Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroningenieurwesen, Physik und Gedoäsie WS 2010/2011

Andreas Müller-Rettkowski
e-mail: andreas.mueller-rettkowski@kit.edu

Dies ist eine Vorlesungs*zusammenfassung*, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze. Der Besuch der Vorlesung ist hierdurch nicht zu ersetzen: In der Vorlesung wird erklärt, begründet, veranschaulicht und eingeordnet.

Den Vorlesungsstoff und viele konkrete Anwendungen finden Sie in den Büchern von Dirschmid, Burg/ Haf/ Wille, Meyberg/ Vachenauer, die auf der Homepage zur Vorlesung angegeben sind.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundtatsachen der Aussagenlogik

1.1 Aussagen

Eine *Aussage* ist ein Satz, der entweder wahr (W) oder falsch (F) ist

1.2 Verknüpfungen von Aussagen durch Junktoren $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Sind A, B Aussagen, so werden die Aussagen

$$\neg A, A \vee B, A \wedge B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$$

durch ihre Wahrheitswerte in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten von A und B durch die folgende Wahrheitstafel definiert:

A	$\neg A$	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	F	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	W	F	F	F	W	W

- $\neg A$ (nicht A) ist nur F, wenn A W ist
- $A \wedge B$ (A und B) ist nur W, wenn A und B beide W sind
- $A \vee B$ (A oder B) ist nur F, wenn A und B beide F sind
- $A \Rightarrow B$ (aus A folgt B, wenn A dann B, B ist notwendig für A) ist nur dann F, falls $\neg A$ und B beide F sind
- $A \Leftrightarrow B$ (A ist äquivalent zu B, A ist notwendig und hinreichend für B) ist nur dann W, wenn A und B dieselben Wahrheitswerte haben

Bemerkungen *1. $A \wedge (\neg A)$ ist stets F*

2. $A \vee (\neg A)$ ist stets W

3. *$A \Rightarrow B$ ist W, wenn A F ist, unabhängig vom Wahrheitswert von B.*

Satz 1 *A, B, C seien Aussagen. Es gelten:*

1.
$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

2.
$$\begin{aligned}(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) && (*)\\ &\Leftrightarrow (\neg A) \vee B\\ &\Leftrightarrow (A \wedge \neg B \Rightarrow C \wedge \neg C) && (**)\end{aligned}$$

3.
$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

4.
$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$

1.3 Direkter / Indirekter Beweis des Satzes: $A \Rightarrow B$ (A ist die Voraussetzung, B die Behauptung)

Direkter Beweis (1. Zeile der Wahrheitstafel)

A ist als Voraussetzung a priori W. Folgere (richtig!) B. Dann ist B W.

Beispiel *p sei eine natürliche Zahl. Es gilt: Ist p gerade, so ist p^2 gerade.*

1.3.1 Indirekter Beweis (Satz 1 (*), (**), letzte Zeile der Wahrheitstafel)

Nimm an, B ist F: Gehe von $\neg B$ aus. Folgere auf richtige Weise etwas Falsches: etwa $\neg A$ (*) oder $C \wedge \neg C$ (**). Dann muss der Ausgangspunkt $\neg B$ F, also B W sein.

Beispiel *p sei eine natürliche Zahl. Es gilt: Ist p^2 gerade, so ist p gerade.*

Satz 2 (Zusammenfassen der beiden Beispiele) *Es sei p eine natürliche Zahl. Es gilt:*

$$p \text{ ist gerade} \Longleftrightarrow p^2 \text{ ist gerade.}$$

Satz 3 *$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl*

1.4 Die Quantoren $\forall, \exists$.

Trifft die Aussage $A(x)$ für alle x mit einer bestimmten Eigenschaft zu, so schreiben wir

$$\bigvee_x A(x).$$

Gibt es (mindestens) ein x mit dieser Eigenschaft, für das $A(x)$ zutrifft, so wird das in der Form

$$\exists_x A(x)$$

ausgedrückt.

Verneinung:

$$\begin{aligned} \neg \left(\forall_x A(x) \right) &\Longleftrightarrow \exists_x \left(\neg A(x)\right), \\ \neg \left(\exists_x A(x) \right) &\Longleftrightarrow \forall_x \left(\neg A(x)\right) \end{aligned}$$

Beispiel *x sei eine reelle Zahl.*

1. $\exists_x \; x^2 = 1$ *ist W. Also ist* $\neg\left(\exists_x \; x^2 = 1\right)$ *F, das ist äquivalent zu* $\forall_x \; x^2 \neq 1$. [1]
2. $\exists_x \; x^2 + x + 1$ *ist F, die Negation* $\forall_x \; x^2 + x + 1 \neq 0$ *ist W.*

[1] Aus Gründen der Lesbarkeit wird in nicht-abgesetzten Formeln stets die Schreibweise $\forall_x A(x)$ anstatt $\underset{x}{\forall} A(x)$ verwendet

2 Grundbegriffe der Mengenlehre

2.1 Mengen

Eine *Menge* M ist die Zusammenfassung wohlbestimmter, wohlunterschiedener Objekte der Anschauung oder des Denkens zu einem neuen Ganzen.

„$x \in M$“ bedeutet: Das Objekt (Element) x gehört zur Menge M.

$(x \notin M) :\Longleftrightarrow \neg(x \in M)$ (x liegt nicht in M) [1]

Für jede Menge M und jedes Objekt x muss unzweideutig gelten: entweder $x \in M$ oder $x \notin M$.

Schreibweise

$$M = \underbrace{\{x \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}}_{\substack{\text{alle Elemente, die die Eigenschaft } E \\ \text{besitzen, bilden die Menge } M}}$$

2.2 Wichtige Mengen

$\emptyset$ bezeichnet die *leere Menge*, die Menge, die keine Elemente enthält: Die Aussage $x \in \emptyset$ ist stets F.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bezeichnen die Mengen der *natürlichen*, der *ganzen*, der *rationalen*, der *reellen* und der *komplexen Zahlen*.

[1] „:⇔“ bedeutet, dass das, was links von „:⇔“ steht, durch die Aussage rechts davon definiert wird.

2.3 Inklusion (A, B sind beliebige Mengen)

$$\begin{aligned}(A \subset B)\ (\text{„}A \text{ ist Teilmenge von } B\text{“}) :&\Longleftrightarrow \underset{x\in A}{\forall}\ x \in B\\ (A \not\subset B)\ (\text{„}A \text{ liegt nicht in } B\text{“}) :&\Longleftrightarrow \neg(A \subset B)\\ &\Longleftrightarrow \underset{x\in A}{\exists}\ x \notin B\end{aligned}$$

Gleichheit

$$(A = B) :\Longleftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Bemerkung *Bei „$\subset$“ ist die Gleichhheit nicht ausgeschlossen. Es gilt z.B. $A \subset A$ für jede Menge A.*

Beispiel 1. *Mit den Bezeichnungen aus 2.2 gilt*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Hier gilt nirgends die Gleichheit. $\mathbb{Q}$ etwa ist echte *Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

2. *$\emptyset \subset A$ für jede Menge A*

3. *$((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Rightarrow (A \subset C)$ für Mengen A, B, C.*

2.4 Die Mengenoperationen: $\cap, \cup, \setminus$

A, B sind beliebige Mengen. $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ sind die wie folgt definierten Mengen:

$$A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}^2 \qquad \text{(Durchschnitt von } A \text{ und } B\text{)}$$
$$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\} \qquad \text{(Vereinigung von } A \text{ und } B\text{)}$$
$$A \setminus B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \qquad \text{(Differenz von } A \text{ und } B\text{)}$$

Falls $B \subset A$:

$$\complement_A B := A \setminus B \qquad \text{(Komplement von } B \text{ bzgl. } A\text{)}$$

Satz 1 („Rechnen mit Mengen“) *A, B, C seien beliebige Mengen. Es gelten:*

[2] Ähnlich wie bei „:⇔“ wird das, was links von „:=“ steht, durch das, was rechts davon steht, definiert.

1. $A \cap B = B \cap A$,
   $A \cup B = B \cup A$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $(A \subset B) \Longrightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$,
   $(A \subset B) \Longrightarrow (A \cup C) \subset (B \cup C)$
5. $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$,
   $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$
6. $(B \subset A) \Longrightarrow \underbrace{A \setminus (A \setminus B)}_{=\complement_A(\complement_A B)} = B$
7. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
8. $A \cup \emptyset = A$, $A \setminus \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
9. $(A \subset B) \Longleftrightarrow (A \cup B = B) \Longleftrightarrow (A \cap B = A)$

Versuchen Sie die Beweise, oder machen Sie sich diese Aussagen wenigstens anschaulich klar.

2.5 Ergänzungen

1. Es sei I eine Menge. Jedem $j \in I$ wird eine Menge A_j zugeordnet. $\{A_j \mid j \in I\}$ heißt *Mengenfamilie*.

$$\bigcup_{j\in I} A_j := \left\{ x \mid \underset{j\in I}{\exists}\, x \in A_j \right\},$$
$$\bigcap_{j\in I} A_j := \left\{ x \mid \underset{j\in I}{\forall}\, x \in A_j \right\}$$

Satz 2 (de Morgansche Regeln) *Es sei $\{A_j \mid j \in I\}$ eine Mengenfamilie und M eine Menge mit $A_j \subset M$ für jeden Index $j \in I$. Es gelten:*

$$\complement_M \left(\bigcup_{j\in I} A_j \right) = \bigcap_{j\in I} \complement_M A_j,$$
$$\complement_M \left(\bigcap_{j\in I} A_j \right) = \bigcup_{j\in I} \complement_M A_j$$

2. Zwei Mengen M, N mit $M \cap N = \emptyset$ heißen *disjunkt*.

3. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen, so wird die Menge der geordneten n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(a_j \in A_j,\ j = 1, \ldots, n)$ durch $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ bezeichnet und *das kartesische Produkt* der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ genannt.

Im Fall $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ schreibt man für $A \times \ldots \times A$ einfach A^n.

Beispiel $A = \mathbb{R}$: $\mathbb{R}^2$ *Ebene*, $\mathbb{R}^3$ *Raum.*

3 Funktionen (Abbildungen)

3.1 Bezeichnungen, Definitionen

1. X, Y seien zwei nichtleere Mengen. Eine Vorschrift f, durch die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird, heißt *Funktion (Abbildung) von X nach Y*. Geschrieben:

$$f : X \longrightarrow Y,\ y = f(x).^{1}$$

   x heißt *unabhängige*, y *abhängige* Variable. X ist der *Definitionsbereich* von f (wir werden hierfür $D(f)$ schreiben), Y heißt *Wertebereich* von f.

2. Für $A \subset X$ heißt

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

   das *Bild von A unter f*, $f(X)$ heißt *Bildbereich von f* (das ist die Menge der Funktionswerte).

3. Der *Graph* einer Funktion $f : X \longrightarrow Y$ ist die Menge

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y.$$

   Es gilt

$$\forall_{(x,y)\in \mathrm{graph}(f)} (x, y') \in \mathrm{graph}(f) \Longrightarrow y = y'.$$

4. Die durch $\mathrm{id}_X(x) := x$ für alle $x \in X$ definierte Funktion $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ heißt die *Identität von X*.

5. Es sei $A \subset X$. Die Funktion

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases},\ \chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$$

   heißt die *charakteristische Funktion von A*.

[1] Oft wird auch die Notation $f : X \longrightarrow Y,\ x \longmapsto y$ verwendet.

3.2 surjektiv, injektiv, bijektiv

Die Funktion $f : X \longrightarrow Y$ heißt

- *surjektiv*, wenn jedes $y \in Y$ mindestens ein Urbild hat. (Wenn also $f(X) = Y$ gilt.)
- *injektiv (eineindeutig)*, wenn jedes Bild $f(x)$ nur ein Urbild besitzt. (Wenn also aus $x_1 \neq x_2$ folgt: $f(x_1) \neq f(x_2)$.)
- *bijektiv*, wenn f surjektiv und injektiv ist, wenn es also zu jedem $y \in Y$ genau ein Urbild $x \in X$ gibt.

Ist f bijektiv, so ist die Vorschrift, die jedem $y \in Y$ die Lösung x der Gleichung $y = f(x)$ zuordnet, eine Funktion, die *zu f inverse Funktion* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$:

$$f^{-1}(y) = x :\Longleftrightarrow y = f(x) \quad (x \in X, y \in Y)$$

3.3 Hintereinanderausführen / Komposition von Abbildungen

X, Y, Z seien Mengen und $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ Funktionen. Dann wird durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)),\ x \in X$$

die *Kompositionsabbildung* $g \circ f : X \longrightarrow Z$ definiert.

- Es gelten mit $f : X \longrightarrow Y$:

$$f \circ \mathrm{id}_X = f,\ \mathrm{id}_Y \circ f = f.^{2}$$

- Für zwei Funktionen f, g, für die $f \circ g$ und $g \circ f$ bildbar sind, gilt i.A. $f \circ g \neq g \circ f$.[3]

Satz 1 *X, Y, Z, U seien Mengen und $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$, $h : Z \longrightarrow U$ Funktionen. Dann sind die Funktionen $(h \circ g) \circ f$ und $h \circ (g \circ f)$ Funktionen von X nach U. Es gilt:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

[2] Zwei Funktionen $f : X \longrightarrow Y$, $g : X' \longrightarrow Y'$ sind gleich ($f = g$), wenn $X = X'$ und für alle $x \in X$ $f(x) = g(x)$ gilt.

[3] Man schreibt $f \neq g$, wenn $\neg(f = g)$ gilt, also wenn entweder $X \neq X'$ oder ein $x \in X$ existiert mit $f(x) \neq g(x)$.

3.4 Die inverse Funktion

(siehe oben 3.2)

Satz 2 *a) Ist $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv, so ist f^{-1} die durch $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ eindeutig festgelegte Abbildung $g : Y \longrightarrow X$.*

b) Gelten für die Funktionen $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_Y,$$

so sind f und g bijektiv.

Bemerkung *(Übung) Ist f bijektiv, so gilt*

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Satz 3 *Sind $f : X \longrightarrow Y$ und $h : Y \longrightarrow Z$ bijektiv, so ist $h \circ f : X \longrightarrow Z$ bijektiv. Es gilt*

$$(h \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ h^{-1}.$$

Beispiel *Definiere $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ durch*

$$\sigma(2k) := k,\ k = 1, 2, \ldots, \text{ und } \sigma(2k+1) = -k,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Übung*: Zeige, dass σ bijektiv ist. Finde eine Darstellung für $\sigma^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$. Prüfe damit nach: $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ und $\sigma^{-1} \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ und auch $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$.*

4 Die reellen Zahlen

4.1 Addition und Multiplikation

Die *Addition:*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

hat die folgenden Eigenschaften:

· Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten

$$x + y = y + x;\ (x + y) + z = x + (y + z);$$

· es gibt (genau) eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$;

· zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es (genau) ein $-x \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$.

Die *Multiplikation*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y =: xy,$$

wird durch die folgenden Regeln festgelegt:

· Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten

$$xy = yx;\ (xy)z = x(yz);$$

· es gibt (genau) eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ mit $x1 = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$;

· zu jedem $x \neq 0$ gibt es (genau) ein $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ mit $x\frac{1}{x} = 1$.

Es gilt das *Distributivgesetz:*

$$x(y + z) = xy + xz$$

Bemerkung *Aus diesen Regeln können alle Regeln über das Rechnen mit* $+$, $\cdot$, $-$ *und Brüchen hergeleitet werden*

4.2 Anordnungsaxiome ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$), Ungleichungen

Es gibt eine Teilmenge $P \subseteq \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

O1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ trifft genau eine der drei Möglichkeiten zu:

$$x \in P,\ -x \in P,\ x = 0$$

O2) $x, y \in P \Longrightarrow x + y \in P$

O3) $x, y \in P \Longrightarrow xy \in P$

Die Elemente aus P heißen *positiv*: Für $x \in P$ wird $x > 0$ geschrieben (oder $0 < x$) ($>$ größer als, $<$ kleiner als)

$$\begin{aligned} x < 0 &:\Longleftrightarrow -x > 0 \text{ } (x \text{ negativ}) \\ x > y &:\Longleftrightarrow x - y > 0 \\ x \geq y &:\Longleftrightarrow x > y \text{ oder } x = y \end{aligned}$$

Aus 01), 02), 03) mit den Bezeichnungen $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ können alle Regeln, die das Rechnen mit Ungleichungen betreffen, hergeleitet werden. Einige sind in Satz 1 zusammengestellt

Satz 1 *(1) Aus $a, b \in \mathbb{R}$, $(a > b) \wedge (b > c)$ folgt $a > c$*

(2) Aus $a > b$ und $c \in \mathbb{R}$ folgt $a + c > b + c$

(3) Aus $a > b$ und $c \left\{ {> \atop <} \right\} 0$ folgt $ac \left\{ {> \atop <} \right\} bc$

(4) Aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$

(5) Gilt für zwei Zahlen a, b und jede positive Zahl $\varepsilon > 0$ $a \leq b + \varepsilon$, so folgt $a \leq b$.

Beispiele *1)* $\{x \mid x + \frac{1}{x} \geq 2\} = \{x \mid x > 0\}$

2) $\forall_{x>0, y>0}\ (x < y) \Leftrightarrow (x^2 < y^2)$

3) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}\ (x < y) \Rightarrow (x < \frac{x+y}{2} < y)$

4.3 Der Betrag einer reellen Zahl

Für $x \in \mathbb{R}$ wird definiert:

$$|x| := \left\{ \begin{array}{ll} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{array} \right\} = \max(x, -x)$$

Satz 2 *x, y sind beliebige reelle Zahlen. Es gelten:*

(1) $x \neq 0 \Longleftrightarrow |x| > 0$

(2) $-|x| \leq x \leq |x|$

(3) $|-x| = |x|$

(4) $|x-y| = |y-x|$

(5) Es sei $a > 0$*:*
$$\{x \mid -a \leq x \leq a\} = \{x \mid |x| \leq a\}$$

Bemerkung (zu 5) *Es seien* $x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $a > 0$ *fest. Die Menge*

$$\{x \mid |x - x_0| < a\} = \{x \mid x_0 - a < x < x_0 + a\}$$

heißt a-Umgebung von x_0. *Wir schreiben hierfür* $\mathrm{U}_a(x_0)$.

Satz 3 *Für* $x, y \in \mathbb{R}$ *gelten:*

(1) $|xy| = |x||y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$, *also insbesondere* $|x|^2 = x^2$, $|x| = \sqrt{x^2}$

(2) $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*

(3) $(|x| \leq |y|) \Longleftrightarrow \left(x^2 \leq y^2\right)$

Beispiel $\{x \mid \left|\frac{x+4}{x+1}\right| \leq 2\} = \{x \mid |x| \geq 2\}$

Satz 4 (*GAM-Ungleichung*)

(1) Für $x \geq 0$, $y \geq 0$ *gilt* $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$

(2) Für $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt* $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

4.4 Das Vollständigkeitsaxiom

4.4.1 Beschränkte Mengen. Supremum. Infimum.

1) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

   Gilt $\exists_{S \in \mathbb{R}} \forall_{x \in M}\ x \leq S$, so heißt M *nach oben beschränkt*, S ist eine *obere Schranke von* M.

   Gilt $\exists_{s \in \mathbb{R}} \forall_{x \in M}\ s \leq x$, so heißt M *nach unten beschränkt*, s ist eine *untere Schranke von* M.

   Ist M nach unten und nach oben beschränkt, so heißt M *beschränkt*.

Beispiel *$M = \{x \mid x < 0\}$ ist nach oben aber nicht nach unten beschränkt.*

Maximum/ Minimum einer Menge $M \subset \mathbb{R}$:

$$x = \max(M) :\Longleftrightarrow (x \in M) \wedge \left(\forall_{y \in M}\, y \leq x \right)$$
$$\tilde{x} = \min(M) :\Longleftrightarrow (\tilde{x} \in M) \wedge \left(\forall_{y \in M}\, \tilde{x} \leq y \right)$$

Beispiel *$M = \{x \mid x < 0\}$ besitzt* kein *Maximum.*

Satz 5 *$M, N \subset \mathbb{R}$ seien Mengen, die ein Maximum und ein Minimum besitzen. Es gelten:*

a) $M \subset N \Longrightarrow \max(M) \leq \max(N)$ *und* $\min(N) \leq \min(M)$

b) $\max(M \cup N) = \max\{\max(M), \max(N)\}$ *und*
$\min(M \cup N) = \min\{\min(M), \min(N)\}$

c) $\min(M) = -\max(-M)$ *mit* $-M := \{x \mid -x \in M\}$

2) Es sei $M \subset \mathbb{R}$.

$\Gamma \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum von M*: $\Gamma = \sup(M)$, wenn Γ eine kleinste obere Schranke von M ist, also:

$$\Gamma = \sup(M) :\Longleftrightarrow \begin{array}{l} 1.)\ x \leq \Gamma \text{ für alle } x \in M \text{ und} \\ 2.)\ \text{aus } x \leq S \text{ für alle } x \in M \text{ folgt } \Gamma \leq S. \end{array}$$

$\gamma \in \mathbb{R}$ heißt *Infimum von M*: $\gamma = \inf(M)$, wenn γ eine größte untere Schranke von M ist, also:

$$\gamma = \inf(M) :\Longleftrightarrow \begin{array}{l} 1.)\ \gamma \leq x \text{ für alle } x \in M \text{ und} \\ 2.)\ \text{aus } s \leq x \text{ für alle } x \in M \text{ folgt } s \leq \gamma. \end{array}$$

Satz 6 $\inf(M) = -\sup(-M)$

Satz 7 *Es gilt:*

$$\Gamma = \sup(M) \Longleftrightarrow \begin{array}{l} 1.)\ x \leq \Gamma \textit{ für alle } x \in M \textit{ und} \\ 2.)\ \textit{zu jedem } \varepsilon > 0 \textit{ gibt es ein } x \in M \textit{ mit } \Gamma - \varepsilon < x. \end{array}$$

Übung: Formuliere den zu Satz 7 analogen Satz für $\inf(M)$.

Bemerkungen *a) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt höchstens ein Supremum*

b) Existiert $\max(M)$*, so gilt* $\max(M) = \sup(M)$.

c) Ist M nach oben (unten) unbeschränkt, so schreibt man auch $\sup(M) = \infty$ ($\inf(M) = -\infty$)*, was das Folgende bedeutet:*

$$\sup(M) = \infty \iff \forall_{k \in \mathbb{R}} \exists_{x \in M} \; k < x$$
$$\inf(M) = -\infty \iff \forall_{k \in \mathbb{R}} \exists_{x \in M} \; x < k$$

Beispiel $M = \{\frac{1}{x} \mid x > 0\}$ *ist nach oben nicht beschränkt.*

4.4.2 Das Vollständigkeitsaxiom

($\underline{\text{V}}$) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum: Es gibt $\Gamma \in \mathbb{R}$ mit $\Gamma = \sup(M)$

Satz 8 *In $\mathbb{Q}$ gilt ($\underline{\text{V}}$) nicht: Die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0$ und $x^2 < 2\}$ ist nichtleer und beschränkt. Es ist* $\sup(M) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

4.5 Eigenschaften von reellwertigen Funktionen

Es sei $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)$ gegeben.

1) f heißt *streng monoton wachsend bzw. fallend* (wir schreiben $f \uparrow$ bzw. $f \downarrow$ (streng)), falls aus $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$

   Folgt aus $x_1 < x_2$ lediglich $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$, so heißt f *monoton wachsend bzw. fallend.*

   Überlegen Sie sich selbst:

   A1) $f \uparrow$ (streng) $\iff -f \downarrow$ (streng)[1]

   A2) $f \uparrow$ (streng) $\iff \forall_{x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2} \; (f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) > 0$
   $\iff \forall_{x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2} \; \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

   A3) $f \uparrow$ (streng) $\Longrightarrow f$ ist injektiv

[1] $-f : I \longrightarrow \mathbb{R}, (-f)(x) := -f(x)$

A4) Es sei f bijektiv. Dann gilt:

$$f \uparrow (\text{streng}) \iff f^{-1} \uparrow (\text{streng})$$

2) Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn die Bildmenge $f(I)$ beschränkt ist, wenn es also Zahlen s_1, s_2 gibt, für die

$$s_1 \leq f(x) \leq s_2 \text{ für alle } x \in I$$

erfüllt ist.

4.6 Einige Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom ($\underline{\text{V}}$), (4.4, 4.4.2 (S. 25))

Satz 9 *$\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.*

Satz 10 (Satz von Archimedes ($\iff$ Satz 9)) *Zu jeder positiven Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$\forall_{\substack{n \geq n_0 \\ n \in \mathbb{N}}} n > x.$$

Satz 11 ($\iff$ Satz 10) *Zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$\forall_{\substack{n \geq n_0 \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Satz 12 *Gilt für reelle Zahlen x, y: $1 < y - x$, so gibt es eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $x < k < y$.*

Satz 13 („Die rationalen Zahlen liegen in $\mathbb{R}$ dicht“) *Zu zwei reellen Zahlen x, y mit $x < y$ gibt es eine rationale Zahl r mit $x < r < y$.*

5 $\mathbb{N}$, Vollständige Induktion (VI), Permutationen, Kombinationen

5.1 Induktive Mengen

$M \subset \mathbb{R}$ heißt *induktive Menge*, falls

(A) $1 \in M$ und

(B) Aus $x \in M$ folgt $x + 1 \in M$

erfüllt sind.

Bemerkungen *1) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ sind induktive Mengen.*

2) Der Durchschnitt induktiver Mengen ist eine induktive Menge.

Definition (von $\mathbb{N}$) *$\mathbb{N}$ ist der Durchschnitt aller induktiver Teilmengen von $\mathbb{R}$. (Als solcher ist $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$: Es gilt $\mathbb{N} \subset M$ für jede induktive Menge $M \subset \mathbb{R}$.)*

5.2 Induktionssatz

Satz 1 (Induktionssatz) *Für $M \subseteq \mathbb{N}$ seien erfüllt:*

(A): $1 \in M$ und

(B): Aus $n \in M$ folgt $n + 1 \in M$

Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Bemerkung *Verschiebt man den Anfang 1, so erhält man:*

Satz (Variante des Induktionssatzes) *Für $M \subset \mathbb{Z}$ seien erfüllt:*

(A): $n_0 \in M$ und

(B): Aus $n \in M$ *und* $n \geq n_0$ *folgt* $n+1 \in M$

Dann gilt $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} \subset M$.

5.3 Definition durch Induktion

Die Größe $G(n)$ soll für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert werden: Definiere (A) $G(1)$ und definiere (B) $G(n+1)$ unter der Maßgabe, dass $G(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ schon definiert ist. Dann ist gemäß Satz 1 $G(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Beispiele *Es seien* $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$.

1) $\sum_{k=1}^{n} a_k,\ n \in \mathbb{N}.$ *(A)* $\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1$

(B) $\sum_{k=1}^{n+1} a_k := \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$

2) $\prod_{k=1}^{n} a_k,\ n \in \mathbb{N}.$ *(A)* $\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1$

(B) $\prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) a_{n+1}$

Beispiel $a_k = k$: $\prod_{k=1}^{n} k =: n!$ *(„n Fakultät") (Zusatz:* $0! := 1$*)*

5.4 Beweismethode: Vollständige Induktion (VI)

$A(n)$ soll für alle $n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0$ bewiesen werden:

(A) *Induktionsanfang:* Beweise $A(n_0)$.
(B) *Induktionsschluss: Ind.voraussetzung*: $A(n)$ sei für ein $n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0$, bewiesen
Ind.behauptung: Zeige $A(n+1)$.

Dann ist nach der Bemerkung zu Satz 1 $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0$, bewiesen.

Beispiele *1.* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1),\ n \in \mathbb{N}$

2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *sind Zahlen* $x_1, \ldots, x_n$ *gegeben mit:* $\forall_{j \in \{1,2,\ldots,n\}}\ x_j \geq -1$ *und alle* x_j *haben das selbe Vorzeichen. Es gilt dann:*

$$\prod_{j=1}^{n}(1+x_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j$$

3. *Setzt man in 2.* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x \geq -1$, *so erhält man die* Bernoullische Ungleichung*:*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (n \in \mathbb{N})$$

4. **Satz 2 (Die Anzahl der Permutationen aus n Elementen)** *Aus* n *verschiedenen Elementen* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *lassen sich* $n!$ n*-Tupel so bilden, dass in jedem* n*-Tupel jedes der gegebenen Elemente vorkommt. (Es gibt* $n!$ *bijektive Abbildungen von* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *nach* $\{1, 2, \ldots, n\}$*.)*

5. Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ *(„α über k“):* $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} (\alpha - l) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Beachte: $\binom{\alpha}{0} := 1$.

Es gilt:

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}.$$

Speziell für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *hat man:*

$$\binom{n}{k} = 0, \ k > n, \ n, k \in \mathbb{N} \ \textit{und}$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \ n \geq k, \ n, k \in \mathbb{N}$$

insbesondere auch $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.

Satz 3 *Es seien* $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. *Die Anzahl der* k*-elementigen Teilmengen einer* n*-elementigen Menge ist* $\binom{n}{k}$.

6. **Satz 4 (Binomischer Lehrsatz)**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad x, y \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

mit den Spezialfällen:

$$x = -y = 1, \ n \in \mathbb{N}: \qquad 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$x = y = 1, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}: \qquad 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

6 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

6.1 Grundlegende Definitionen

Eine komplexe Zahl wird in der Form $z = x + iy$ dargestellt. Hierbei sind $x, y \in \mathbb{R}$ der Zahl z eindeutig zugeordnet. x heißt *Realteil*, y *Imaginärteil von* z:

$$\mathrm{Re}(z) := x,\ \mathrm{Im}(z) := y.$$

i ist die *imaginäre Einheit*, für die $i^2 = -1$ gilt.

Komplexe Zahlen $z = x + iy$, $w = u + iv$ werden addiert und multipliziert gemäß:

(A) $z + w = (x + u) + i(y + v)$

(M) $zw = xu - yv + i(yu + xv)$

Es gelten alle Regeln aus 4.1.

Das neutrale Element für (A) ist $z = 0 = 0 + i0$ und für (M) $z = 1 = 1 + i0$.

Die Menge der komplexen Zahlen wird durch $\mathbb{C}$ bezeichnet. Es gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$:

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}.$$

Sind $z, w \in \mathbb{R}$, so liefern $(A), (M)$ oben die Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$. (A), (M) sind eine Fortsetzung der Operationen $+, \cdot$ von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$.

$\bar{z} := x - iy$ heißt die *zu z konjugierte komplexe Zahl.*

Es gelten:

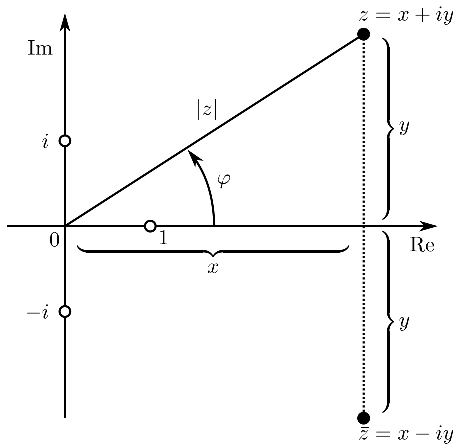
$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \\
\mathrm{Im}(z) &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \\
z\bar{z} &= x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 .
\end{aligned}$$

Satz 1 *a) Mit komplexen Zahlen $z = x + iy$ wird, was (A) und (M) anbelangt, wie mit reellen Zahlen gerechnet, nur wird $i^2 = -1$ berücksichtigt* *b)* $z \longmapsto \bar{z}$ *ist eine bijektive Abbildung von* $\mathbb{C}$ *nach* $\mathbb{C}$*. Es gelten*

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= \bar{z}+\bar{w},\\ \overline{zw} &= \bar{z}\bar{w},\\ z\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow z=\bar{z}\end{aligned}$$

Bemerkung *In* $\mathbb{C}$ *gibt es keine Relation, die den Axiomen O1), O2), O3) aus 4.2 genügt. Es müssten nämlich gleichzeitig* $1 = 1^2 > 0$ *und* $-1 = i^2 > 0$ *gelten*

6.2 Veranschaulichung von z in der komplexen Ebene



Mit $|z|$ wird der Abstand von z zu 0 bezeichnet.

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ heißt *Betrag von z.*

Der Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $y = |z|\sin\varphi$, $x = |z|\cos\varphi$ heißt *das Argument von z* und die hiermit aus $z = x + iy$ resultierende Darstellung für $z \neq 0$:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

heißt die *Polardarstellung von z*. Das Argument von z wird durch $\arg(z)$ bezeichnet.

Beispiele

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2}, \qquad \arg(x) = \begin{cases} 0, & x > 0,\\ \pi, & x < 0\end{cases}, \qquad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}, \qquad \arg(0) \textit{ ist nicht def.}$$

Satz 2 *Jede komplexe Zahl* $z \neq 0$ *kann in der Form* $z = r(\cos\psi + i\sin\psi)$ *dargestellt werden. Hierbei gelten:* $r = |z|$ *und* $\psi = \arg(z) + 2k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$

6.3 Rechnen mit $|\cdot|$ und mit der Polardarstellung

Bemerkung *$|z-w|$ gibt die Länge der Verbindungsstrecke zwischen z und w an.*

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$:

$$\mathrm{U}_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$$

*heißt ε-*Umgebung *von z_0. In $\mathrm{U}_\varepsilon(z_0)$ liegen alle Punkte des Kreises um z_0 mit Radius ε. (siehe auch 4.3, S. 22)*

Satz 3 *Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Es gelten:*

1) $|z| = |\bar{z}|$
2) $|z| \geq 0$ *und* $(|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$
3) $|zw| = |z||w|$
4) $|z \pm w| \leq |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*
5) $|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}(\bar{z}w) + |w|^2$

Satz 4 *$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$ seien komplexe Zahlen, $z \neq 0$, $w \neq 0$. Es gelten:*

1) $z = w \Longleftrightarrow r = \varrho \wedge \varphi = \psi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
2) $\bar{z} = \overline{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$
3) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\frac{\bar{z}}{r} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$
4) $zw = r\varrho(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$
5) $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, $n \in \mathbb{Z}$ *(Formel von Moivre)*

6.4 Die n-te Wurzel aus $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

Satz 5 *Es seien $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Gleichung $z^n = a$ hat genau die n verschiedenen Lösungen*

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Hierbei ist $\alpha = \arg(a)$.

Übung: Gib alle Lösungen z an:

$$z^5 = 1, \ z^3 = -i, \ z^4 = 1 + i, \ z^2 + 2az + b = 0$$

(wobei $a, b \in \mathbb{C}$ gegeben sind)

Bemerkung (Fundamentalsatz der Algebra) *Für jedes Polynom*

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0$$

gibt es Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$*, so dass*

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$$

gilt. ($n \in \mathbb{N}$)

7 Folge, Grenzwert

7.1 Definition (Folge)

Eine *Folge komplexer Zahlen* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C},\ n \longmapsto a_n$. Sie wird durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, durch (a_n), oder durch die Aufzählung der Folgenglieder $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bezeichnet.

Die Folge heißt *beschränkt*, falls es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Eine reelle Folge heißt *monoton (streng monoton) wachsend*, falls $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir schreiben hierfür $(a_n) \uparrow$ ($(a_n) \uparrow$ *(streng)*)

Eine reelle Folge heißt *monoton (streng monoton) fallend* : $(a_n) \downarrow$ ($(a_n) \downarrow$ (streng)) $:\Longleftrightarrow$ $(-a_n) \uparrow$ ($(-a_n) \uparrow$ (streng))

Beispiele (a_n) *mit*

1) $a_n = \frac{1}{n}$

2) $a_n = i^n$

3) $a_n = \frac{n}{n+1}$

4) $a_n = x^n$ *($x \in \mathbb{R}$ oder auch $x \in \mathbb{C}$)*

5) $a_n = \frac{n}{2^n}$

6) a_n *ist durch* $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ *definiert*

Definition (Teilfolge einer Folge) *Es seien (a_n) eine Folge und $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine* streng monoton wachsende *Funktion (Es wird v_j anstelle von $v(j)$ für $j \in \mathbb{N}$ geschrieben). Die Folge (b_j) mit $b_j := a_{v_j}$ heißt* Teilfolge der Folge (a_n)

Beispiele $b_j = a_{2j}$, $b_j = a_{j^2}$ *oder oben Beispiel 2):* $b_k = a_{4k-1} = -i$ $(k \in \mathbb{N})$

Bemerkung *(Übung) Für eine Funktion v wie in vorstehender Definition gilt $v(j) \geq j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.*

7.2 Konvergenz, Divergenz, Häufungspunkte

Definition (Konvergenz) *Die Folge (a_n) heißt* konvergent*, falls eine Zahl $g \in \mathbb{C}$ existiert mit folgender Eigenschaft:*

Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ *gibt es eine Zahl* $N \in \mathbb{N}$ *derart, dass*

$$|a_n - g| < \varepsilon \text{ gilt für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N.$$

g *heißt* Grenzwert (Limes) *der Folge* (a_n). *Hierfür schreiben wir:* $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ *oder* $a_n \to g$ $(n \to \infty)$.

Verwenden wir den Umgebungsbegriff aus Abschnitt 6.3 und 4.3 und die Sprechweise

„alle bis auf endlich viele“ = „fast alle“,

so können wir auch so formulieren:

Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ für fast alle n (nämlich für alle bis auf allenfalls $n = 1, 2, \ldots, N$) $a_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(g)$ gilt.

Definition (Divergenz) *Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt* divergent. *Die Negation der vorherigen Definition gibt:*

Die Folge (a_n) *ist divergent, wenn jedes* $g \in \mathbb{C}$ *eine* ε*-Umgebung besitzt, außerhalb der unendlich viele Folgenglieder liegen.*

Beispiel *Die Folge* (a_n) *mit* $a_n = i^n$, *Beispiel 2)/ 7.1 ist divergent.*

Definition (Häufungspunkt) $H \in \mathbb{C}$ *heißt* Häufungspunkt (HP) der Folge (a_n), *falls für jedes* $\varepsilon > 0$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(H)$ *gilt.*

In 7.1, Beispiel 2) sind $i, 1, -1, -i$ Häufungspunkte der Folge

A1) Ist g Grenzwert der Folge (a_n), so ist g auch HP der Folge (a_n).

A2) $(\lim_{n\to\infty} a_n = g) \iff (g$ ist der einzige HP der Folge $(a_n))$

Folgerung *1) Die Folge* (a_n), $a_n = i^n$ *ist divergent.*

2) Eine Folge mit mehr als einem HP ist divergent.

3) Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

Satz 1 (Bolzano-Weierstrass) *Jede beschränkte Folge besitzt einen HP*

Satz 2 *Es sei* (a_n) *eine Folge. Dann gilt:*

H *ist HP von* $(a_n) \iff$ *es gibt eine Teilfolge* $(a_{n_k})_k$, *die gegen* H *konvergiert.*

Folgerung *Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.*

Die Folge aus 7.1, Beispiel 2) $a_n = i^n$ enthält die konvergenten Teilfolgen:

$$(a_{4k-3})_k,\ (a_{4k-2})_k,\ (a_{4k-1})_k,\ (a_{4k})_k.$$

7.3 Die Beispiele aus 7.1

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Das ist Satz 11, Kap. 4.

2) (a_n) mit $a_n = i^n$. Die Folge hat die vier HP $i, 1, -i, -1$, ist somit divergent.

3) $(a_n),\ a_n = \frac{n}{n+1}$. Wähle $N \in \mathbb{N}, N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Dann gilt $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}, n > N$. Also: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

4) $(a_n),\ a_n = x^n$:

   · $x = 1$: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

   · $x = 0$: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

   · $x = -1$: (a_n) hat die zwei HP $+1, -1$, ist also divergent.

   · $|x| > 1$: Es sei $R > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}, N > \frac{R}{|x|-1}$. Dann gilt für alle $n > N$: $|x|^n > R$.

   Fazit Für $|x| > 1$ ist (x^n) divergent, *da* (x^n) *nicht beschränkt ist.*

   Satz 3 *Eine konvergente Folge ist beschränkt*

   · Es gilt aber für $x > 1$, dass (x^n) in folgendem Sinn „konvergiert“:

   Gilt für die reelle Folge (a_n), dass für jedes R für fast alle n $a_n > R$ erfüllt ist, so schreiben wir: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

   Die Folge (a_n) heißt dann *bestimmt divergent* oder *uneigentlich konvergent gegen* ∞ (Analog: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty :\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}(-a_n) = \infty$)

   Also: Für $x > 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$.

   · Für $x < -1$ liegt Divergenz vor.

   · Für $|x| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

5) $(a_n),\ a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1},\ (n = 2, 3, \ldots)$

   Für $n \geq 2$ gilt $a_n \geq 1$ und für $n \geq 3$ hat man $a_{n+1} - a_n \geq 1$. Hieraus folgt, dass (a_n) unbeschränkt ist und nicht im eigentlichen Sinne konvergiert.

7.4 Rechnen mit konvergenten Folgen

Satz 4 *(a_n), (b_n) seien konvergente reelle Folgen. Für fast alle n sei $a_n \leq b_n$ erfüllt. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Satz 5 (Einschnürungsprinzip) *Für die reellen Folgen (a_n), (b_n), (c_n) sei $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle n erfüllt. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$ folgt, dass die Folge (b_n) konvergent ist mit $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.*

Folgerung *Für die Folge (a_n) gelte $|a_n| \leq b_n$ für fast alle n, wobei (b_n) eine reelle Nullfolge ist. Dann folgt: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Satz 6 *Es seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen: $a_n \to a$, $b_n \to b$. Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind die Folgen*

$$(\lambda a_n),\ (a_n \pm b_n),\ (a_n b_n),\ \left(\frac{a_n}{b_n}\right)\ (b \neq 0),\ (|a_n|),\ (a_n^k)_n\ (k \in \mathbb{N}\ \textit{fest}),\ (\sqrt{a_n})\ (a_n > 0)$$

konvergent mit

$$\lambda a_n \to \lambda a,\ a_n \pm b_n \to a \pm b,\ a_n b_n \to ab,\ \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b},\ |a_n| \to |a|,\ a_n^k \to a^k,\ \sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$$

für $n \to \infty$.

Zu Beispiel 5 aus 7.1:

$(a_n),\ a_n = \frac{n}{2^n}$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Das sieht man etwa so:

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} && \text{(binomischer Lehrsatzsatz, S. 29)} \\ &\geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \\ &= 1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} > \frac{n^2}{2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n}$. Mit $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ und Satz 5 (Einschnürungsprinzip) folgt wegen $0 < \frac{n}{2^n}$ die obige Behauptung.

Noch 2 Beispiele

1) *Die geometrische Reihe:*

   Es sei $q \in \mathbb{C}, |q| < 1$. dann konvergiert (s_n) mit

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$$

   gegen $\frac{1}{1-q}$.

   Man schreibt: $\lim_{n\to\infty} s_n =: \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.

2) *Die harmonische Reihe:*

   $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ existiert nicht. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent, da die Teilfolge (a'_n), $a'_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k}$ von $(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ unbeschränkt ist, also divergent (...; siehe auch Satz 3 oben).

7.5 Monotonie und Konvergenz

Satz 7 (Monotoniekriterium) *Die (reelle) Folge (a_n) sei monoton wachsend und nach oben beschränkt ($(a_n) \downarrow$ und nach unten beschränkt). Dann ist die Folge (a_n) konvergent, es gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *(* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$*).*

Beispiele *1) (a_n), $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. $(a_n) \uparrow$ und $a_n \leq 4$.* $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$.

2) $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Es gilt $(a_n) \uparrow$ und $a_n < 3$. Der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ $(= \lim_{n\to\infty} a_n)$ ist die Eulersche Zahl e.

$$e := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

7.6 Zwei wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \ (c > 0 \text{ fest})$$

7.7 Intervallschachtelung

Satz 8 (Intervallschachtelung) *$(\alpha_n)\uparrow$, $(\beta_n)\downarrow$ seien monotone Zahlenfolgen, die den Bedingungen*

1) $\alpha_n \le \beta_n$ für alle n und

2) $\lim_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$ genügen.

Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_n \le x \le \beta_n$ für alle n. Es gelten

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = x.$$

Bemerkung *I_n bezeichne das Intervall $[\alpha_n, \beta_n]$, $|I_n|$ die Länge von I_n.*

Der Satz 8 sagt aus: Gelten $I_{n+1} \subset I_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$, so hat man

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = \{x\} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = x$$

Satz 9 (Leibnizkriterium) *(Anwendung von Satz 8) Es sei (a_n) eine Folge mit den Eigenschaften*

$$a_n > 0,\ (a_n)\downarrow,\ a_n \to 0\ (n \to \infty).$$

Dann gilt: Die Folge (s_m), $s_m := \sum_{n=0}^{m}(-1)^n a_n$ ist konvergent: $\lim_{m\to\infty} s_m = s =: \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. Weiter hat man:

a) $s_{2k+1} \le s \le s_{2k},\ k = 0, 1, 2, \dots$

b) $|s - s_m| \le a_{m+1},\ m = 0, 1, 2, \dots$

Zur Begründung*: Setze $\alpha_k := s_{2k+1}$, $\beta_k := s_{2k}$. Die Folgen (α_k), (β_k) genügen den Voraussetzung von Satz 8: $\{[\alpha_k, \beta_k] \mid k \in \mathbb{N}\}$ bilden eine Intervallschachtelung, die s festlegt.*

Beispiel *1) Die* alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k+1}$$

ist konvergent.

2) Durch $\alpha_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\beta_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ wird eine Intervallschachtelung $\{[\alpha_n, \beta_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ definiert. Sie bestimmt die Zahl e.

8 Reihen

8.1 Grundlegende Definitionen

Es sei (a_k) eine Zahlenfolge. Wir nennen einen Ausdruck der Form $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine *Reihe* und verstehen darunter zweierlei:

1) die Folge (s_n) der Partialsummen: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und

2) den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$, falls er existiert.

Dieser Grenzwert heißt dann *Wert (Summe) der Reihe*. Existiert $\lim_{n\to\infty} s_n$, so sagen wir: *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent.* Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist *divergent*, falls die Folge (s_n) divergent ist.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty(-\infty)$ bedeutet, dass $s_n \to \infty(-\infty)(n \to \infty)$.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ bedeutet: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = A$.

Satz 1 *Es gelte $a_k \geq 0$ für alle k. Es gilt dann:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \iff (s_n) \text{ ist eine beschränkte Folge.} \quad (\, s_n \leq M \text{ für alle } n)$$

Satz 2 *Aus der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ folgt:*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

Bemerkung *1) Das Konvergenzverhalten einer Reihe ändert sich nicht, wenn man endlich viele Summanden der Reihe ändert.*

2) (Ergebnisse aus dem 7. Kapitel)

- geometrische Reihe: *Für $|z| < 1$ gilt* $\sum_{k=0}^{\infty} = \frac{1}{1-z}$
- harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *ist bestimmt divergent gegen* ∞
- die Zahl e *ist* $e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

- das Leibnizkriterium: *Satz 9, 7.7: die alternierende harmonische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1}$ *ist konvergent.*

8.2 Umordnung. Absolute Konvergenz.

Satz 3 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = B$ *seien konvergente Reihen. Dann ist die Reihe* $\sum_{l=1}^{\infty}(\lambda a_l + \mu b_l)$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$ *konvergent mit dem Wert* $\lambda A + \mu B$

Satz 4 *In einer konvergenten Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}$ *dürfen beliebig Klammern gesetzt werden. Setzt man mit* $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$*:*

$$A_j = a_{k_{j-1}+1} + \ldots + a_{k_j} \ (j = 1, 2, \ldots),$$

so gilt $\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Schon vorhandene Beklammerungen in einer konvergenten Reihe dürfen nur dann weggelassen werden, wenn die entstehende Reihe wieder konvergent ist.

Definition *Es sei* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *eine bijektive Abbildung. Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ *heißt eine* Umordnung *der Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beispiel $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + + - \ldots$ *ist eine Umordnung von* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$.

Definition *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *heißt* absolut konverget, *wenn die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergiert.*

Beispiele *1)* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k^2}$ *ist absolut konvergent.*

2) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}$ *sind konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen*

Satz 5

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist absolut konvergent} \iff \text{jede Umordnung konvergiert und alle Umordnungen haben den Wert } \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

8.3 Konvergenzkriterien

Satz 6 (Majorantenkriterium) *Gegeben sind zwei Zahlenfolgen* (c_n), (a_n) *mit*

1) $0 \leq c_n \leq a_n$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *ist konvergent*

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *konvergent. (* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *ist eine (konvergente) Majorante für* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$*.)*

Satz 7 *(folgt für reelle Reihen aus Satz 6) Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent. (Die Umkehrung ist falsch: oben Beispiel 2)) Es gilt*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Satz 8 (Quotientenkriterium) *(c_n) sei eine Zahlenfolge mit $c_n \geq 0$. Es existiere eine Zahl $\vartheta < 1$ derart, dass*

$$c_{n+1} \leq \vartheta c_n$$

für fast alle n erfüllt ist. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Beispiel *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ absolut konvergent*

Satz 9 (Wurzelkriterium) *Es sei $c_n \geq 0$, und es existiere eine Zahl $\vartheta < 1$ so, dass für fast alle n $\sqrt[n]{c_n} \leq \vartheta$ erfüllt ist. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent.*

Aus $\sqrt[n]{c_n} \geq 1$ für unendlich viele n folgt die Divergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Beispiel *1)* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots$ *. Satz 9 $\Rightarrow$ Konvergenz (Wähle ϑ zwischen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und 1). Mit Satz 8 ist keine Entscheidung möglich bzgl. Konvergenz/ Divergenz.*

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \ldots$ *. Satz 9 $\Rightarrow$ Konvergenz (man kann $\vartheta = \frac{2}{3}$ wählen) Mit Satz 8 erhält man dieses Ergebnis nicht.*

3) Die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ erhält man weder mit Satz 8, noch mit Satz 9. (aber etwa mit Satz 6)

8.4 Das Cauchy-Produkt

Das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ mit } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Satz 10 (Konvergenz des Cauchy-Produkts) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *sei absolut und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *sei konvergent. Dann konvergiert das Cauchy-Produkt und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right)}_{=c_n} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Beispiele *1) Das Cauchy-Produkt der konvergenten Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ *mit sich selbst ist divergent (!?).*

2) $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right)^2 = 4 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{2^n}$

3) $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z+w)^k, \;\; z, w \in \mathbb{C}$

9 Die Exponentialfunktion

9.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Satz 1 *(vgl. Beispiel zu Satz 8 im Kap. 8)*

a) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ absolut konvergent. Die hierdurch definierte Funktion $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ heißt Exponentialfunktion, *sie wird durch* exp *bezeichnet:*

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}, \;\; z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

b) Es gelten:

$$|\exp(z) - 1| \leq |z| \exp(|z|), \;\; z \in \mathbb{C} \tag{2}$$

$$|\exp(z) - 1| \leq 2|z|, \;\; |z| \leq 1 \tag{3}$$

Bemerkung $\exp(1) = e = e^1$, $\exp(0) = 1 = e^0$ *(mit (1) oder (3))*

Satz 2 (Die Funktionalgleichung der exp-Funktion) *(vgl. 8.4 Beispiel 3)*

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w), \quad z, w \in \mathbb{C} \tag{4}$$

Folgerung *1) Für $z \in \mathbb{C}$ gelten*

$$\begin{gathered} \exp(z) \neq 0, \\ (\exp(z))^{-1} = \exp(-z), \end{gathered} \tag{5}$$

2) $\exp(nz) = (\exp(z))^n$, $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ *(mit (4), (5))*

9.2 Die reelle exp-Funktion

Satz 3 *a)* $\exp(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$

b) $\exp \uparrow$ *(streng)*

c) $\exp$ *ist eine unbeschränkte Funktion*

d) $\exp(q) = e^q,\ q \in \mathbb{Q}$ *(Wir schreiben anstelle von* $\exp(z)$ *auch* e^z*)*

e) Für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\lim_{n\to\infty} n^k \exp(-n) = 0$.

9.3 Die trigonometrischen Funktionen sin, cos

1.) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)},\ z \in \mathbb{C}$. Satz 3 d) $\Rightarrow \overline{e^{ix}} = e^{-ix}$ für $x \in \mathbb{R}$. (5) $\Rightarrow |e^{ix}| = 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Satz 4 *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\left(\operatorname{Re}\left(e^{ix}\right)\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)\right)^2 = 1.$$

Bemerkung $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im}(z)},\ z \in \mathbb{C}$

2.)

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + - \ldots \tag{6}$$

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + c \ldots \tag{7}$$

Es gilt: Die Reihen in (6), (7) sind für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent: Der Definitionsbereich von sin und cos ist ganz $\mathbb{C}$. Es gilt (Umordnen der absolut konvergenten Reihe e^{iz}):

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), \quad z \in \mathbb{C} \tag{8}$$

3.) (Folgerungen aus 2.))

1) $\cos(z) = \cos(-z), \quad \cos(0) = 1$
   $\sin(z) = -\sin(-z), \sin(0) = 0$

2) $|\sin(z) - z| \le 2|z|^3,\ |z| \le 1$
   $|\cos(z) - 1| \le 2|z|^2,\ |z| \le 1$

3) ((8) $\Rightarrow$)

$$\left.\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\ \sin(z) &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \end{aligned}\right\}, \ z \in \mathbb{C} \tag{9}$$

$\Rightarrow$

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \ z \in \mathbb{C} \tag{10}$$

Mit (9) und (4) erhält man Additionstheoreme wie etwa

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \\ \cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \end{aligned}$$

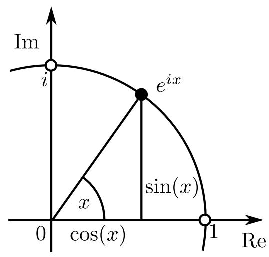
und hiermit

$$\begin{aligned} \cos(z) - \cos(w) &= -2\sin\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2} \\ \sin(z) - \sin(w) &= 2\cos\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2} \end{aligned} \tag{11}$$

4.) Für $x \in \mathbb{R}$ folgt (mit (8)) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, also

$$\operatorname{Re}\left(e^{ix}\right) = \cos(x), \ \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right) = \sin(x).$$

Mit $|e^{ix}| = 1$ ($x \in \mathbb{R}$) findet man $\cos(x)$, $\sin(x)$ am Einheitskreis der komplexen z-Ebene:



10 Stetigkeit

10.1 Definition

Es sei D eine Menge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt *stetig in* $p \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ so gibt, dass aus $x \in D$ und $|x - p| < \delta$ folgt:

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Die Funktion heißt *stetig (auf D)*, wenn sie in jedem Punkt $p \in D$ stetig ist.

Formal sieht das so aus: (Erinnerung $\mathrm{U}_\delta(p)$, 6.3)

$$f \text{ ist stetig in } p \in D \Longleftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in \mathrm{U}_\delta(p)\cap D}{\forall} |f(x) - f(p)| < \varepsilon \tag{1}$$

$\Longrightarrow$

$$f \text{ ist in } p \in D \text{ nicht stetig} \Longleftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{x\in \mathrm{U}_\delta(p)\cap D}{\exists} |f(x) - f(p)| \geq \varepsilon \tag{2}$$

Satz 1 (Stetigkeit = Folgenstetigkeit)

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C} \textit{ ist in } p \in D \textit{ stetig} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \textit{für jede Folge } (x_n),\ x_n \in D \\ \textit{mit } x_n \to p\ (n \to \infty) \\ \textit{gilt } f(x_n) \to f(p)\ (n \to \infty) \end{array}$$

(Es gilt, wenn f in $\lim_{n\to\infty} x_n$ stetig ist: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$.)

zur Begründung:

„$\Rightarrow$“: Hier verwendet man (1)

„$\Leftarrow$“: Hier argumentiert man am besten indirekt mit (2) und $\delta = \frac{1}{n}$ und zugehörigen x_n.

10.2 Beispiele

1) $f(z) = c$ (konst) ist auf $\mathbb{C}$ stetig (δ kann beliebig gewählt werden)

2) $f(z) = z$ ist auf $\mathbb{C}$ stetig (Wähle z.B. $\delta = \varepsilon$)

3) $f(z) = \exp(z)$ ist in $z = 0$ stetig. Verwende 9.1, (3).

   $f(z) = \exp(z)$ ist in $z = p \in \mathbb{C}$ stetig. Verwende Satz 2, Kap 9

4) $f(z) = \sin(z)$ und $f(z) = \cos(z)$ sind in allen $z \in \mathbb{C}$ stetig (Verwende 9.3 3.2) , 9.3 (11))

5) $\text{abs}(z) := |z|$ ist stetig in jedem $z \in \mathbb{C}$

10.3 Zum Rechnen mit stetigen Funktionen

Satz 2 *Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig in $p \in D$. Es gelte $f(p) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit: es gilt $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ mit $|z - p| < \delta$.*

(Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(p)|$ in der ε-δ-Definition der Stetigkeit in p. Mit einem zugehörigen δ gilt dann $|f(z)| > \frac{1}{2}|f(p)|$ für $|z - p| < \delta$.)

Satz 3 *(siehe 7.4/ Satz 6 und hier Satz 1) $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ seien in $p \in D$ stetige Funktionen. Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind die Funktionen $f + g$, fg, λf in p stetig. Ist $g(p) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g} : \{z \in D \mid g(z) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ in p stetig.*

Satz 4 *Es sind $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ und $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(G) \subset D$ gegeben. Ist f in $p \in G$ und g in $f(p)$ stetig, so ist $g \circ f$ in p stetig.*

Beispiele *1) Mit f ist $|f| := \text{abs} \circ f$ stetig*

2) Mit $q(z) = z^2$ sind $\exp \circ q$ und $q \circ \exp$ stetig.

3) Jedes Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ist stetig in allen $z \in \mathbb{C}$.

10.4 Grundlegende Sätze zu Stetigkeit

In diesem Abschnitt ist D stets das abgeschlossene beschränkte Intervall $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$. $\mathrm{C}^0([a, b])$ bezeichnet die Menge der auf $[a, b]$ definierten und auf $[a, b]$ stetigen Funktionen.

Satz 5 (Nullstellensatz von Bolzano) *Für $f \in \mathrm{C}^0([a,b])$ gelte $f(a)f(b) < 0$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$.*

*(*Begründung*: Intervallschachtelung, Bisektionsverfahren)*

Folgerung 1 (Der Zwischenwertsatz) *Für $c \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathrm{C}^0([a,b])$ sei $(f(a)-c)(f(b)-c) < 0$ erfüllt. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = c$.*

(Satz 5 für $f(x) \to f(x) - c$)

Folgerung 2 *Es sei $f \in \mathrm{C}^0([a,b])$ streng monoton wachsend (fallend). Dann ist $f : [a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ ($[a,b] \longrightarrow [f(b), f(a)]$) bijektiv.*

Anwendung *Für $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $x^n = \alpha$ genau eine positive Lösung x_0 ($:= \sqrt[n]{\alpha}$).*

Satz 6 *$f \in \mathrm{C}^0([a,b])$ sei streng monoton wachsend. f^{-1} ist dann auf $[f(a), f(b)]$ stetig und streng monoton wachsend.*

Beispiel *Diskussion von $f(x) = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$) für $x \in \mathbb{R}$ samt Umkehrfunktion (k ungerade)/ Umkehrfunktion*en *(k gerade)*

Satz 7 *Es sei $f \in \mathrm{C}^0([a,b])$. Dann ist f beschränkt: Es gibt eine Zahl $k > 0$ mit*

$$|f(x)| \leq k \text{ für } a \leq x \leq b.$$

Weiter gibt es $x_0, x_1 \in [a,b]$ mit

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \text{ für } a \leq x \leq b.$$

($f(x_0) = \min\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$, $f(x_1) = \max\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$)

Der Satz ist falsch in offenen, halboffenen oder unbeschränkten Intervallen.

10.5 Stetige Fortsetzung

Es sei f auf $D\backslash\{p\}$ stetig. Für jede Folge (x_n), $x_n \in D$ mit $x_n \to p$ gelte $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. (Hierfür haben wir schon geschrieben: $\lim_{x\to p} f(x) = A$) Es sei $A \neq f(p)$. Dann ist f in p unstetig. Die Funktion

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } g(x) := \begin{cases} f(x), & x \neq p, \\ A, & x = p \end{cases}$$

ist stetig auf D und stimmt auf $D \setminus \{p\}$ mit f überein. g heißt *stetige Fortsetzung von f auf D*. Die Unstetigkeit von f in p ist *hebbar*.

Beispiele *1)* $f(x) = \frac{x+x^3}{x},\ x \neq 0$*:* $g(x) = 1 + x^2$

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1},\ x \neq 1, x > 0$*:* $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

3) $f(x) = \frac{|x|}{x},\ x \neq 0$*:* f *lässt sich nicht stetig nach* 0 *fortsetzen.*

11 Potenzreihen

11.1 Grundlegende Definitionen

(a_n) sei eine Zahlenfolge. Der Ausdruck $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ heißt*Potenzreihe um* z_0.

Beispiele

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(= \frac{1}{1-z}\right), \quad (z_0 = 0)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z-1)^k \left(= \exp(z-1)\right), \quad (z_0 = 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}(z-z_0)^{2k+1} \left(= \sin(z)\cos(z_0) - \cos(z)\sin(z_0)\right)$$

Mittels der Substitution $z \longrightarrow \zeta := z - z_0$ kann z_0 zu Null transformiert werden, so dass wir o.B.d.A. [1]

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \lim_{n\to\infty} p_n(z) \tag{P}$$

mit $p_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ untersuchen.

Satz 1 *a) Es sei $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$ konvergent ist, dann sind die folgenden Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w|$ absolut konvergent:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \ \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, \ \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}, \ \ldots$$

b) Ist (P) für $z = \zeta$ divergent, so ist (P) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > |\zeta|$ divergent.

Beispiel $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} z^k$ *ist abolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.*

[1] o.B.d.A. = ohne Beschränkung der Allgemeinheit, d.h. wir betrachten zunächst nur einen (einfacheren) Spezialfall, auf den man jedoch den allgemeinen Fall zurückführen kann.

11.2 Der Konvergenzradius. Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe

$$R := \sup\{|z - z_0| \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \text{ ist konvergent }\}$$

heißt *Konvergenzradius* der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$.

Es gelten (Umformulierung von Satz 1 und Def von R): Für $|z - z_0| < R$ ist die Reihe absolut konvergent, für $|z - z_0| > R$ liegt Divergenz vor. Ob die Reihe für z mit $|z - z_0| = R$ konvergiert, muss extra untersucht werden.

Bemerkungen, Beispiele *1) Im Fall $R = \infty$ liegt für jedes z absolute Konvergenz vor, im Fall $R = 0$ nur für $z = z_0$.*

2) Der Konvergenzbereich ist im Komplexen der Kreis $\{z \mid |z - z_0| < R\}$, im Reellen das Intervall $\{x \mid |x - x_0| < R\} = \{x \mid x_0 - R < x < x_0 + R\} = (x_0 - R, x_0 + R)$

3) $\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k,\ R = 0$

4) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)},\ R = \infty$

5) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}, \sum_{1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2},\ R = 1$. *Das Verhalten für $|z| = 1$ ist unterschiedlich.*

Satz 2 *Es liegt (P): $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$ vor. Es gilt*

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

(wobei $R = \infty$ zugelassen ist), falls der lim existiert.

Bemerkung *Dies ist eine einfache Anwendung des Quotientenkriteriums. Wendet man analog das Wurzelkriterium an, so erhält man: Existiert $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \alpha$, so ist $R = \frac{1}{\alpha}$ (mit $R = 0$ für $\alpha = \infty$ und $R = \infty$ für $\alpha = 0$).*

Beispiele *1)* $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k+2}}{\sqrt{k-1}}(z - z_0)^k,\ R = \frac{1}{4}$

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} z^k,\ R = 2$

11.3 Der Identitätssatz

Satz 3 *R sei der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Für z mit $|z| < R$ wird dann durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ die Funktion p:*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \ |z| < R$$

definiert. p ist in jedem z mit $|z| < R$ stetig.

Satz 4 (Identitätssatz) *Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für $|z| < R$ gegeben. Es existiere eine Folge (z_j) mit $0 < |z_j| < R$, $\lim_{j\to\infty} z_j = 0$ und $f(z_j) = 0$ für alle j. Dann gelten:*

$$a_k = 0, \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(oder $f = 0$).

Anwendung *1) Aus $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ für $|z| < r$ folgt $c_k = b_k$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (*Koeffizientenvergleich*)*

2) Wird f durch eine Potenzreihe in $|z| < R$ gegeben: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, so folgt aus $f(z) = f(-z)$ (aus $f(z) = -f(-z)$) $a_{2l+1} = 0, \ l = 0, 1, \dots$ ($a_{2l} = 0, \ l = 0, 1, \dots$)

3) Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für $|z| < R$ gegeben. Es sei $a_0 (= f(0)) \neq 0$. Dann erhält man formal eine Potenzreihendarstellung um 0 für $\frac{1}{f(z)}$ so: $\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. Aus

$$1 = f(z) \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l \right) z^k$$

folgen für die b_j die Rekursionsfomeln

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \ b_k = -\frac{1}{a_0} \sum_{l=0}^{k-1} a_{k-l} b_l \ (k = 1, 2, \dots)$$

(Testen Sie das mit $f(z) = e^z, \ f(z) = 1 - z$).

12 Die elementaren Funktionen

12.1

Kümmern Sie sich mit der Literatur und durch die Übungen um die Exponentialfunktion (a^x für $a > 0$) und die Umkehrfunktion ($\log_a(x),\ x > 0\ (a \neq 1)$),

um die Hyperbelfunktionen $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, $\coth(x)$ und deren Umkehrfunktionen (den sog. *Areafunktionen*) – z.B. ist $\operatorname{arsinh}(x)$ (Area-Sinus-Hyperbolicus) die Auflösung der Gleichung

$$\sinh(y) = x = \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right)$$

nach y

und um die trigonometrischen Funktionen sin, cos, tan, cot und deren Umkehrungen (arcsin, arccos, ..., die *Arcusfunktionen*). Z.B. ist der Sinus auf dem Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ injektiv, also zu einem arcsin umkehrbar:

$$y = \arcsin(x),\ -1 \leq x \leq 1 \Longleftrightarrow x = \sin y,\ \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{3\pi}{2}$$

12.2 Die Zahl π

Satz 1 $y = \cos(x)$ *hat im Intervall* $(0, 2)$ *genau eine Nullstelle* x_0.

Definition $\pi := 2x_0$

zur Begründung: Es gilt $\cos 2 < -\frac{1}{3} < 0$ (Satz 9, S. 40). Wegen $\cos(0) = 1 > 0$ und da cos auf $[0, 2]$ stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz in $(0, 2)$ eine Nullstelle des Cosinus. Dass es nur eine gibt, folgt aus der strengen Monotonie des cos im Intervall $[0, 2]$. Die erhält man mit $\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_1+x_2}{2} \sin \frac{x_2-x_1}{2}$ (9.3, (11)) und mit $\sin(x) \geq \frac{x}{3},\ 0 \leq x \leq 2$ (Satz 9, S. 40).

Folgerungen

$\sin\frac{\pi}{2} = 1,$ $\cos k\pi = (-1)^k \ (k \in \mathbb{Z}),$

$e^{i\pi k} = (-1)^k \ (k \in \mathbb{Z}),$ $\sin\frac{\pi}{2}(2k+1) = (-1)^k \ (k \in \mathbb{Z}).$

$e^{i\frac{\pi}{2}(2k+1)} = i(-1)^k \ (k \in \mathbb{Z}),$

Satz 2 *1)* $e^{z+2\pi i} = e^z, \ z \in \mathbb{C}$

2) sin, cos *sind* 2π*-periodisch*

Satz 3 *(Begründen Sie selbst)*

$$e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2k\pi i \ (k \in \mathbb{Z})$$

Übung: Verwenden Sie Satz 3, um alle Nullstellen der komplexen Funktionen sin, cos, sinh, cosh zu berechnen, also die Gleichungen

$$\sin(z) = 0, \ \cos(z) = 0, \ \sinh(z) = 0, \ \cosh(z) = 0$$

zu lösen.

13 Grundlagen der Differential- (DR) und Integralrechnung (IR)

13.1 Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für eine auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a,b]$ definierte beschränkte Funktion f.

Eine *Zerlegung* Z *von* $[a,b]$ ist eine Punktmenge $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit

$$a = x_0,\ x_j < x_{j+1},\ x_n = b.$$

Beispiele *1)* $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a),\ k = 0, 1, \ldots, n$

2) $(0 < a < b)$*:* $x_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n$

$\|Z\| := \max\{x_k - x_{k-1} \mid k = 1, \ldots, n\}$ heißt *Feinheit* der Zerlegung Z.

Bezeichne mit I_k das k-te Teilintervall von Z:

$$I_k = \{x \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Setze:

$$m_k := \inf\{f(x) \mid x \in I_k\}, \quad M_k := \sup\{f(x) \mid x \in I_k\}, \quad \xi_k \in I_k.$$

Die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\omega(f,Z) &:= \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),\\
\sigma(f,Z) &:= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),\\
\Omega(f,Z) &:= \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})
\end{aligned}$$

heißen *Riemannsche Unter-/ Zwischen-/ Obersumme zur Zerlegung* Z. Es gilt

$$\omega(f,Z) \leq \sigma(f,Z) \leq \Omega(f,Z).$$

Für zwei Zerlegungen $Z, \tilde{Z}$ gilt stets

$$\omega(f, Z) \leq \Omega(f, \tilde{Z}).$$

Gilt für Zerlegungen Z, Z': $Z \subset Z'$, so heißt Z' Verfeinerung von Z. Es gilt dann:

$$\omega(f, Z) \leq \omega(f, Z') \leq \Omega(f, Z') \leq \Omega(f, Z).$$

Definition *Existiert $s \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, dass aus $\|Z\| < \delta$ bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkte ξ_k*

$$|\sigma(f, Z) - s| < \varepsilon$$

folgt, so schreiben wir $s = \lim_{\|Z\| \to 0} \sigma(f, Z)$. Dieser Grenzwert wird durch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnet und das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ *genannt. Die Menge aller über $[a, b]$ integrierbaren beschränkter Funktionen f wird durch $\mathrm{I}[a, b]$ bezeichnet.*

Es gilt

$$f \in \mathrm{I}[a, b] \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es eine} \\ \text{Zerlegung } Z \text{ von } [a, b] \text{ derart, dass} \\ \Omega(f, Z) - \omega(f, Z) < \varepsilon \text{ gilt.} \end{array}$$

Beispiele, Bemerkungen *1) $[a, b] = [0, 1]$. Für*

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

gilt für jede Zerlegung Z von $[0, 1]$: $w(f, Z) = 0$, $\Omega(f, Z) = 1$, so dass $f \notin \mathrm{I}[0, 1]$.

2) Für

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq c, \\ 1, & x = c \end{cases} \quad (c \in [a, b]),\ x \in [a, b],$$

gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Für jede Zerlegung Z gilt $w(f, Z) = 0$, $0 < \Omega(f, Z) \leq 2\|Z\|$.

3)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq c, \\ 0, & x = c \end{cases} \quad a \leq x \leq b,\ c \in [a, b].$$

Es gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = b - a$. Für jede Zerlegung Z gelten $\Omega(f, Z) = b - a$, $\omega(f, Z) \geq b - a - 2\|Z|$, also $\Omega(f, Z) - \omega(f, Z) \leq 2\|Z\|$.

4) Für $f \in \mathrm{I}[a, b]$ und $f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$ wird der Flächeninhalt *$I(G)$ von $G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ durch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ definiert.*

Satz 1 (Stetige Funktionen sind integrierbar) *a)* $\mathrm{C}^0[a,b] \subset \mathrm{I}[a,b]$

b) Ist f auf $[a,b]$ monoton und beschränkt, so gilt $f \in \mathrm{I}[a,b]$.

Satz 2 *Für $f \in \mathrm{I}[a,b]$ gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Satz 3 *Für $f \in \mathrm{I}[a,b]$ mit $0 < a < b$ und $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} a(q-1) \sum_{k=1}^{n} f\left(aq^{k-1}\right) q^{k-1}$$

(Zu Satz 2,3 vergleiche Beispiele 1,2) zu Beginn dieses Abschnitts 13.1)

Beispiele (zu Satz 2)

$$\begin{aligned} &f(x) = c \ (\mathit{konst}),\ \ a \le x \le b \\ &f(x) = x \\ &f(x) = e^{cx} \ (c \ \mathit{konst}, \neq 0) \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{aligned}$$

Beispiele (zu Satz 3)

$$\begin{aligned} &f(x) = x^p \ (p \in \mathbb{N}) \\ &f(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

13.2 Eigenschaften von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(I) (Vereinbarung):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$$

(II) $f, g \in \mathrm{I}[a,b]$, $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$: Dann gilt $\lambda f + \varrho g \in \mathrm{I}[a,b]$ und

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \varrho g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varrho \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(Linearität des Integrals)}$$

Beispiele *FÜr* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *wird definiert:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (\mathrm{Re}f)\,(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b (\mathrm{Im}f)\,(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hiermit:

$$\int_a^b \cos x\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\,\mathrm{d}x = \sin b - \sin a,$$
$$\int_a^b \sin x\,\mathrm{d}x = \cos a - \cos b$$

(III) Für $f \in \mathrm{I}[a,b]$ und $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(IV) Aus $f, g \in \mathrm{I}[a,b]$ und $f(x) \le g(x),\ a \le x \le b$, folgt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(V) Aus $f \in \mathrm{I}[a,b]$ folgt $|f| \in \mathrm{I}[a,b]$. Für $f \in \mathrm{C}^0[a,b]$ hat man

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \|f\|_\infty |b-a|.$$ [1]

Satz 4 *Es seien* $f_1, f_2 \in \mathrm{C}^0[a,b]$ *mit* $f_1(x) \le f_2(x),\ a \le x \le b$.

$$G := \{(x,y) \mid f_1(x) \le y \le f_2(x),\ a \le x \le b\}.$$

Es gilt $I(G) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x$.

13.3 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung (MWSIR)

Satz 5 (MWSIR) $f, g \in \mathrm{C}^0[a,b],\ f(x) \ge 0$ *für* $a \le x \le b$. *Es gilt: Es gibt ein* $\xi \in (a,b)$ *mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(\xi)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[1] Für eine (reell- oder komplexwertige) Funktion f, die auf einer Teilmenge D von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ definiert ist, setzt man $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$.

Bemerkungen *1) Es genügt vorauszusetzen, dass $f(x)$ in $[a,b]$ das Vorzeichen nicht wechselt. (Begründung?)*

2) Jedes $\xi \in (a,b)$ hat die Form $a + \vartheta(b-a)$ mit einer Zahl $\vartheta \in (0,1)$.

3) Der Fall $f = 1$:

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = g(\xi)(b-a)$$

wird häufig als Mittelwertsatz bezeichnet und Satz 5 oben als „verallgemeinerter Mittelwertsatz".

13.4 Die Ableitung

1) $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *in $x_0 \in I$ diffbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) \left(= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *die erste Ableitung von f in x_0*. Er wird durch $(Df)(x_0)$ oder $f'(x_0)$ bezeichnet. f heißt auf I *differenzierbar (diff'bar)*, wenn f in jedem $x \in I$ diff'bar ist. In diesem Fall wird die Funktion $x \longmapsto f'(x) : I \longrightarrow \mathbb{C}$ durch f' bezeichnet.

f ist auf I *j-mal diff'bar* ($j \in \mathbb{N}$), falls $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(j)}(x)$ für jedes $x \in I$ existieren. Hierbei ist

$$f^{(j)}(x) := \left(f^{(j-1)}\right)'(x) \ (j = 1, 2, \ldots).$$

Die Existenz von $f'(x_0)$ bedeutet, dass der Graph von f in $(x_0, f(x_0))$ eine Tangente t_{f,x_0} besitzt mit der Steigung $f'(x_0)$:

$$t_{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \ x \in \mathbb{R}.$$

$f'(x_0)$ ist die *Steigung der Kurve $y = f(x)$* in $(x_0, f(x_0)$.

2) **Satz 6 (Umformulierung obiger Definition)** *a) Ist f auf $(a,b) = I$ definiert und in $x_0 \in I$ diff'bar, dann gibt es eine in x_0 stetige Funktion f^*, für die*

$$f(x) - f(x_0) = f^*(x)(x - x_0), \ x \in I, \tag{6.1}$$

erfüllt ist. Es gilt $f^*(x_0) = f'(x_0)$.

b) Gibt es eine in x_0 stetige Funktion f^*, die (6.1) erfüllt, dann ist f in x_0 diff'bar mit $f'(x_0) = f^*(x_0)$.

Bemerkungen, Beispiele *1.) Ist f in x_0 diff'bar, so ist f in x_0 stetig.*

2.) $f(x) = |x|$ ist in 0 stetig, in 0 aber nicht diff'bar.

3.) $f(x) = x^n$, $n = 1, 2$: $f'(x) = nx^{n-1}$

4.) $f(x) = e^{cx}$ $(c \in \mathbb{C},$ konst$)$, $f'(x) = ce^{cx}$

13.5 Ableitungsregeln

Satz 7 *$f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$ seien in $x_0 \in (a, b)$ diffbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann sind $\alpha f + \beta g$, fg und, falls $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ in x_0 diff'bar, und man hat:*

(1) $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

(2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$

mit dem Spezialfall: $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Beispiele *zu (1): $f(x) = \cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{ix}\right)$. Mit Beispiel 4.) oben sieht man:*

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ \ldots$$

zu (2): Mit Beispiel 3.) oben als Induktionsanfang sieht man für $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

mittels vollständiger Induktion.

zu (3): Es gilt $f(x) = x^n$: $f'(x) = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Satz 8 (Kettenregel) *Es seien f auf $I = (a, b)$ und g auf $f(I)$ definiert. Es sei $x_0 \in I$ derart, dass $f(x_0)$ innerer Punkt von $f(I)$ ist. Ist f in x_0 und g in $f(x_0)$ diff'bar, so ist $g \circ f$ in x_0 diff'bar mit*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beispiele

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist in jedem $x \in \mathbb{R}$ diffbar:

$$h'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

h' ist in 0 unstetig.

Definition *$n \in \mathbb{N}$: $h \in \mathrm{C}^n(I)$ (n-mal auf I stetig diff'bar) $:\Longleftrightarrow h^{(j)},\ j = 0, 1, \ldots, n$ existieren und sind auf I stetig.*

$$\mathrm{C}^\infty(I) := \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathrm{C}^n(I).$$

Beispiele *$f(x) = e^x,\ \cos x,\ \sin x,\ \sinh x,\ \ldots$ sind aus $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.*

Satz 9 (Ableitung der Umkehrfunktion) *$x = f(y)$ sei für $y \in I$ definiert, stetig, bijektiv und in $y_0 \in I$ diff'bar mit $f'(y_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $g : f(I) \longrightarrow I,\ y = g(x)$, in $x_0 = f(y_0)$ diff'bar mit*

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))} \qquad \left(g'(f(y_0)) = \frac{1}{f'(y_0)} \right).$$

Beispiele *1) $f(x) = \ln x$ $(x \neq 0)$: $f'(x) = \frac{1}{x}$*

2) Es sei f diffbar auf I und $f(x) \neq 0,\ x \in I$. Für

$$h(x) := \ln |f(x)|$$

gilt:

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (x \in I).$$

3) $h(x) = |x|^\alpha$ $(x \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$. $h'(x) = \operatorname{sign}(x)\alpha|x|^{\alpha-1}$.[2]

$\alpha = \frac{1}{2},\ x > 0$: $h(x) = \sqrt{x},\ h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

13.6 Extremwerte. MWSDR (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Definition *$I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$*

---

[2] $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

a) *ein* lokales Maximum*, falls es eine Umgebung*[3] $U \subset I$ *von* x_0 *gibt mit*

$$f(x) \leq f(x_0) \ \forall x \in U$$

b) *ein* Maximum*, falls*

$$f(x) \leq f(x_0) \ \forall x \in I$$

gilt

c) *ein* (lokales) Minimum*, falls* $-f$ *in* x_0 *ein (lokales) Maximum hat.*

d) *Ein Maximum oder Minimum ist ein* Extremwert *von* f

Satz 10 $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *habe in* $x_0 \in (a,b)$ *einen lokalen Extremwert und sei in* x_0 *diff'bar. Dann gilt:*

$$f'(x_0) = 0.$$

Bemerkung 1) *Um ein Max. oder Min. einer Funktion* f *auf* $[a,b]$ *zu bestimmen, sind drei Arten von Punkten zu betrachten:*

(1) *Die Punkte* $x \in (a,b)$ *mit* $f'(x) = 0$.

(2) *Die Randpunkte* a *und* b.

(3) *Die Punkte* $x \in (a,b)$, *in denen* f *nicht differenzierbar ist.*

2) *Die Umkehrung von Satz 10 ist i.A. falsch: Für* $f(x) = x^3$ *auf* $-1 \leq x \leq 1$ *gilt* $f'(0) = 0$. f *hat in* 0 *aber weder ein lokales Maximum, noch ein lokales Minimum.*

Satz 11 (von Rolle) *Es sei* f *auf* $[a,b]$ *stetig und auf* (a,b) *diff'bar. Es gelte* $f(a) = f(b)$. *Dann gibt es ein* $\xi \in (a,b)$ *mit*

$$f'(\xi) = 0.$$

Satz 12 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung, MWSDR) g, f *seien auf* $[a,b]$ *stetig und auf* (a,b) *diff'bar. Dann gibt es eine Zahl* $\vartheta \in (0,1)$ *mit*

$$(f(b) - f(a))\, g'(a + \vartheta(b-a)) = (g(b) - g(a))\, f'(a + \vartheta(b-a))\,.$$

Satz 13 (MSWSDR mit $g(x) = x$) f *sei auf* $[a,b]$ *stetig und auf* (a,b) *diffbar. Dann gibt es ein* $\xi \in (a,b)$ *mit*

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a).$$

Bemerkung *Es seien* x *und* $x+h \in [a,b]$. *Dann gilt mit einem* ξ *zwischen* x *und* $x+h$:

$$f(x+h) = f(x) + f'(\xi)h.$$

[3] Eine Teilmenge U von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt Umgebung eines Punktes x_0, falls es eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt mit $U = U_\varepsilon(x_0)$ (im Sinne von 4.3 oder 6.3)

Folgerung: Satz 14 *Es sei f auf dem Intervall I definiert und dort diff'bar. Es gelten:*

a) $f' > 0$ *auf* $I \Longrightarrow f \uparrow$ *(streng)*
$f' < 0$ *auf* $I \Longrightarrow f \downarrow$ *(streng)*

b) $f' \geq 0$ *auf* $I \Longleftrightarrow f \uparrow$
$f' \leq 0$ *auf* $I \Longleftrightarrow f \downarrow$

c) $f' = 0$ *auf* $I \Longleftrightarrow f = const$ *auf* I.

Beispiele *1)* f, g *seien auf* $[a, b]$ *diff'bar. Aus* $f'(x) \leq g'(x),\ a \leq x \leq b$ *folgt:*

$$f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a),\ a \leq x \leq b.$$

2) Es sei $c \in \mathbb{C}$ *gegeben. Jede diff'bare Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, *die*

$$f'(x) = cf(x),\ x \in \mathbb{R},$$

erfüllt, hat die Form $f(x) = \alpha e^{cx},\ x \in \mathbb{R}$ *mit einer Konstanten* $\alpha \in \mathbb{C}$.

13.7 Der Hauptsatz der Differential-Integralrechnung

I sei Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion von f*, wenn F auf I diff'bar ist und auf I die Gleichung

$$F' = f$$

erfüllt.

Satz 15 (Hauptsatz) *Es seien* $f \in \mathrm{C}^0[a, b]$ *und* $c \in [a, b]$. *Dann gelten:*

1) $F_c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ F_c(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *ist Stammfunktion von* f.

2) Ist F *eine Stammfunktion von* f, *so gibt es eine Konstante* k *mit* $F(x) = F_c(x) + k,\ x \in [a, b]$.

3) Ist F *Stammfunktion von* f, *so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \ \left(=: F(x)|_{x=a}^b\right).$$

$\{F : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid F$ ist Stammfunktion von $f\} = \{F_c + k \mid k$ ist beliebige Konstante$\}$ heißt das unbestimmte Integral von f, was häufig durch $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnet wird. Wir schreiben hierfür $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

13.8 Integrationsregeln (Partielle Integration. Substitutionsregel)

Wegen

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) \Longleftrightarrow F'(x) = f(x)$$

erhält man aus jeder Ableitungsregel eine Integrationsregel:

Satz 16 (Partielle Integration) *($\Leftarrow$ Produktregel) Es seien $u, v \in \mathrm{C}^1[a,b]$. Es gilt:*

$$\int_a^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \left. u(t)v(t)\right|_{t=a}^{x} - \int_a^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t,\ \ a \le x \le b$$

Beispiel

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) - af(a) - \int_a^x tf'(t)\,\mathrm{d}t$$

hierzu

$$\int_a^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right) - \underbrace{\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1-a^2} + \arcsin a\right)}_{+konst}$$

($\int^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)$)

Satz 17 (Substitutionsregel) *($\Leftarrow$ Kettenregel) $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, $g : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ sei stetig diff'bar. Es gilt:*

$$\int_{g(a)}^{g(x)} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_a^x f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t,\ \ a \le x \le b.$$

Beispiele *1)* $\int_a^x \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{g(x)}{g(x)}\right|$, $\int^x \tan(t)\,\mathrm{d}t = -\ln|\cos(x)|$.

2) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau$ *(Substitution: $\tau = \sin t$)* $= \frac{\pi}{2}$

3) $\int^x \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)$

Beispiel $f : [a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ *sei stetig, bijektiv. Es gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = bf(b) - af(a).$$

14 Taylorsatz. Hinreichende Bedingungen für Extremwerte. Taylorreihen.

14.1 Satz von Taylor

Satz 1 (Taylorsatz) *Es sei I ein Intervall und $x, x_0 \in I$. Es sei $f \in \mathrm{C}^{n+1}(I)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

mit

$$R_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

mit einer Zahl ξ zwischen x und x_0.

$T_n(f, x_0)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$ heißt *n-tes Taylorpolynom zu f und x_0.*

14.2 Hinreichende Bedingungen für Extremwerte

Satz 2 *Es sei $f \in \mathrm{C}^{n+1}[a, b]$ und $x_0 \in (a, b)$. Es seien $f^{(j)}(x_0) = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n-1$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ erfüllt. Dann gelten:*

Ist n ungerade, *so besitzt f in x_0 keinen lokalen Extremwert.*

Ist n gerade, *so liegt im Fall* $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \end{cases}$ *in x_0 ein lokales* $\begin{cases} \textit{Minimum} \\ \textit{Maximum} \end{cases}$

14.3 Taylorreihe

Satz 3 *Gegeben ist die Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *mit dem Konvergenzradius* r. $I := \{x \mid |x-x_0| < r\}$. *Die durch*

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \; x \in I,$$

definierte Funktion hat die Eigenschaften:

a) $f \in \mathrm{C}^{\infty}(I)$

b) $f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)\dots(k-j+1)a_k(x-x_0)^{k-j}, \; j = 0, 1, \dots, \; x \in I$

c) $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \; (k = 0, 1, \dots)$

d) $\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}, \; x \in I$

Es sei $f \in \mathrm{C}^{\infty}(I), \; x_0 \in I$. Die Reihe

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k =: T(f, x_0)(x)$$

heißt die *Taylorreihe von* f *um* x_0

Es gilt: Jede Potenzreihe ist die Taylorreihe der durch die Potenzreihe gegebenen Funktion f:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k =: f(x) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = T(f, x_0)$$

Beispiele *1)* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}, \; |x| < 1$. *Es gelten:*

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{(2k)!} D^{2k} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \Big|_{x=0} = (-1)^k \\ \frac{1}{(2k+1)}! D^{2k+1} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \Big|_{x=0} = 0 \end{array}\right. , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2) Die Binomische Reihe *Es sei* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ *ist die Taylorreihe von* $(1+x)^{\alpha}$ *für* $|x| < 1$.

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad (*)$$

Das sieht man so: Für $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ *ist* $I = \{x \mid |x| < 1\}$*. Es gilt*

$$\begin{cases} (1+x)f'(x) = \alpha f(x), & |x| < 1, \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

$\Longrightarrow f(x) = (1+x)^\alpha$*. Für* $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *bricht die Reihe wegen* $\binom{n}{k} = 0$ *für* $k > n$ *ab. (*) ist in diesem Fall der Binomische Lehrsatz (Satz 4) aus 5.4.*

14.4 Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe

die dann die Taylorreihe der Funktion zum gewählten Entwicklungspunkt ist.

Satz 4 *Es sei* $f \in \mathrm{C}^\infty[a,b]$ *und* $x_0 \in (a,b)$*. Dann gilt* $f(x) = T(f,x_0)$ *genau für die* $x \in [a,b]$*, für die* $R_{n+1}(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ *gilt.*

Dies ist z.B. dann der Fall für alle $x \in [a,b]$*, wenn es Konstanten* A, B *so gibt, dass* $\left|f^{(n)}(x)\right| \le AB^n$ *für alle* $x \in [a,b]$ *und alle* n *gilt.*

Soll eine Funktion f um x_0 in eine Potenzreihe entwickelt werden, so kann man für $f \in \mathrm{C}^\infty$ so vorgehen:

1) Berechne $(T(f,x_0))(x)$. Berechne die x, für die $R_{n+1}(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt. Für diese x folgt

$$f(x) = T(f,x_0)(x) \tag{*}$$

Ist $f \in \mathrm{C}^\infty(I)$, so ist der Bereich, für den (*) richtig ist i.A. eine Teilmenge von I.

oder

2) Verwende bekannte Reihen, wie etwa die geometrische oder die Exponential-Reihe.

Beispiele *1) Für*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

gilt: $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(j)}(0) = 0 \ \forall j$*. Also*

$$T(f,0)(x) = 0 \neq e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0.$$

f *ist um* 0 *nicht in eine Potenzreihe entwickelbar.*

2) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \frac{1}{k!} x^{2k+1}$

3) $f(x) = \arctan x$. *Entwickle* $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *in eine Reihe um* 0 *(14.3, Beispiel 1). Bilde* $\int_0^x$ *(der Reihe):*

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \dots$$

4) $f(x) = \ln(1+x)$ *soll um* 0 *entwickelt werden. Man findet leicht:* $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

$$\Longrightarrow\ (T(\ln(1+x), 0))\,(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad (r = 1,\ |x| < 1).$$

Nach Satz 4 gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = \ln(1+x)$ *für die* x *aus* $-1 < x \le 1$, *für die* $R_{n+1}(x) \to 0$ $(n \to \infty)$. *Durch Abschätzen findet man leicht für* $0 \le x \le 1$*:*

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{1}{n+1} \to 0\ (n \to \infty).$$

Durch Differentiation sieht man für $-1 < x < 1$, *dass* $D\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\right) = \frac{1}{1+x}$ *gilt. Also*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = \ln(1+x)$$

für $-1 < x < 1$, *insgesamt also für* $-1 < x \le 1$.

Bemerkung *Es sei* $x_0 > 0$. *Es soll die 200. Ableitung von* $\ln(x)$ *an der Stelle* x_0 *berechnet werden.*

Entwickle $f(x) = \ln(x)$ *um* x_0*:* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Es gilt*

$$a_{200} = \frac{1}{200!} f^{(200)}(x_0).$$

$$\begin{aligned}
\ln(x) = \ln(x_0 + x - x_0) &= \ln x_0 \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) \\
&= \ln(x_0) + \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) \\
&= \ln(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-1)^{k+1} \frac{1}{x_0^k}(x - x_0)^k
\end{aligned}$$

(die letzte Gleichheit folgt aus dem vorhergehenden Beispiel) gültig für $-1 < \frac{x - x_0}{x_0} \le 1 \Longrightarrow 0 < x \le 2x_0$.

15 Unbestimmte Ausdrücke. Die Regeln von de L'Hospital

15.1 Die Ausdrücke $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Satz 1 (de L'Hospital) *Es seien f, g auf (a, b) definierte und auf (a, b) differenzierbare Funktionen. Für $a < x < b$ gelte: $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$. Es seien erfüllt*

1.Fall: $f(x) \longrightarrow 0,\ g(x) \longrightarrow 0$ *für* $x \to b-$

2.Fall: $f(x) \longrightarrow \infty,\ g(x) \longrightarrow \infty$ *für* $x \to b-$

Für beide Fälle gilt:

Existiert $\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L(\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$, *so existiert auch* $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, *und es ist* $l = L$.

Analog für $x \to a+$; $a = -\infty$ *und* $b = +\infty$ *sind zugelassen.*

Bemerkung *Die anderen unbestimmten Ausdrücke*

$$\infty \cdot 0,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

lassen sich auf $\frac{0}{0}$ *(1.Fall oben) und* $\frac{\infty}{\infty}$ *(2.Fall oben) zurückführen.*

Unter $\infty \cdot 0$ *ist gemeint:* $\lim_{x\to b} f(x)g(x)$, *wenn* $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$ *und* $\lim_{x\to b} g(x) = 0$ *gegeben sind. Analog sind die anderen Ausdrücke zu verstehen.*

Beispiele *1)* $(\alpha > 0)$ $\lim_{x\to 0+} x^{(x^\alpha)} = 1$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

4) $\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$

16 Uneigentliche Integrale

16.1 Definitionen

1. Es sei f auf $[a,b)$ definiert $(b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$ und für jedes $\beta \in (a,b)$ über $[a,\beta]$ integrierbar:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\beta \to b-} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$
falls dieser Grenzwert existiert.

2. Es sei f auf $(a,b]$ definiert $(a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ und für jedes $\alpha \in (a,b)$ über $[\alpha,b]$ integrierbar:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$
falls dieser Grenzwert existiert.

3. Es sei f auf (a,b) definiert $(a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ und für alle $\alpha, \beta \in (a,b)$ mit $\alpha < \beta$ über $[\alpha,\beta]$ integrierbar. Es sei $c \in (a,b)$ beliebig. Existieren die Integrale
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \text{ (im Sinne von 2.) und}$$
$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ (im Sinne von 1.),}$$
so wird definiert:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

4. Es sei $a < c < b$, und f sei auf $[a,b] \setminus \{c\}$ definiert. Existieren die Integrale $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ (1.) *und* $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (2.), so wird definiert:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

Existieren oben in (1), (2), (3), (4) die Grenzwerte rechts, so sagen wir:

Das (uneigentliche) Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *existiert* oder *konvergiert*.

Andernfalls heißt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *divergent*.

16.2 Beispiele

1) $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \frac{1}{s-1}, \ s > 1.$

   $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s}$ ist für $s \leq 1$ divergent.

2) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \frac{1}{1-s}, \ s < 1.$

   Für $s \geq 1$ ist $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^s}$ divergent.

3) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s}$ ist für kein $s \in \mathbb{R}$ konvergent

4) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi$

5) $\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ ist divergent

6) $\int_{-1}^{+1} \ln|x|\,\mathrm{d}x = -2$

16.3 Majoranten- Minorantenkriterium. Absolute Konvergenz. Integralkriterium.

Satz 1 *f, g seien für jedes $\beta \in (a,b)$ über $[a,\beta]$ integrabel. Es gelte*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \ x \in [a,b).$$

Dann hat man:

1) *Aus der Konvergenz von $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ folgt die von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

2) *Aus der Divergenz von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ folgt die Divergenz von $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Beispiele *1) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ ist konvergent, da $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ für $x \geq 1$ gilt. (oder da $0 < e^{-x^2} \leq x^{-2}$ für $x \geq 1$ gilt)*

2) Gammafunktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

ist für $x > 0$ konvergent (also definiert).

Denn: *Betrachte*

$$J_1 = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ und } J_2 = \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

J_1 konvergiert wegen $0 \le t^{x-1}e^{-t} \le t^{x-1}$ genau für $x > 0$ nach 16.2 Beispiel 2).

J_2 konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ wegen $0 < t^{x-1}e^{-t} \le k!t^{-2}$ für genügend großes $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung *Es gilt* $\Gamma(n+1) = n!,\ n = 0, 1, \ldots$

Definition *Ist $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergent, so heißt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent.*

Satz 2 *Ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ absolut konvergent, so ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent.*

Aber: Aus der Konvergenz von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ folgt nicht die Konvergenz von $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Beispiel $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ existiert:

Vorbemerkung: $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ existiert, da wegen

$$0 \le \frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ absolut konvergent ist.

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$

Zu $\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$:

$$\int_1^\beta \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \overset{p.I.}{=} -\frac{1}{x}\cos x\Big|_1^\beta - \int_1^\beta \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

also existiert (mit der Vorbemerkung) $\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ konvergiert nicht:

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty \ (n \to \infty).\end{aligned}$$

Satz 3 (Integralkriterium) *Es sei $f \in \mathrm{C}^0[1,\infty)$, $f(x) \geq 0, 1 \leq x < \infty$, f monoton fallend. Dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ ist konvergent} \iff \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ist konvergent.}$$

Das Ergebnis liest man ab aus:

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiele *1) Für $f(t) = \frac{1}{t^s}$, $s > 1$, sind die Vor. von Satz 3 erfüllt und $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ ist konvergent. Somit gilt: $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ ist für $s > 1$ konvergent. Ebenso folgt aus den Ergebnissen für $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$, dass $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ für $s \leq 1$ divergent ist. Aus der Ungleichungskette oben folgt ($n \to \infty$)*

$$\frac{1}{s-1} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} < \frac{s}{s-1} \quad (s > 1)$$

2) Wendet man die Ungleichungen auf $f(t) = \frac{1}{t}$ an, so erhält man:

$$\ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln(n).$$