilt: $\|T(x_n) - T(x_0)\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ (diese Bedingung bedeutet die *Stetigkeit* von T).

Beweis: Ist C wie in der Definition und (x_n) eine Folge in X mit $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$, so folgt

$$\|T(x_n) - T(x_0)\|_Y = \|T(x_n - x_0)\|_Y \leq C\|x_n - x_0\|_X \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Sei umgekehrt T nicht beschränkt. Dann finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{x}_n \in X$ mit $\|T(\tilde{x}_n)\| > n\|\tilde{x}_n\|$. Es ist $\tilde{x}_n \neq 0$ und für $x_n := \frac{\tilde{x}_n}{n\|\tilde{x}_n\|}$ gilt $x_n \rightarrow 0$, aber $\|Tx_n\| \not\rightarrow 0 = T(0)$.

Beispiel (vgl. E10.7): Sei $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Die Abbildung

$$T : C^2([\alpha, \beta]) \rightarrow C([\alpha, \beta]), \quad y \mapsto y'' + ay' + by$$

ist linear und es gilt

$$\ker T = \{y \in C^2([\alpha, \beta]) : y'' + ay' + by = 0\}, \quad \text{Bild } T = C([\alpha, \beta]).$$

Durch $\|y\|_{C^2} := \max\{\|y\|_\infty, \|y'\|_\infty, \|y''\|_\infty\}$ wird auf $C^2([\alpha, \beta])$ eine Norm definiert. Nimmt man auf $C([\alpha, \beta])$ die Supremumsnorm, so ist T beschränkt, denn

$$\|T(y)\|_\infty \leq \|y''\|_\infty + |a|\|y'\|_\infty + |b|\|y\|_\infty \leq \underbrace{(1 + |a| + |b|)}_{=:C} \|y\|_{C^2}.$$

Die Abbildung $\phi : \ker T \rightarrow \mathbb{R}^2$, $y \mapsto (y(x_0), y'(x_0))$ ist linear und bijektiv. Die Abbildung

$$\tilde{T} : C^2([\alpha, \beta]) \rightarrow C([\alpha, \beta]) \times \mathbb{R}^2, \quad y \mapsto (y'' + ay' + by, y(x_0), y'(x_0))$$

ist dann ebenfalls linear und bijektiv. \tilde{T} ist beschränkt, wenn wir $C([\alpha, \beta]) \times \mathbb{R}^2$ mit der durch

$$\|(f, \gamma, \delta)\| := \|f\|_\infty + |\gamma| + |\delta|$$

definierten Norm versehen.

E11.10 Selbstadjungierte Operatoren

Definition: Ist H ein Hilbertraum, so heißt ein beschränkter linearer Operator $T : H \rightarrow H$ *selbstadjungiert*, falls gilt:

$$(T(x)|y) = (x|T(y)) \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Bemerkung: Ist T selbstadjungiert im Hilbertraum H , so ist $(T(x)|x) \in \mathbb{R}$ für jedes $x \in H$, und die Menge

$$W(T) := \{(T(x)|x) : x \in H, \|x\| = 1\}$$

(der *numerische Wertebereich von T*) ist beschränkt.

Beweis: Es ist $(T(x)|x) = \overline{(x|T(x))} = \overline{(T(x)|x)}$. Ist C eine Konstante gemäß der Beschränktheit von T , so gilt für $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ nach Cauchy-Schwarz:

$$|(T(x)|x)| \leq \|T(x)\| \|x\| \leq C \|x\|^2 = C.$$

Beispiel: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} . In $H = l^2$ sei T definiert durch $T(x_n)_{n \in \mathbb{N}} := (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist T ein beschränkter linearer Operator von l^2 nach l^2 genau dann, wenn die Folge (a_n) beschränkt ist (in diesem Fall kann man $C = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ nehmen).

Der Operator T ist selbstadjungiert genau dann, wenn jedes a_n reell ist. Es ist nämlich

$$(T(x_n)|(y_n)) = \sum_n a_n x_n \overline{y_n} \quad \text{und} \quad ((x_n)|T(y_n)) = \sum_n x_n \overline{a_n y_n} \quad \text{für alle } (x_n), (y_n) \in l^2.$$