## 1. Woche

Thema: Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis)

**1.** $k \in \mathbb{N}$, $k \neq n^2$ $(n \in \mathbb{N})$. Satz: $\sqrt{k}$ ist irrational.

Beweis Skizze:

Annahme: $\sqrt{k}$ ist rational. Dann sei $q \in \mathbb{N}$ die minimale Zahl mit $q\sqrt{k} \in \mathbb{N}$.

Betrachte $m := (\sqrt{k} - [\sqrt{k}])q$

Es gelten: 1) $0 < m < q$, $m \in \mathbb{N}$
2) $m\sqrt{k} \in \mathbb{N}$
} Dies ist ein Widerspruch gegen die Def von $q$.

---

**2.** – Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl $> 1$, die nur 1 oder sich selbst als Teiler besitzt.

– $a \in \mathbb{N}$ ist Teiler von $b \in \mathbb{N}$, falls $b = ac$ mit $c \in \mathbb{N}$ gilt.

(*) – Jede natürliche Zahl lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben (Primzahlzerlegung).

**2.1 Satz** Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Die Annahme, dass es endlich viele Primzahlen, etwa $p_1, p_2, \ldots, p_n$, gibt, wird zum Widerspruch geführt durch Betrachtung der Zahl $A = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.

2.2 Bemerkungen $(a, b, c \in \mathbb{N})$

1) Ist a Teiler von b und von b+c, so ist a Teiler von c.

2) Ist eine Primzahl p Teiler des Produkts ab, so ist p Teiler von a oder von b.

Denn: Ist p weder Teiler von a noch von b, so konstruiert man leicht mittels $\boxed{*}$ einen Widerspruch gegen die Vor., dass p Teiler von ab ist.

2.3 Fundamentalsatz der Arithmetik (siehe $\boxed{*}$ oben)

Jede ganze Zahl $N > 1$ kann (bis auf die Reihenfolge) auf genau eine Art als Produkt von Primzahlen geschrieben werden.

Beweis Skizze

1. Annahme: Die Aussage sei falsch. Dann gibt es eine kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, zwei verschiedene Primzahlzerlegungen zu besitzen:

(1) $m = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ ($p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s$ sind Primzahlen)

mit $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_r$ und $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_s$.

2. Es gilt $p_1 \neq q_1$ und o.B.d.A (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $p_1 < q_1$.

Die Annahme $p_1 = q_1$ führt zu einem Widerspruch zur Definition von m.

3. Betrachte $\underline{m' = m - p_1 q_2 q_3 \cdots q_s}$ (2)

Setzt man (1) in (2) ein, so erhält man:

$$m' = p_1 (p_2 p_3 \cdots p_r - q_2 q_3 \cdots q_s) \qquad (3)$$

$$m' = (q_1 - p_1)(q_2 \cdot q_3 \cdots q_s) \qquad (4)$$

Man liest ab $m' \in \mathbb{N}$, $m' < m$, $p_1$ ist Teiler von $m'$ und $p_1$ ist Teiler von $q_1 - p_1$ (mit der Definition von $m$ und 2.2 (2)), d.h.

$$q_1 = p_1 (1 + a) \qquad (a \in \mathbb{N}).$$

Dies ist falsch, da $q_1, p_1$ Primzahlen ($p_1 \neq q_1$) sind.

4. Damit ist der Ausgangspunkt (1) falsch und die Behauptung des Satzes somit wahr.

# Gruppe. Körper. Vektorraum

## 1. Gruppe

1.1 Eine Gruppe besteht aus einer Menge $G$ und einer Operation $*$, die jedem geordneten Paar $(a,b) \in G \times G$ eindeutig ein mit $a * b$ bezeichnetes Element von $G$ so zuordnet, dass folgende Axiome erfüllt sind:

G1 $\quad (a*b)*c = a*(b*c) \qquad a,b,c \in G$

G2 $\quad$ Es gibt ein Element $e \in G$ (neutrales Element) mit
$$e * a = a \quad \text{für alle } a \in G$$

G3 $\quad$ Zu jedem $a \in G$ existiert ein Element $a^{-1} \in G$ (inverses Element zu $a$) mit $a^{-1} \circ a = e$.

Ist zusätzlich

G4 $\quad a * b = b * a \qquad$ für alle $a, b \in G$

erfüllt, so heißt die Gruppe abelsch.

1.2 Beispiele

$(\mathbb{Z}, +)$ – die ganzen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition als Gruppenverknüpfung – bilden eine abelsche Gruppe.

Ebenso für $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$. Hier ist jeweils $e = 0$ und $a^{-1} = -a$.

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ – die reellen Zahlen $(\neq 0)$ mit der gewöhnlichen Multiplikation als Gruppenoperation – bilden eine abelsche Gruppe

Ebenso für $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$. Hier ist $e$ jeweils die Zahl 1 und $a^{-1}$ die Zahl $-a$.

$(\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \cdot)$ bildet keine Gruppe: Es gibt kein $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ mit $a^{-1} \cdot 2 = 1$.

$\mathrm{Bij}(M) := \{f \mid f: M \to M, f \text{ bijektiv}\}$ bilden mit "$\circ$" als Gruppenoperation eine Gruppe. Es ist $e = id_M$ und $f^{-1}$ die Umkehrfunktion zu $f$.

1.3 Folgerungen aus den Gruppenaxiomen

1) In einer Gruppe $(G, *)$ gelten:

$$a * e = a \quad \text{für alle } a \in G$$

und $a * a^{-1} = e$ .

2) Zu gegebenen $a, b \in G$ sind die Gleichungen für $x, y$

$$a * x = b \quad \text{und} \quad y * a = b \quad \text{in } G \text{ eindeutig}$$

lösbar.

3) Das Element $e$ in Axiom G2) ist durch die Gruppenaxiome eindeutig bestimmt.

4) $a^{-1}$ ist durch $a$ eindeutig bestimmt.

5) $(a^{-1})^{-1} = a$ , $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ (Ü)

## 2. Körper

2.1 Ein Körper besteht aus einer Menge $\mathbb{K}$ und zwei Operationen, die jedem geordneten Paar $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ eindeutig ein Element $a + b$ bzw $a \cdot b$ von $\mathbb{K}$ so zuordnen, dass gelten:

$(\mathbb{K}, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit $e = 0$, $a^{-1} = -a$

$(\mathbb{K}\setminus\{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit $e = 1 \neq 0$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$a(b + c) = ab + ac .$$

2.2 1) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bilden mit der üblichen Addition und Multiplikation je einen Körper.

2) Die Menge K bestehe aus zwei Elementen, die mit 0 und 1 bezeichnet werden. Definiert man + und · wie folgt:

$$0+0 = 1+1 = 0\ ,\ 0+1 = 1+0 = 1$$
$$0\cdot 0 = 0\cdot 1 = 1\cdot 0 = 0\ ,\ 1\cdot 1 = 1$$

so erhält man einen Körper.

2.3 Folgerungen (($\mathbb{K}$, +, ·) ist beliebiger Körper)

(In Körpern kann in der üblichen Weise gerechnet werden)

Es gelten etwa:

1) $0\cdot a = a\cdot 0 = 0$ für jedes $a \in \mathbb{K}$.

2) Aus $ab = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.

3) $(-1)(-1) = 1$

4) $-(ab) = a(-b)$

3. Vektorraum (über $\mathbb{K}$)

3.1 Ein Vektorraum besteht aus einer abelschen Gruppe $(V, +)$ (mit 0 als neutralem Element), deren Elemente Vektoren heißen, und einem Körper $\mathbb{K}$, deren Elemente Skalare heißen, und einer Multiplikation, die jedem geordneten Paar $(\alpha, x) \in \mathbb{K}\times V$ eindeutig einen Vektor $\alpha x \in V$ so zuordnet, dass folgende Axiome erfüllt sind:

(I) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x \in V$

(II) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ $\quad \alpha \in \mathbb{K}, x, y \in V$

$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x \in V$

(III) $1x = x$ $\quad 1 \in \mathbb{K}, x \in V$

## 3.2 Beispiele

1) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$x, y \in \mathbb{R}^3$ : $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\alpha x := (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

2) $V = \{ f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R} \}$ (die auf dem Intervall $[a,b]$ definierten Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$)

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$f, g \in V$ : $f + g \in V$ ist definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in [a,b]$$

$\alpha \in \mathbb{R}, f \in V$ : $\alpha f \in V$ ist definiert durch

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad x \in [a,b].$$

# 3. Woche    Ungleichungen

1. Cauchy-Schwarz Ungleichung
2. Eine Anwendung von (U) (4.4.2, S.25): $\sqrt[n]{a}$ $(a>0)$.

---

**1.** Satz: Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $a_j$ $(j=1,\dots,k)$, $b_j$ $(j=1,\dots,k)$ $2k$ beliebige reelle Zahlen. Dann gilt

$$\text{(CSU)} \quad \sum_{j=1}^{k} |a_j b_j| \le \Big(\sum_{j=1}^{k} a_j^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{j=1}^{k} b_j^2\Big)^{1/2}$$

Beweisskizze

**1.1** $\alpha := \Big(\sum_{j=1}^{k} a_j^2\Big)^{1/2}$, $\beta := \Big(\sum_{j=1}^{k} b_j^2\Big)^{1/2}$

Ist $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$, so besagt (CSU): $0 \le 0$ ✓

Ab jetzt werden $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ vorausgesetzt.

(CSU) ist dann äquivalent zu:

$$\text{(CSU)}^* \quad \sum_{j=1}^{k} \frac{|a_j|}{\alpha} \frac{|b_j|}{\beta} \le 1$$

In dieser Form wird (CSU) bewiesen.

**1.2** Verwende Satz 4, (2)/Kapitel 4/S.23:

$$\frac{|a_j|}{\alpha}\frac{|b_j|}{\beta} \le \frac{1}{2}\Big(\frac{a_j^2}{\alpha^2} + \frac{b_j^2}{\beta^2}\Big) \quad (j=1,2,\dots,k)$$

Addiere diese $k$ Ungleichungen (Verwende mehrmals Satz 1, (4), Kap 4) und beachte $\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j^2}{\alpha^2} = \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j^2}{\beta^2} = 1$.

Man erhält (CSU)$^*$. ✓

---

2. Anwendung von (V)

Satz Es sind $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gegeben. Es gilt:
Es gibt genau eine Zahl $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ mit $y^n = a$.

Beweisskizze

$\boxed{1.}$

1.1 $M := \{ t \in \mathbb{R} \mid (t > 0) \wedge (t^n < a) \}$

Es gelten: $t := \frac{a}{1+a} \in M$ also: $M \neq \emptyset$

und $t := 1+a$ ist obere Schranke für $M$

Damit liefert (V) die Existenz von $y := \sup(M) \in \mathbb{R}$.

1.2 Wir verwenden im folgenden mehrmals für $u, w \in \mathbb{R}$:

(*) $u^n - w^n = (u-w)(u^{n-1} + u^{n-2}w + \cdots + uw^{n-2} + w^{n-1})$

und die Folgerung hieraus:

(**) Für $0 < w < u$ gilt: $u^n - w^n < (u-w)nu^{n-1}$.

1.3 Aus $y^n < a$ folgt mit einer Zahl $h$, die $0 < h < 1$
und $h < \frac{a-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ erfüllt und mit (**)

für $u = y+h$, $w = y$:

$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < a - y^n$

oder: $(y+h)^n < a$, also $y+h\ (> y) \in M$.
Das geht nicht nach Definition von $y$.

$\Rightarrow$ $y^n < a$ ist nicht möglich $\Rightarrow$ $y^n \geq a$.

1.4. Es sei $y^n > a$.

Definiere $k := \dfrac{y^n - a}{n y^{n-1}}$. Es gilt: $0 < k < y$, also auch $y-k > 0$.

Für $t \geq y-k$ gilt: $-t^n \leq -(y-k)^n$

$$\Rightarrow y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n \underset{(**),\ u=y,\ w=y-k}{\leq} y^n - a \qquad \text{oder } a < t^n$$

D.h.: Für jedes $t \geq y-k$ gilt $t \notin M$. Das bedeutet:

$y-k$ $(<y)$ ist obere Schranke von $M$. Dies geht nicht nach Def von $y = \sup(M)$.

1.5 Also ist $y^n > a$ nicht möglich, und es bleibt nur $y^n = a$.

$\boxed{2.}$ Falls es zwei Zahlen $y_1, y_2 > 0$ mit $y_1^n = a$, $y_2^n = a$ gibt, so folgt aus $(*)$

$$0 = y_1^n - y_2^n = (y_1 - y_2) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} y_1^{n-j} y_2^{j-1}}_{>0} \quad : \quad y_1 = y_2$$

mit

4. Woche

1. Vollständige Induktion; Ungleichung: geometrisches arithmetisches Mittel
2. Abzählbare Mengen

---

1.1 Für $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\boxed{*} \quad a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

1) Mit vollständiger Induktion.

Um beim Ind.bew. $\boxed{*}$ anwenden zu können, wird eine Null addiert:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} \underline{- a^n b + a^n b} - b^{n+1}$$

$$= a^n(a-b) + b(a^n - b^n) = \text{weiter mit } \boxed{*} \text{ (Ind.vor.)}$$

2) Nachrechnen:

$$(a-b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} \underset{\text{Distributivgesetz}}{=} \sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k} b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^k$$

$$= a^n + \sum_{k=2}^{n} a^{n+1-k} b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k - b^n$$

$$\Big\downarrow \ell = k-1$$

$$= a^n + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n-1} a^{n-\ell} b^\ell - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k}_{=0} - b^n \quad \checkmark$$

---

1.2 GAM – Ungleichung

Satz: Für $n \in \mathbb{N}$ nichtnegative Zahlen $x_1, \dots, x_n$ gilt

$$\text{(GAM)} \qquad \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Es sei $x_j > 0$ für $j = 1, \dots, n$. Andernfalls ist nichts zu beweisen.

Wir beweisen mit VI den Satz:

(GAM)' Für $n$ positive Zahlen $y_1, y_2, \dots, y_n$, die $\prod_{j=1}^{n} y_j = 1$ erfüllen, gilt $n \le \sum_{j=1}^{n} y_j$.

Setzt man $y_j = \dfrac{x_j}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j}}$, so liefert dieser Satz (GAM) ✓

Zum Bew von (GAM)'.

Beim Schluss von $n \to n+1$ kann man so vorgehen: Für positive Zahlen $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ mit $u_1 \cdot u_2 \cdots u_{n+1} = 1$ ist $n+1 \le \sum_{j=1}^{n+1} u_j$ nachzuweisen.

o.B.d.A. ist $u_1 \ge 1$, $u_2 \le 1$

$$\Rightarrow \quad u_1 + u_2 \ge 1 + u_1 u_2$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} u_j \ge 1 + \underbrace{u_1 u_2 + \sum_{j=3}^{n+1} u_j}_{\ge n} \ge n+1 \quad ✓$$

$\ge n$ nach Indvor: Denn dies sind $n$ positive Summanden $u_1 u_2, u_3, u_4, \dots, u_{n+1}$, deren Produkt 1 ist.

---

Beispiel zur Anwendung von GAM: Bernoulli Ungleichung 5.4, Beispiel 3.

2. $D \neq \emptyset$ heißt abzählbare Menge, wenn es eine surjektive Abbildung $\tau: \mathbb{N} \to D$ gibt.
Ist $D$ nicht abzählbar, so heißt $D$ überabzählbar.

Beispiele: 1) Jede endliche Menge $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ist abzählbar:
Definiere z.B.: $\tau: \mathbb{N} \to M$ durch

$$\tau(j) = a_j \quad , \quad 1 \le j \le n$$
$$\tau(k) = a_n \quad , \quad k = n+1, n+2, \dots \quad (k > n)$$

2) $\mathbb{N}$ ist abzählbar. Man wähle $\tau = id_{\mathbb{N}}$.

3) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar. Man kann $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ wie folgt definieren:

$$\left.\begin{array}{l} \tau(2k) = k \\ \tau(2k-1) = -k+1 \end{array}\right\} k = 1, 2, \dots$$

4) Sind $M_1$ und $M_2$ abzählbare Mengen, so ist $M_1 \cup M_2$ abzählbar.

Satz 1 $M_n$, $n \in \mathbb{N}$, seien abzählbare Mengen.
Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ eine abzählbare Menge.

Folgerung $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $C_n = \{\frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ abzählbar, und es gilt $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

Satz 2 $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Folgerung $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist überabzählbar.

# 5. Woche Das Cauchysche Konvergenzkriterium

## 5.1 Definition

Die Folge $(a_n)$ heißt Cauchyfolge, falls es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ so gibt, dass aus

$n, m \geq N(\varepsilon)$ $\qquad |a_n - a_m| < \varepsilon$ folgt.

Formal schreibt sich das so:

$$(a_n) \text{ heißt Cauchyfolge} \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\ n,m\geq N}}{\forall} \; |a_n - a_m| < \varepsilon \qquad (1)$$

(einfache Umformulierungen)

$$\iff \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq n_0}}{\forall} \; |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon \qquad (2)$$

$$\iff \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}{\forall} \; |a_{n_0+k} - a_{n_0}| < \varepsilon \qquad (3)$$

Bemerkung

$\underline{N}$: $(a_n)$ ist keine Cauchyfolge, falls gilt:

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \; \underset{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m,n\geq N}}{\exists} \; |a_n - a_m| \geq \varepsilon .$$

---

## 5.2 Satz 1 (Cauchy Konvergenzkriterium)

$(a_n)$ ist konvergent $\iff$ $(a_n)$ ist Cauchyfolge

("Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sich fast alle Folgenglieder beliebig wenig voneinander unterscheiden.")

Zum Bew: „$\Rightarrow$" einfach: Verwende die Konvergenzdefinition der Vorlesung mit $\varepsilon/2$ und verwende

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - g| + |a_m - g| \qquad (g = \lim_{n\to\infty} a_n).$$

"$\Leftarrow$" 1/ Eine Cauchy Folge ist beschränkt.
Verwende die Form $|a_n| - |a_m| \le |a_n - a_m|$ der Dreiecksungleichung. [Kapitel 7, Satz 1]

2/ [Vorlesung am Do 22/11: Häufungspunkt. Satz Bolzano-Weierstrass]
Eine beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt. Die Annahme, dass die Folge noch weitere Häufungspunkte besitzt, gibt einen Widerspruch dagegen, dass unsere Folge eine Cauchy-Folge ist.

Also: Eine Cauchy-Folge besitzt genau einen Häufungspunkt. Der ist der Grenzwert der Folge. ✓

Bemerkung: Eine Folge ist divergent, wenn Bemerkung N aus 5.1 zutrifft.

---

5.3 Anwendungsbeispiel

Satz 2 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sei eine Folge mit: Es gibt eine Zahl $\theta$, $0 < \theta < 1$, derart dass für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(1) $|a_{n+2} - a_{n+1}| \le \theta\, |a_{n+1} - a_n|$ gilt.

Dann ist die Folge $(a_n)$ konvergent.

Zum Beweis

1. Schritt Aus (1) folgt

(2) $|a_{k+1} - a_k| \le \theta^k |a_1 - a_0|$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$

(Bew mit VI)

2. Schritt o.B.d.A sei $n > m$:

$$|a_n - a_m| = \left|\sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\right| \le \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|$$

$$\overset{(2)}{\le} |a_1 - a_0| \sum_{k=m}^{n-1} \theta^k$$

$$(n \geq m) \quad |a_n - a_m| \leq |a_1 - a_0| \sum_{k=m}^{n-1} \theta^k$$

Indexumbenennung
$k \to l := k - m$

$$\overset{\downarrow}{=} |a_1 - a_0| \, \theta^m \sum_{l=0}^{n-1-m} \theta^l$$

geometrische
Summe (Vorlesung)

$$\overset{\downarrow}{=} |a_1 - a_0| \, \theta^m \frac{1-\theta^{n-m}}{1-\theta}$$

$$\Rightarrow \underline{|a_n - a_m| \leq |a_1 - a_0| \frac{1}{1-\theta} \theta^m} \quad (n > m) \quad \underline{(3)}$$

$\varepsilon > 0$ sei vorgegeben. Da (Vorlesung) $\lim_{m \to \infty} \theta^m = 0$ gilt, gibt es einen Index $N$ mit

$$\theta^m < \frac{\varepsilon(1-\theta)}{|a_1 - a_0|} \text{ für alle } m \geq N.$$

$\underline{(3)} \Rightarrow$ für $n > m \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

$(a_n)$ ist somit eine Cauchy Folge, nach Satz 1 also konvergent.

<u>6. Woche</u> 1. Ein Beispiel zu Satz 1 / 5. Woche

2. $\sqrt[n]{n} \to 1$ mit GAM-Ungleichung / 4. Woche

3. Die Zahl e.

---

1. Satz 1 / 5. Woche kann auch so formuliert werden:

$$(a_n) \text{ ist divergent } \iff \underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m,n\geq N}}{\exists}\ |a_n-a_m|\geq\varepsilon.$$

<u>Beispiel</u>: <u>Divergenz der harmonischen Reihe</u>: $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Es gilt $a_{2n}-a_n > \frac{1}{2}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$.

Mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $N\in\mathbb{N}$ beliebig und $m = 2n$, $n \geq N$ ergibt der Satz die Divergenz von $(a_n)$.

---

2. $$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-2\text{ Faktoren}}\cdot\sqrt{n}\sqrt{n}} \underset{\text{GAM-Ungleichung}}{\leq} \frac{1}{n}(n-2+2\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

---

3. Nach Vorlesung gilt $s_n := \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \to e \quad (n\to\infty)$.

Wir zeigen: <u>Die Folge $(t_n)$, $t_n := (1+\frac{1}{n})^n$ ist konvergent, und es gilt $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.</u>

1) Für $x \geq -n$, $x\neq 0$ und $n\in\mathbb{N}$ gilt

(*) $$(1+\tfrac{x}{n})^n < (1+\tfrac{x}{n+1})^{n+1}$$ (Bew mit GAM-Ungleichung)

für $x=1$ also: $\underline{t_n < t_{n+1}}$

2) $c_n := (1-\frac{1}{n})^n \quad (n\in\mathbb{N})$, $\tilde{t}_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})t_n$.

(*) für $x=-1$ gibt: $c_n < c_{n+1}$, $(c_n)\uparrow$

Eine einfache Rechnung zeigt: $\tilde{t}_n = \frac{1}{c_{n+1}}$

Da $(c_n)\uparrow$ gilt $(\tilde{t}_n)\downarrow$. Also $\tilde{t}_n \le \tilde{t}_1 = 4$, $n\in\mathbb{N}$.
Wegen $t_n < \tilde{t}_n$ hat man somit $\underline{t_n < 4}$, $n\in\mathbb{N}$.

1), 2) besagen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ existiert. Dieser Grenzwert wird durch $t$ bezeichnet.

3) Es gilt $\underline{t=e}$.

$\underline{3.1}$ $$t_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\cdots\underbrace{(1-\tfrac{k-1}{n})}_{(**)}$$
$$< s_n \qquad (n\ge 2)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}$ angewendet auf diese Ungleichung: $\underline{t\le e}$

$\underline{3.2}$ Mit $m\in\mathbb{N}$, $m\ge 2$ fest gilt für $n>m$ (verwende $\boxed{(**)}$)
$$t_n > 1+1+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\cdots(1-\tfrac{k-1}{n})$$

bilde hier $\lim\limits_{n\to\infty}$ : $t\ge s_m$.

$m\to\infty$ gibt schließlich $\underline{t\ge e}$

Insgesamt also $\underline{t=e}$.

---

4. Wir betrachten $(a_n)$ mit $a_n := \sum_{k=1}^{n}(e-t_k)$

und $(b_n)$, $b_n := \sum_{k=0}^{n}(e-s_k)$.

$\underline{4.1}$ Mit $\boxed{(**)}$ aus $(\underline{3.1}\ /\ \underline{3.2}, 3))$ sieht man
$$e-t_k > \sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j!}\underbrace{\Big(1-\underbrace{(1-\tfrac{1}{k})(1-\tfrac{2}{k})\cdots(1-\tfrac{j-1}{k})}_{<1}\Big)}_{>\frac{1}{k}}$$

also: $e - t_k > \frac{1}{k} \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!} > \frac{1}{2k}$

$\Rightarrow \quad a_n > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Da $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$ (bestimmt divergent)

ist die Folge $(a_n)$ divergent.

4.2 Nach A7/6.Ü gilt $0 < e - s_k < \frac{1}{k \cdot k!} \leq \frac{1}{k!}$

$\Rightarrow \quad b_n < e$ für alle $n$

Da $(b_n) \uparrow$ (Summe mit positiven Summanden)

ist $(b_n)$ also konvergent.

---

5. Den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ können Sie auch so bestimmen:

Sie zeigen: 5.1 $(\sqrt[n]{n}) \downarrow$. Es gilt $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$ für $n \geq 4$

5.2 Wegen $\sqrt[n]{n} \geq 1$ existiert also

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = g \quad (\geq 1)$

$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n} = g \quad = \sqrt{g}$

also $g^2 = g \quad \underset{g \geq 1}{\Longrightarrow} \quad g = 1.$

---

1. Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent (Satz 7, Kap 8)
2. Satz 5 / Kap 8 Eine Reihe ist absolut konvergent
$\iff$ sie ist unbedingt konvergent

---

1.1 Cauchy Kriterium für Reihen

( = Cauchy Kriterium aus der 5. Vorlesung formuliert für die Folge der Partialsummen. )

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{k\in\mathbb{N}}{\forall}\ \left|\sum_{p=1}^{k} a_{n_0+p}\right| < \varepsilon .$$

1.2 Hiermit folgt der Satz 7 / Kap 8 der Vorlesung:
„Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent"
der in der Vorlesung nur für reelle $a_k$ begründet worden ist.

---

2.1 Eine konvergente Reihe mit dem Wert $s$ heißt unbedingt konvergent, wenn jede ihrer Umordnungen konvergiert und zwar stets gegen $s$. Eine konvergente Reihe, die nicht unbedingt konvergent ist, heißt bedingt konvergent.

Beispiel $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ (die alternierende harmonische Reihe)

ist konvergent. Der Wert sei $s$. Durch Klammernsetzen erhält man $s = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ und auch

$$s = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}\right)$$

Bilde $\frac{1}{2}s$ mit der ersten Darstellung und addiere zu der 2. Darstellung:

$$\frac{3}{2}s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$

Lässt man hier die Klammern weg, so erhält man die folgende Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + + -$$

Diese Reihe konvergiert (Ü!). Und damit gegen $\frac{3}{2}s$. Die vorgenommene Umordnung hat die Konvergenz erhalten, den Wert aber verändert.

Durch Umordnen kann aus Konvergenz auch Divergenz entstehen (7. Ü / A 7).

Diese Effekte treten bei absolut konvergenten Reihen nicht auf:

2.2 Satz 5 / Kap 8

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent $\Longleftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist unbedingt konvergent.

Bew. Skizze

„$\Rightarrow$" $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s = \lim_{n\to\infty} s_n$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (mit 1.2 hier)

1.1 für $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ besagt:

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \ \forall_{k\in\mathbb{N}} \quad \sum_{p=1}^{k} |a_{n_0+p}| < \varepsilon \qquad (1)$$

Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k'$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit den Partialsummen $s_n' = \sum_{k=1}^{n} a_k'$.

Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\} \subset \{a_1', a_2', \dots, a_N'\}$ gilt ($N \geq n_0$). Dann folgt mit (1) für $n \geq N$

$|s_n' - s_n| < \varepsilon$, also $s_n' - s_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Also:

$$s_n' = s_n + (s_n' - s_n) \to s \quad (n \to \infty)$$ ✓

"$\Leftarrow$" o.B.d.A. seien die $a_n = \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Vor: Jede Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ konvergiere gegen ein und denselben Wert.

Es ist zu zeigen: $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ ist konvergent.

---

Das Vorgehen ist indirekt:

Wir gehen aus von: $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ ist konvergent und (V1)

$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| = \infty$ (ist divergent). (V2)

Wir konstruieren eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, die divergiert. Das ist ein Widerspruch zur Vor der unbedingten Konvergenz. $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| = \infty$ ist also nicht haltbar. $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ ist konvergent.

---

Definiere $p_n := \frac{1}{2}(|\alpha_n| + \alpha_n)$, $q_n = \frac{1}{2}(|\alpha_n| - \alpha_n)$

$p_n \geq 0, q_n \geq 0$, $\alpha_n = p_n - q_n$, $|\alpha_n| = p_n + q_n$ (2)

$\alpha_n = 0 \Rightarrow p_n = q_n = 0$, $\alpha_n > 0 \Rightarrow p_n = \alpha_n, q_n = 0$

$\alpha_n < 0 \Rightarrow p_n = 0, -q_n = \alpha_n$

Es gelten: (3) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty$

Dies ist eine einfache Folgerung aus (V1), (V2).

Die folgende Reihe ist eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$:

(5) $p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1} - q_1 + p_{m_1+1} + \cdots + p_{m_2} - q_2 + p_{m_2+1} + \cdots + p_{m_3} - q_3 + \cdots$

Hier werden $m_1, m_2, \ldots$ wie folgt gewählt:

$m_j > m_{j-1}$ und $m_j$ so groß, dass

$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_j} > j + q_1 + q_2 + \cdots + q_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ wird

Das ist gemäß (3), (4) möglich.

(5) ist dann eine divergente Reihe, da die Partialsumme, deren letzter Summand $-q_j$ ist, $> j$ ausfällt. $j$ ist beliebig.

$\Rightarrow$ die Partialsummenfolge der Reihe (5) ist unbeschränkt, die Reihe (5) also divergent ✓

# Konvergenz bei Funktionenfolgen



1. Norm in einem Vektorraum
2. Punktweise Konvergenz
3. gleichmäßige Konvergenz

**1.1** Vektorraum V: siehe 2. Woche, 3.. Siehe dort auch die Beispiele:

$V = \mathbb{R}^n \quad : x = (x_1, \dots, x_n),\ x_j \in \mathbb{R}$

$V = \mathcal{F}_b := \{ f \mid f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f \text{ ist auf } D \text{ beschränkt} \}$

$V = \mathcal{F} := \{ f \mid f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \}$ die auf $D$ definierten komplexwertigen Funktionen.

jeweils mit den Verknüpfungen $+, \cdot$, die die in 3.2/2. Woche angegeben sind.

**1.2** Eine <u>Norm auf einem Vektorraum V</u> ist eine Funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

N1) $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0$ nur für $v = 0$

N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

für alle $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

<u>Beispiele</u> 1) Auf $\mathbb{C}$ ist $|\cdot|$ eine Norm,

2) Auf dem $\mathbb{R}^n$ wird durch $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$ für $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Norm gegeben (siehe 3.ü / A11 und hier die 3. Woche / Cauchy-Schwarz Ungleichung).

3) Auf $\mathcal{F}_b$ wird durch $\|f\|_\infty := \sup\{ |f(z)|,\ z \in D \}$ eine Norm definiert.

## 2. Funktionenfolgen. Punktweise Konvergenz

2.1 Eine Funktionenfolge auf $D$ ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathcal{F}, \quad n \to f_n.$$

Wir schreiben hier für $(f_n)$.

**Definition**

Die Funktionenfolge $(f_n)$ konvergiert punktweise auf $D$ gegen $f \in \mathcal{F}$ ($f$ heißt Grenzfunktion), wenn für jedes $z \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(z))$ gegen $f(z)$ konvergiert.

Formal lässt sich das so schreiben:

$$(1) \quad \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{z \in D}{\forall} \; \underset{N = N(\varepsilon, z) \in \mathbb{N}}{\exists} \; \underset{\substack{n \geq N \\ n \in \mathbb{N}}}{\forall} \; |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon .$$

(Ü: Formuliere diese letzte Zeile in Worten)

**Beispiele**

1) $D = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

$f_n \to f$ $(n \to \infty)$ punktweise auf $D$.

2) $D = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx, & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Es gilt: $f_n \to f = 0$ $(n \to \infty)$ punktweise auf $D$.

3) $D = \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(z)$, $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k$.

Es gilt $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ punktweise auf $\mathbb{C}$.

---

## 3. Gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge

Def: Die Funktionenfolge $(f_n)$, $f_n \in \mathcal{F}$, konvergiert gleichmäßig auf $D$ gegen $f \in \mathcal{F}$, falls erfüllt ist:

(2) $\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}} \; \forall_{n \geq N} \; \forall_{z \in D} \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow$

(3) $\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}} \; \forall_{n \geq N} \quad \| f_n - f \|_\infty < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow$

(4) $\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$

Mit (4) sieht man sofort, dass $(f_n)$ aus Beispiel 2) auf $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ nicht gleichmäßig gegen $f = 0$ konvergiert:

Wegen $\| f_n - 0 \|_\infty = \| f_n \|_\infty = f_n(\frac{1}{n}) = 1 \not\to 0 \quad (n \to \infty)$.

Satz 1 Eine auf $D$ gegen $f$ gleichmäßig konvergente Folge $(f_n)$ konvergiert auf $D$ punktweise gegen $f$.

Das Thema wird nächste Woche fortgesetzt.

**Satz 2** (Cauchy Kriterium für gleichmäßige Konvergenz. Siehe 5. Woche. 7. Woche)

Die Funktionenfolge $(f_n)$ auf $D$ ist genau dann gleichmäßig konvergent auf $D$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so existiert, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N(\varepsilon)$

$$\| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon \quad \text{gilt}$$

(wenn sie bezogen auf die $\| \cdot \|_\infty$ - Norm eine Cauchy Folge ist)

Eine Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ von auf $D$ definierten Funktionen $f_j$ ist auf $D$ gleichmäßig konvergent, falls die Folge der Partialsummen $s_n(z) = \sum_{j=0}^{n} f_j(z)$ auf $D$ gleichmäßig konvergiert oder, mit Satz 2 oben, falls die Folge $(s_n)$ der Partialsummen bezogen auf $\| \cdot \|_\infty$ eine Cauchy Folge ist. Gleichwertig hiermit ist auch, dass $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ auf $D$ gleichmäßig konvergiert, falls die Folge der Reste $r_m = \sum_{k=m}^{\infty} f_k$ auf $D$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.

**Satz 3** (Majorantenkriterium für die gleichmäßige Konvergenz)

Gegeben sind die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ und die Zahlenfolge $(c_j)$. Es seien erfüllt:

1. $|f_j(z)| \leq c_j$, $j = 0, 1, 2 \ldots$, $z \in D$
2. $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ ist konvergent.

Dann ist $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ auf $D$ absolut und gleichmäßig konvergent.

Zum Beweis: Zeige dass $(s_n)$, $s_n(z) = \sum_{j=0}^{n} |f_j(z)|$, auf $D$ bezogen auf $\|\cdot\|_\infty$ eine Cauchy-Folge ist und wende Satz 2 an. Das Cauchy-Kriterium für Reihen (7. Vorlesung) ist unter anderem auf $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ anzuwenden.

<u>Satz 4</u> Gegeben sind $f_n : D \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit den Eigenschaften: <u>(1)</u> $f_n$ ist auf $D$ stetig für jedes $n$,

<u>(2)</u> $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig auf $D$.

Dann ist $f$ auf $D$ stetig.

<u>Zum Beweis</u>: Es sei $\varepsilon > 0$ und $p \in D$.
Mit <u>(2)</u> gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\|f_N - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt.
Mit <u>(1)</u> für $f_N$ gibt es ein $\delta > 0$ wie folgt:

Aus $z \in D$, $|z - p| < \delta$, folgt: $|f_N(z) - f_N(p)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Beachtet man

$$f(z) - f(p) = f(z) - f_N(z) + f_N(z) - f_N(p) + f_N(p) - f(p)$$

so erhält man für die $z \in D$, die $|z - p| < \delta$ erfüllen, dass

$|f(z) - f(p)| < \varepsilon$ gilt

Der Inhalt des Satzes kann auch so formuliert werden:

Für jedes $p \in D$ gilt

$$\lim_{\substack{z \to p \\ z \in D}} \left( \lim_{n \to \infty} f_n(z) \right) = \lim_{n \to \infty} \left( \lim_{\substack{z \to p \\ z \in D}} f_n(z) \right)$$

Zu den Beispielen unter 2.1 / S.23 8. Woche:

1/ keine gleichmäßige Konvergenz auf $[0,1]$

2/ keine gleichmäßige Konvergenz auf $[0,1]$

3) Für jede Zahl $R>0$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ auf $\{z \mid |z| \leq R\}$ absolut und gleichmäßig, da wegen $\frac{|z|^k}{k!} \leq \frac{R^k}{k!}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!}$ eine (von $z$ unabhängige) konvergente Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ ist.

weitere Beispiele

4/ $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx^2}$ ist auf $1 \leq x \leq 2$ gleichmäßig (gegen $\frac{1}{1-e^{-x^2}}$) konvergent. Eine konvergente brauchbare Majorante ist etwa $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

5/ $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist auf $\{z \mid |z| \leq \rho\}$ (wobei $\rho$ eine feste Zahl mit $0<\rho<1$ ist) absolut und gleichmäßig konvergent.

6/ $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist auf $\{x \mid |x|<1\}$ nicht gleichmäßig konvergent.

1. Stetigkeit der durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion (Satz 3, Kap 11)

2. lim sup, lim inf, Konvergenzradius

**1.** Satz 1: Es sei $r$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ und $D = \{z \mid |z-z_0| < r\}$.
Die dann für $z \in D$ durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ definierte Funktion $f$ ist für jedes $z \in D$ stetig.

Beweis Skizze

Es sei $p \in D$ und $\varrho$ eine Zahl mit $|p-z_0| < \varrho < r$.
Die Reihe konvergiert für $|z-z_0| \le \varrho$ gleichmäßig nach Satz 3 / 9. Woche: $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \varrho^k$ ist eine von $z$ unabhängige Majorante. Da die Partialsummen Polynome und als solche stetig sind, zieht die gleichmäßige Konvergenz die Stetigkeit von $f$ auf $\{z \mid |z-z_0| \le \varrho\}$ nach sich (Satz 4 / 9. Woche). Wegen $|p-z_0| < \varrho$ ist $f$ also in $p$ stetig ✓

**2.1** Satz 2: Jede beschränkte reelle Folge $(a_n)$ besitzt einen größten Häufungspunkt und einen kleinsten HP.

Beweis Skizze

Die Menge $H$ der HP der Folge $(a_n)$ ist nicht leer (Bolzano Weierstrass) und ebenfalls beschränkt.
Nach dem Vollständigkeitsaxiom besitzt $H$ ein Supremum und ein Infimum. Es sind zu zeigen $\sup(H) \in H$, $\inf(H) \in H$. Das folgt leicht mit der Def für sup, inf und Häufungspunkt. ✓

Def: $\limsup (a_n) :=$ der größte HP der Folge $(a_n)$
$\liminf (a_n) :=$ der kleinste HP der Folge $(a_n)$

<u>Bemerkungen</u>

1) $(a_n)$ ist konvergent $\Longleftrightarrow \limsup (a_n) = \liminf (a_n) \left(= \lim_{n\to\infty} a_n\right)$

2) Ist $(a_n)$ nach oben unbeschränkt, so definiert man:
$\limsup (a_n) = +\infty$
Ist $(a_n)$ nach unten unbeschränkt, so definiert man:
$\liminf (a_n) = -\infty$.

3) $\alpha = \limsup (a_n) \Longleftrightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ gelten
1. $\alpha - \varepsilon < a_n$ für unendlich viele $n$
2. $\alpha + \varepsilon < a_n$ für höchstens endlich viele $n$
$\Longleftrightarrow a_n < \alpha + \varepsilon$ für fast alle $n$ )

analog für $\liminf$ (Übung!)

<u>2.2</u> <u>Wurzelkriterium</u> (Kap 8 / Satz 9)
$c_n \geq 0$ : Gilt $\limsup \sqrt[n]{c_n} < 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent.
Gilt $\limsup \sqrt[n]{c_n} > 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent.

<u>Beweis:</u> Mit Bemerkung, 3) oben wird dies auf den Satz 9 / Kap 8 der Vorlesung zurückgeführt.

<u>2.3</u> <u>Quotientenkriterium</u> (Kap 8 / Satz 8)
$c_n > 0$: Gilt $\limsup \frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent.
Gilt $\liminf \frac{c_{n+1}}{c_n} > 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent.

Dies lässt sich leicht auf Kap 8 / Satz 8 zurückführen

Die Divergenzaussage folgt damit, dass für eine Folge $(c_n)$ mit $\liminf \frac{c_{n+1}}{c_n} > 1$ nicht gelten kann: $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$

✓

**2.4** Beispiele für 2.2, 2.3.

Untersuche $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ auf Konvergenz/Divergenz:

1) $c_{2n} = \ell^{2n}$, $c_{2n+1} = \frac{1}{2} \ell^{2n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

Hier ist $\ell$ eine feste Zahl mit $\frac{1}{2} < \ell < 1$.

2) $c_{2n} = \frac{1}{3^n}$, $c_{2n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

3) $c_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}$, $c_{2n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

Berechnen Sie jeweils die Größen: $\limsup \sqrt[n]{c_n}$, $\limsup \frac{c_{n+1}}{c_n}$ und $\liminf \frac{c_{n+1}}{c_n}$. Vergleichen Sie 2.2 mit 2.3.

**2.5** Satz 2

Der Konvergenzradius $r$ der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist durch $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ gegeben. Hier werden

$r = 0$ im Fall $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, und

$r = \infty$ im Fall $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ vereinbart.

Dies folgt leicht mit 2.2 und der Def von $r$.

1. gleichmäßige Stetigkeit
2. Integrabilitätskriterium der Vorlesung
3. $C^0[a,b] \subset I[a,b]$.

1. $f: D \to \mathbb{C}$ heißt <u>gleichmäßig stetig auf $D$</u>, falls erfüllt ist: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, dass aus $x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta$ folgt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

<u>Beispiele. Bemerkungen.</u>

1) Eine auf $D$ gleichmäßig stetige Funktion ist auf $D$ stetig.
2) $f$ mit $f(x) = x$ ist auf $\mathbb{C}$ gleichmäßig stetig.
3) $f$ mit $f(x) = x^2$ ist auf $\{x \mid 0 \le x \le 1\}$ gleichmäßig stetig, jedoch auf $\{x \mid x \geq 0\}$ ist $f(x) = x^2$ nicht gleichmäßig stetig.
4) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ist auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

<u>Satz 1</u> <u>Ist $f$ auf $[a,b]$ stetig, so ist $f$ auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig.</u>

<u>Beweis</u> (Skizze): Angenommen, $f$ ist auf $[a,b]$ nicht gleichmäßig stetig, so (Negiere obige Definition) gibt es ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ $x_n, y_n \in [a,b]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ $\overline{(*)}$.
Es gibt Teilfolgen $(x_{n_k})$, $(y_{n_k})$ von $(x_n)$, $(y_n)$, die gegen ein $p \in [a,b]$ konvergieren. Da $f$ in $p$ stetig ist, hat man $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(p)$. Hieraus folgt $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0$ im Widerspruch zu $\overline{(*)}$.

2. Ist $Z = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ mit $x_{k-1} < x_k$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und setzt man $m_k = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}$, $M_k = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}$ für eine auf $[a,b]$ definierte und dort beschränkte Funktion, so haben wir die Untersummen $\omega(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$ und die Obersummen $\Omega(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$ betrachtet. Wir hatten eingeführt

$I_*(f) = \sup\{\omega(f,Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$ und

$I^*(f) = \inf\{\Omega(f,Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$ und

hiermit definiert:

$f$ ist über $[a,b]$ integrierbar ($f \in I[a,b]$), falls $I_*(f) = I^*(f)$ gilt. In diesem Fall schreibt man

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_*(f) = I^*(f).$$

<u>Integrabilitätskriterium</u>

<u>$f \in I[a,b] \iff$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z$ von $[a,b]$ mit $\Omega(f,Z) - \omega(f,Z) < \varepsilon$.</u>

<u>Beweis</u>: „$\Rightarrow$": gemäß der Definition von sup und inf gibt es Zerlegungen $Z_1, Z_2$ derart, dass

$\Omega(f,Z_1) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$ und $\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < \omega(f,Z_2)$

erfüllt sind. Für $Z = Z_1 \cup Z_2$ folgt wegen $\Omega(f,Z) \le \Omega(f,Z_1)$ und wegen $\omega(f,Z_2) \le \omega(f,Z)$ die Behauptung $\Omega(f,Z) - \omega(f,Z) < \varepsilon$.

„$\Leftarrow$" man zeigt $I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Hierzu benötigt man, dass $I^*(f)$ eine untere Schranke und $I_*(f)$ eine obere Schranke obiger Mengen sind.

3. <u>Satz 2</u> (Satz 1 / Kap 13)

<u>Ist $f$ auf $[a,b]$ stetig, so ist $f$ über $[a,b]$ integrierbar.</u>

<u>Beweis</u>: $f$ ist nach Satz 1 auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$ wie folgt:

(*) für $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Wähle für $[a,b]$ die äquidistante Zerlegung $Z$:
$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ mit $n > \frac{b-a}{\delta}$.
Mit $f(\eta_k) = M_k$, $f(\nu_k) = m_k$, $\nu_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$,
gilt dann, wenn man (*) in der Form
$|f(\eta_k) - f(\nu_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ berücksichtigt:

$\Omega(f, Z) - \omega(f, Z) < \varepsilon$, so dass $f$ nach 2. über $[a,b]$ integrierbar ist.

1. cosh, sinh. Beispiel zu Satz 9, Kap 13
2. Vertauschung von lim und Integration

---

1. $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$, cosh ist gerade,
$\nearrow$ (streng) für $x>0$, $\searrow$ (streng) für $x<0$.
$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$, sinh ist ungerade,
$\nearrow$ (streng) für $x\in\mathbb{R}$.

$y=f(x)=\cosh(x)$, $x>0$, ist ~~stetig~~, ~~bijektiv~~,
diff'bar mit $f'(x)=\sinh(x)>0$ für alle $x>0$.
Da $\cosh(x)\geq 1$ gilt, ist die Umkehrfunktion von
$f(x)=\cosh(x)$, $x>0$ : $g(y)=\operatorname{ar}\cosh(y)$, $y>1$
mit $g(y)>0$ diff'bar für jedes $y>1$. Es gilt

$$g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}=\frac{1}{\sinh(\operatorname{ar}\cosh(y))}=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}},\quad y>1.$$

Man kann $g(y)$ explizit angeben: $g(y)=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$, $y>1$.

2. (Zur Erinnerung: hier die 8., 9., 10. Vorlesung)

2.1 Beispiel

$$C[0,1]\ni f_n(x)=\begin{cases}2n^2x & ,\ 0\leq x\leq \frac{1}{2n},\\ 2n-2n^2x, & \frac{1}{2n}\leq x\leq\frac{1}{n},\\ 0 & ,\ \frac{1}{n}\leq x\leq 1\end{cases}\qquad n=1,2,\dots$$

Es gilt punktweise auf $[0,1]$: $f_n\to f=0$ $(n\to\infty)$.
Wegen $f_n(\frac{1}{2n})=n$ gilt $\|f_n-f\|_\infty=\|f_n\|_\infty\geq f_n(\frac{1}{2n})=n$, so
dass die Konvergenz $f_n\to 0$ $(n\to\infty)$ nicht gleichmäßig ist.
Man hat $\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{1}{2}$ für alle $n$. Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0 .$$

Aus diesem Ergebnis folgt zusammen mit dem folgenden Satz ebenfalls, dass bei $f_n \to 0$ $(n\to\infty)$ keine gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

## 2.2 Satz (Vertauschung lim und $\int$)

Es sei $(f_n)$ eine Folge von auf $[a,b]$ stetigen Funktionen. $f$ sei auf $[a,b]$ definierte Funktion, und es gelte $f_n \to f$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Dann hat man:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{(\lim_{n\to\infty} f_n)(x)}_{=f(x)}\,dx .$$

Beweis: Nach Satz 4, 9. Vorlesung, gilt $f \in C[a,b]$, also (11. Vorlesung) $f \in I[a,b]$.

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n - f|(x)\,dx \leq \|f_n - f\|_\infty (b-a)$$

## 2.3 Anwendung

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ habe den Konvergenzradius $R$.

Es seien $a, b \in (-R,R)$, $a<b$. Dann gilt

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\Big)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b x^k\,dx \quad \text{mit obigem Satz,}$$

da die Folge $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ auf $[-\rho,\rho]$ gleichmäßig konvergiert, wobei $\rho$ so gewählt ist: $0<\rho<R$ mit $-\rho \leq a \leq \rho$, $-\rho \leq b \leq \rho$.

1. Die lineare Differentialgleichung (DGl) 1. Ordnung
2. Die lineare DGl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
Die Schwingungsgleichung (wird in der 14. Woche fortgesetzt)

Lit Hinweise : Heuser Gewöhnliche Differentialgleichungen
Braun Differential Equations and Their Applications

13.1 Gegeben sind Funktionen $p, q \in C^0(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. Gesucht ist $y = \varphi(x) \in C^1(I)$ mit

$$(1) \quad \underline{\varphi'(x) + p(x)\varphi(x) = q(x), \ x \in I}.$$

Es sei $x_0 \in I$ beliebig. Multipliziere (1) mit $\mu(x) = \exp(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt)$ $\Rightarrow$:

$$(1) \Leftrightarrow (2) \quad (\mu\varphi)'(x) = \mu(x)q(x), \ x \in I$$

$$\int_{x_0}^{x} \Rightarrow \quad y = \varphi(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mu(t)q(t)\,dt\right), \ x \in I$$

oder:

$$\underline{y = \varphi(x) = \varphi(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau} q(t)\,dt, \ x \in I}$$

Setzt man hier $q = 0$, so stehen hier alle Lösungen der homogenen Gleichung (1). $x_0 \in I$ ist beliebig.

---

13.2 Es seien $a, b$ konstant, $g \in C^0(I)$. Gesucht ist $y = v(x) \in C^2(I)$ mit

$$(3) \quad \underline{(Lv)(x) := v''(x) + 2av'(x) + bv(x) = g(x), \ x \in I}$$

1) Für $v$ sei (3) erfüllt. Dann gilt für $u(x) := e^{ax}v(x)$

$$(4) \quad \underline{u''(x) + (b - a^2)u(x) = e^{ax}g(x)}$$

und mit jeder Lösung $u$ von (4) gilt für $v(x) = e^{-ax}u(x)$ die Gleichung (3).

2) Es wird also jetzt behandelt

(5) $(Lu)(x) := \underline{u''(x) + \omega^2 u(x) = f(x)}$, $x \in I$, $\omega$ konst.

Es soll $\mathcal{L}_f = \{ y \in C^2(I) \mid (Ly)(x) = f(x), x \in I \}$

= "die allgemeine Lösung von (5)"

bestimmt werden.

(Das Vorgehen im folgenden funktioniert auch für Gleichungen (3), bei denen a, b stetige Funktionen in x sind.)

Wir setzen voraus, dass eine nichttriviale Lösung $u_1 \in \mathcal{L}_0$ bekannt ist. (Bei (5) ist das etwa $u_1(x) = \sin \omega x$.)

Zur Lösung von (5) wird der Ansatz (Reduktionsansatz)

(6) $$u(x) = u_1(x) s(x)$$

mit einer zu berechnenden Funktion $s = s(x)$ gemacht.

Aus $L(u_1 s)(x) = f(x)$ ergibt sich als Gleichung für s:

$$u_1(x) s''(x) + 2u_1'(x) s'(x) = f(x), \quad x \in I$$

Dies ist eine Gleichung vom Typ (1) / 13.1 für $s'(x)$.

Man erhält mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2$:

$$s(x) = \int_{\tau = x_0}^{x} \left( \int_{t = x_0}^{\tau} \frac{f(t) u_1(t)}{u_1^2(\tau)} dt \right) d\tau + c_1 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_1^2(t)} dt + c_2$$

Zurück in (6) haben wir erhalten:

(7) $$u(x) = u_1(x) \int_{x_0}^{x} \left( \int_{x_0}^{\tau} \frac{f(t) u_1(t)}{u_1^2(\tau)} dt \right) d\tau + c_1 u_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{u_1^2(t)} dt + c_2 u_1(x)$$

Machen Sie die Probe: Rechnen Sie nach, dass für u aus (7)
$u''(x) + \omega^2 u(x) = f(x)$, $x \in I$ gilt.

Diskussion der Formel (7)

$$(8)\quad u_p(x) := u_1(x)\int_{x_0}^{x}\Big(\int_{x_0}^{\tau}\frac{f(t)u_1(t)}{u_1^2(\tau)}\,dt\Big)d\tau$$

$$(9)\quad u_2(x) := u_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{u_1^2(t)}\,dt$$

(7): $u(x) = u_p(x) + c_1u_2(x) + c_2u_1(x)$

$c_1, c_2$ beliebige Konstanten

Durch (7) wird für jedes Paar von Konstanten $c_1, c_2$ eine Funktion aus $\mathcal{L}_f$ gegeben.

Setzt man in (7) $f=0$, so hat man: $c_1u_2 + c_2u_1 \in \mathcal{L}_0$ für beliebige Konstanten $c_1, c_2$. Setzt man noch $c_1 = 1, c_2 = 0$, so sieht man: $u_2 \in \mathcal{L}_0$. Man liest direkt ab, dass $u_1, u_2$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung sind, d.h. $\alpha u_1(x) + \beta u_2(x) = 0$, $x \in I$, $\alpha, \beta$ konstant, ist nur für $\alpha = \beta = 0$ möglich. Es gilt:

$$\mathcal{L}_0 = \{u \in C^2(I) \mid u = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2,\ \alpha_1,\alpha_2 \text{ konst}\}:$$

jede Lösung der homogenen Gleichung ist eine Linearkombination von $u_1$ und $u_2$.

Aufgrund der Herleitung von (7) können wir formulieren:

$$\mathcal{L}_f = u_p + \mathcal{L}_0 = \{u \in C^2(I) \mid u = u_p + u_0,\ u_0 \in \mathcal{L}_0\}.$$

d.h.: Addiert man zu $u_p$ ein $u_0 \in \mathcal{L}_0$, so erhält man eine Funktion aus $\mathcal{L}_f$. Und: zu $u \in \mathcal{L}_f$ gibt es ein $u_0 \in \mathcal{L}_0$ mit $u = u_p + u_0$.

Beispiel Gesucht ist die allgemeine Lösung:

$$(10)\quad y'' - 2y' + 5y = e^x$$

Durch $u = e^{-x} y$ erhält man die Gleichung

(11) $u'' + 4u = 1$

Mit $u_1(x) = \sin 2x$ berechnet man $u_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ (nach (9)),

so dass gilt: $\mathcal{L}_0 = \{u \mid u = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x,\ c_1 c_2 \text{ konst}\}$.

Wertet man (8) aus, so erhält man: $u_p(x) = \frac{1}{4}$ und

hiermit die allgemeine Lösung von (11)

$$u(x) = \frac{1}{4} + c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$$

und von (10)

$$y(x) = \frac{1}{4} e^x + e^x (c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$$

$c_1 c_2$ beliebige Konstante

---

14.1
13.3 Variation der Konstanten

Das folgende gilt allgemeiner für Gleichungen mit variablen Koeffizienten

(12) $y'' + 2a(x) y' + b(x) y = g(x)$

Das Ergebnis von oben " $\mathcal{L}_g = y_p + \mathcal{L}_0$ " ($\mathcal{L}, y_p$ beziehen sich jetzt auf (12)) gilt unverändert.

Es seien $y_1, y_2$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung (12), so dass $\mathcal{L}_0 = \{y \mid y = c_1 y_1 + c_2 y_2,\ c_1, c_2 \text{ konst}\}$ bedeutet.

Eine Funktion $y_p \in \mathcal{L}_g$ (Lösung von (12)) erhält man durch den Ansatz $y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$, indem man

$c_1, c_2$ aus

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \qquad (13)$$

$$c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = g(x) \qquad (14)$$

bestimmt.

Die Bedingung (13) hat zur Folge, dass für $c_1, c_2$ nur Gleichungen erster Ordnung vorkommen. (14) beschreibt die Bedingung $y_p \in \mathcal{L}_g$.

– (13), (14) sind stets nach $c_1', c_2'$ auflösbar, da für linear unabhängige Funktionen $y_1, y_2 \in \mathcal{L}_0$
$y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) \neq 0$, $x \in I$, gilt.

Prüfen Sie dies allgemein nach für die vorher behandelten Gleichungen mit konstanten Koeffizienten.
Führen Sie das oben beschriebene Verfahren: Variation der Konstanten: durch für das Beispiel aus 13.2 (Gleichungen (10), bzw (11)) und auch für die Aufgaben vom 13./14. Übungs= blatt.

Vertauschung von lim und Differentiation.
Differentiation von Potenzreihen

15.1 Es werden die Definition und Ergebnisse zu gleichmäßiger Konvergenz benötigt:
8. Woche, 9. Woche, 10. Woche 1., 12. Woche 2.

15.2 Satz 1

$(f_n)$ sei eine Folge reellwertiger Funktionen aus $C^1[a,b]$.
Es seien erfüllt:

1. $f_n(a) \to \alpha \; (n\to\infty)$ und 2. $f_n' \to g \; (n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

Dann gelten: $f_n \to f \; (n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[a,b]$, wobei $f(x) = \alpha + \int_a^x g(t)\,dt$, $a\le x\le b$, ist. Es ist $f\in C^1[a,b]$ und man hat $f'(x) = g(x)$, $a\le x\le b$.

Zum Beweis

$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$, $a\le x\le b$. Bilde $\lim_{n\to\infty}$.

Verwende die Voraussetzungen und oben erinnerte Sätze.
Dass $f_n \to f \; (n\to\infty)$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gilt, folgt aus $|f(x) - f_n(x)| \le |\alpha - f_n(a)| + |b-a|\,\|g - f_n'\|_\infty$, $a\le x\le b$.

15.3 Differentiation von Potenzreihen

Satz 2 Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k (x-x_0)^k$ für $|x-x_0|<R$ definiert.
Es ist $f$ für $x: |x-x_0|<R$ diff'bar, es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k a_k (x-x_0)^{k-1} \text{ für } |x-x_0|<R.$$

Zum Beweis: Zu jedem $x$ mit $|x-x_0|<R$ gibt es ein $\rho$ mit $|x-x_0|<\rho<R$.

Es gelten gleichmäßig auf $\{x \mid |x-x_0|\le\rho\}$:

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

$$f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n} k a_k(x-x_0)^{k-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$$

Satz 1 liefert $f'=g$; das ist die Beh.

---

15.4 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x, \quad x\in\mathbb{R}$

Betrachte mit $N\in\mathbb{N}$: $\begin{array}{l} f_n(x)=n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \\ f(x)=x \end{array}$ für $|x|\le N$, $n>N$.

Wegen $f_n(0)=f(0)=0$ für alle $n$ und

$$f_n'(x)=\frac{1}{1+\frac{x}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(x)=1 \text{ gleichmäßig auf } [-N,N]$$

folgt nach Satz 1: $f_n\to f$ gleichmäßig auf $[-N,N]$.
Daraus folgt: $e^{f_n(x)}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\to e^{f(x)}=e^x$ $(n\to\infty)$ für jedes $x\in\mathbb{R}$.

Bemerkung: Es sei $x\in\mathbb{R}$. Mit Hilfe der L'Hospital Regeln berechnet man $\lim\limits_{t\to 0}\ln(1+tx)^{\frac{1}{t}}=x$, woraus

$\lim\limits_{t\to 0}(1+tx)^{\frac{1}{t}}=e^x$ folgt. $t=\frac{1}{n}$ ist obiges Ergebnis.

Aufgaben: Gesucht sind geschlossene Ausdrücke für

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$ und $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$. (Für welche $x$?)