Höhere Mathematik I
für die Fachrichtung Physik
Wintersemester 2011/12

Peer Christian Kunstmann
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Kaiserstr. 89, 76133 Karlsruhe
e-mail: peer.kunstmann@kit.edu

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

1 Logische Grundlagen

1.1. Aussagen: Eine *Aussage* ist ein Satz, der entweder **wahr (w)** oder **falsch (f)** ist.

Beispiele:

(1) Der Mond ist ein grüner Käse. (f)
(2) 2 ist eine Primzahl. (w)
(3) Gehen sie geradeaus und dann hinten links! (keine Aussage)

Wir werden uns auf **mathematische Aussagen** konzentrieren.

Aussagen bezeichnen wir im folgenden mit A, B, C, ...

1.2. Verknüpfung von Aussagen: Wir erklären die logische Verknüpfung von Aussagen durch sogenannte *Wahrheitstafeln*.

$A \wedge B$ (*logisches "und"*)

$$\begin{array}{r|cccc} A & w & w & f & f \\ B & w & f & w & f \\ \hline A \wedge B & w & f & f & f \end{array}$$

$A \vee B$ (*logisches "oder"*)

$$\begin{array}{r|cccc} A & w & w & f & f \\ B & w & f & w & f \\ \hline A \vee B & w & w & w & f \end{array}$$

Achtung: Das logische "oder" ist nicht exklusiv, dh es ist zugelassen, dass *beide* Aussagen A und B wahr sind.

Negation $\neg A$

$$\begin{array}{r|cc} A & w & f \\ \hline \neg A & f & w \end{array}$$

Man sagt: "non A" oder "nicht A".

Implikation $A \Rightarrow B$

$$\begin{array}{r|cccc} A & w & w & f & f \\ B & w & f & w & f \\ \hline A \Rightarrow B & w & f & w & w \end{array}$$

Man sagt: "wenn A, dann B", "A impliziert B", "aus A folgt B".

Bemerkung: Aus Falschem folgt Beliebiges (*ex falso quodlibet*).

Beispiel: Aus $1 = 2$ folgt: ich bin der Papst. (w)

Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

$$\begin{array}{r|cccc} A & w & w & f & f \\ B & w & f & w & f \\ \hline A \Leftrightarrow B & w & f & f & w \end{array}$$

Man sagt: "A ist äquivalent zu B", "A ist gleichbedeutend mit B", "A genau dann, wenn B", " A dann und nur dann, wenn B".

1.3. Regeln: $\neg$ bindet stärker als $\wedge/\vee$; $\wedge/\vee$ bindet stärker als $\Rightarrow/\Leftrightarrow$.

$$\begin{array}{rcl}
\neg(\neg A) & \Leftrightarrow & A \qquad \text{(doppelte Negation)} \\
(A \Leftrightarrow B) & \Leftrightarrow & [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)] \qquad \text{(Äquivalenz bedeutet zwei Implikationen)} \\
\neg(A \wedge B) & \Leftrightarrow & (\neg A \vee \neg B) \qquad \text{(Negation von “und”)} \\
\neg(A \vee B) & \Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B) \qquad \text{(Negation von “oder”)} \\
(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (\neg A \vee B) \qquad \text{(Umformulierung der Implikation)} \\
\neg(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (A \wedge \neg B) \qquad \text{(Negation der Implikation)} \\
(A \Rightarrow B) & \Leftrightarrow & (\neg B \Rightarrow \neg A) \qquad (\textit{Kontraposition}).
\end{array}$$

Beispiele: Wenn ich nicht der Papst bin, dann ist $1 \neq 2$. (w)

Sei A: “es regnet” und B: “die Straße ist nass”. Dann ist $A \Rightarrow B$ wahr (“wenn es regnet, ist die Straße nass”) und gleichbedeutend (äquivalent) zu $\neg B \Rightarrow\neq A$ (“wenn die Straße trocken (dh nicht nass) ist, dann regnet es nicht”.

Kommutativität: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ und $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

Assoziativität: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ und $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$. Deshalb kann man hier die Klammern weglassen.

Distributivität: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
und $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Tertium non datur: $A \vee \neg A$ (“ein Drittes gibt es nicht”).

1.4. Quantoren: Eine *Aussageform* $A(x)$, $A(x, y)$, ... ist ein Satz, der eine oder mehrere Variablen x, y, ... enthält und der nach dem Ersetzen dieser Variablen durch konkrete Objekte eine Aussage ist.

Beispiel: x ist eine Primzahl.

Der *Allquantor*

$$\forall x : A(x)$$

bedeutet: für alle Objekte x ist die Aussage $A(x)$ wahr.

Der *Existenzquantor*

$$\exists x : A(x)$$

bedeutet: es gibt (mindestens) ein Objekt x, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist.

Negation von Quantoren:

$$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \neg A(x)) \quad \text{und} \quad \neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \neg A(x)).$$

In den allermeisten Fällen werden Quantoren *eingeschränkt* und beziehen sich dann nur auf *gewisse* Objekte, z.B. $\forall x$ mit $A(x)$: $B(x)$. Negation ist dann $\exists x$ mit $A(x)$: $\neg B(x)$.

Beispiel: Alle Primzahlen sind ungerade. (f)
Setzen wir $A(x)$: "x ist Primzahl" und $B(x)$: "x ist ungerade", so haben wir die Aussage $\forall x$ mit $A(x)$: $B(x)$. Deren Negation ist $\exists x$ mit $A(x)$: $\neg B(x)$, also "Es gibt eine Primzahl, die nicht ungerade ist" (w).

Achtung: Bei All- und Existenzquantor kommt es i.a. auf die Reihenfolge an. Betrachtet man für x verheiratete Männer und für y verheiratete Frauen und die Aussageform $A(x, y)$: "x ist verheiratet mit y", so ist $\forall x \, \exists y : A(x, y)$ wahr, aber $\exists x \, \forall y \, : A(x, y)$ ist offensichtlich falsch.

2 Mengen und Relationen

2.1. Der Begriff der Menge: Wir verwenden die folgende naive "Definition":

> "Eine *Menge* ist die Zusammenfassung wohlbestimmter, wohlunterschiedener Objekte der Anschauung oder des Denkens zu einem neuen Ganzen."

Diese Objekte heißen *Elemente* der Menge.

$x \in M$ bedeutet: x ist Element der Menge M, dh x gehört zu M.

$x \notin M$ bedeutet: x gehört nicht zu M, dh $x \notin M :\Leftrightarrow \neg(x \in M)$.

"$x \in M$" ist also eine Aussageform, dh für jede Menge M und jedes x gilt entweder $x \in M$ oder $x \notin M$.

Schreibweisen: Ist $A(x)$ eine Aussageform, so kann man schreiben

$$M = \{x : A(x)\} = \text{Menge aller } x \text{, für die } A(x) \text{ gilt,}$$

also z.B. $N = \{x : x \in N\}$, $P = \{x : x \text{ ist Primzahl}\}$. Häufig schreibt man auch, wenn die Menge M gegeben ist, $\{x \in M : A(x)\}$ für $\{x : x \in M \wedge A(x)\}$.

Eine andere Möglichkeit ist die Aufzählung, etwa $M = \{1, 2, 3, 9\}$.

2.2. Beziehungen zwischen Mengen: Seien M_1, M_2 Mengen.

Definition: $M_1 \subset M_2 :\Leftrightarrow \forall x : (x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2)$ (bzw. $\forall x \in M_1 : x \in M_2$).
"M_1 ist Teilmenge von M_2". Gelegentlich schreibe ich auch $\subseteq$ statt $\subset$. Gleichheit ist bei "$\subset$" *nicht* ausgeschlossen, dh es gilt $M \subset M$ für jede Menge M.

Für $M_1 \subset M_2$ und $M_1 \neq M_2$ schreibe ich der Deutlichkeit halber $M_1 \subsetneqq M_2$.

Gleichheit von Mengen: $M_1 = M_2$ bedeutet, dass M_1 und M_2 dieselben Elemente enthalten, also $\forall x : (x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2)$. Nach 1.3 bedeutet $M_1 = M_2$ also $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_1$.

Beispiele: Wir schreiben $\mathbb{N}$ für die *Menge der natürlichen Zahlen*, also $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade Primzahl}\} = \{2\}$,
$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist Primzahl} \wedge x > 2\} \subset \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ungerade}\}$.

2.3. Operationen mit Mengen: Seien M_1, M_2, M_3 und Q Mengen.

(a) *Durchschnitt* $M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$.

(b) *Vereinigung* $M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$.

Regeln für Durchschnitt und Vereinigung: Wegen 1.3 gelten:

Kommutativität:

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1, \qquad M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1.$$

Assoziativität:

$$M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3, \qquad M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3.$$

Distributivität:

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3), \quad M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3).$$

Außerdem ist $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$, $M_1 \cap M_2 \subseteq M_2$.
(c) *Differenz* $M_1 \setminus M_2 := \{x \in M_1 : x \notin M_2\}$ ("M_1 ohne M_2").

Beispiel: $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist Primzahl}\} \setminus \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ungerade}\} = \{2\}$.

de Morgansche Regeln: Wegen 1.3 (Negation von "und"/"oder") gilt auch

$$Q \setminus (M_1 \cup M_2) = (Q \setminus M_1) \cap (Q \setminus M_2), \qquad Q \setminus (M_1 \cap M_2) = (Q \setminus M_1) \cup (Q \setminus M_2).$$

Ende Mo
17.10.11

2.4. Die leere Menge: Die *leere Menge* $\emptyset$ enthält keine Elemente, dh $\forall x : x \notin \emptyset$.
Regeln: $M \cup \emptyset = M$, $M \setminus \emptyset = M$, $M \cap \emptyset = \emptyset$, $M \setminus M = \emptyset$, $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M.

2.5. Die Potenzmenge: Ist M eine Menge, so heißt die Menge aller Teilmengen von M

$$\mathrm{Pot}(M) := \{N : N \subseteq M\}$$

die *Potenzmenge von* M (wir schreiben auch $\mathfrak{P}(M)$).

Bemerkung: Für jede Menge M gilt: $M \in \mathrm{Pot}(M)$, $\emptyset \in \mathrm{Pot}(M)$, aber auch $\emptyset \subset \mathrm{Pot}(M)$ (vgl. 2.4).

Beispiel: Für $M = \{1, 2\}$ ist $\mathrm{Pot}(M) = \{\,\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\,\}$.

2.6. Das kartesische Produkt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien M_1, M_2, ..., M_n Mengen. Die Menge der geordneten n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_j \in M_j$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ heißt das *kartesische Produkt* $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ der Mengen M_1, M_2, ..., M_n. Also

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_j \in M_j\}.$$

Wir schreiben M^n, falls $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$ gilt.

Beispiele:

(1) $M_1 = \{0,1\}$, $M_2 = \{1,2,3\}$, $M_1 \times M_2 = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$.

(2) $M = \{0,1\}$, $M^3 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

Besonders wichtig ist natürlich der Fall $n = 2$, in dem $M_1 \times M_2$ die Menge aller *geordneten Paare* (x_1, x_2) mit $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ ist.

2.7. Relationen: Seien X, Y Mengen. Eine *Relation* R ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ (R setzt gewisse $x \in X$ mit gewissen $y \in Y$ durch $(x,y) \in R$ "in Beziehung", manchmal schreibt man auch xRy statt $(x,y) \in R$).

Beispiele: Für jede Menge X sind

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_X &:= \{(x,x) : x \in X\} \subseteq X \times X \\ \mathrm{Tm}_X &:= \{(N,M) : N \subseteq M \subseteq X\} \subseteq \mathrm{Pot}(X) \times \mathrm{Pot}(X) \end{aligned}$$

Relationen, nämlich die *Gleichheit in* X bzw. die *Teilmengenbeziehung* oder *Inklusion* in $\mathrm{Pot}(X)$. Beachte, dass man normalerweise $x = y$ statt $(x,y) \in \mathrm{Id}_X$ und $N \subseteq M$ statt $(N,M) \in \mathrm{Tm}_X$ schreibt.

2.8. Ordnungsrelationen: Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt *Ordnungsrelation* oder *Ordnung* auf X, falls R die folgenden Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} R \text{ ist } \textit{reflexiv} &:\Leftrightarrow \forall x \in X : (x,x) \in R, \\ R \text{ ist } \textit{transitiv} &:\Leftrightarrow \forall x,y,z \in X : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R, \\ R \text{ ist } \textit{antisymmetrisch} &:\Leftrightarrow \forall x,y \in X : (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

Beispiele: (1) Tm_X ist eine Ordnung auf $\mathrm{Pot}(X)$.

(2) Die Elemente A, B, C sollen in dieser Reihenfolge "Schere, Stein, Papier" entsprechen. Wir setzen $X := \{A,B,C\}$ und definieren

$$R := \{(x,y) \in X \times X : x \text{ schlägt } y\}.$$

Dann ist R zwar antisymmetrisch, aber R ist nicht reflexiv und nicht transitiv, also keine Ordnung auf X.

2.9. Äquivalenzrelationen: Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt *Äquivalenzrelation* in X, falls R reflexiv, transitiv und *symmetrisch* ist, dh es soll gelten

$$\forall x,y \in X : (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R.$$

Beispiel: (1) Für $X \neq \emptyset$ ist Tm_X nicht symmetrisch, denn $\emptyset \subset X$, aber nicht $X \subset \emptyset$. Also ist Tm_X in diesem Fall keine Äquivalenzrelation.

(2) Id_X ist eine Äquivalenzrelation.

(3) Sei $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen und

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x - y \text{ ist gerade}\},$$

so ist R eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{Z}$.

Ist R eine Äquivalenzrelation in X, so heißt für jedes $x \in X$ die Menge

$$[x]_R := \{y \in X : (x, y) \in R\}$$

die *Äquivalenzklasse von x bzgl. R* und jedes $y \in [x]_R$ heißt ein *Repräsentant* der Klasse $[x]_R$.

Es gilt für alle $x, y \in X$ dann $x \in [x]_R$ (R ist reflexiv) und

$$[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \Rightarrow [x]_R = [y]_R, \qquad [x]_R = [y]_R \Leftrightarrow (x, y) \in R,$$

da R symmetrisch und transitiv ist.

Somit: Jede Äquivalenzrelation in X zerlegt X in Äquivalenzklassen, von denen je zwei verschiedene einen leeren Durchschnitt haben. Man stelle sich das so vor, dass durch eine Äquivalenzrelation mehrere Elemente zu neuen Objekten (den Äquivalenzklassen) zusammengefasst werden, etwa “Bäume” zu “Wäldern”.

Für die Menge der Äquivalenzklassen schreibt man

$$X/R := \{N : \exists x \in X : N = [x]_R\} = \{[x]_R : x \in X\} \qquad (\text{“}X \text{ faktorisiert nach } R\text{”}).$$

Im Beispiel (3) wird $\mathbb{Z}$ durch R zerlegt in die zwei Klassen “gerade ganze Zahlen” und “ungerade ganze Zahlen”, und es ist $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R\}$.

Im Beispiel (2) gilt $[x]_R = \{x\}$ für jedes $x \in X$, dh jede Äquivalenzklasse enthält nur ein Element.

Äquivalenzrelationen schreibt man häufig $\sim$ und dann $x \sim y$ statt $(x, y) \in \sim$.

3 Funktionen

3.1. Zum Begriff der Funktion: Seien X, Y Mengen. Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) $f : X \to Y$ ordnet *jedem* $x \in X$ *genau ein* $y \in Y$ zu. Für das einem gegebenen $x \in X$ zugeordnete $y \in Y$ schreiben wir $f(x)$.

Schreibweise $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ ("f von X nach Y, x wird abgebildet auf $f(x)$").

Beispiel: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto 2 \cdot x - 1$, dann ist etwa $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ etc.

Die Menge $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$ heißt *Graph von* f. Man kann diesen mit der Funktion f identifizieren. Eine Funktion von X nach Y ist also eine Relation $R \subseteq X \times Y$, welche die folgende Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} &\forall x \in X\, \exists y \in Y : (x, y) \in R \\ &\forall x \in X\, \forall y_1, y_2 \in Y : (x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R \Rightarrow y_1 = y_2. \end{aligned}$$

Für eine Funktion $f : X \to Y$ heißt X *Definitionsbereich* und Y *Wertebereich* von f. Für $A \subseteq X$ heißt

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \qquad \textit{Bild von } A \textit{ unter } f,$$

und für $B \subseteq Y$ heißt

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \qquad \textit{Urbild von } B \textit{ unter } f.$$

Insbesondere heißt $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ *Bild von* f (Menge aller $y \in Y$, die von f getroffen werden).

Im Beispiel oben ist

$$f(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ungerade}\}$$

und etwa

$$f^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = f^{-1}(\{1, 3, 5\}) = \{1, 2, 3\}.$$

3.2. Definition: Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

(a) f heißt *surjektiv*, falls $f(X) = Y$ gilt, dh falls jedes $y \in Y$ von f getroffen wird.

(b) f heißt *injektiv*, falls gilt $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, dh falls es zu jedem Element im Bild von f genau ein Urbild gibt.

(c) f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiele: (1) Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv und nicht surjektiv.

(2) Die Funktion $g : \mathbb{N} \to \{0, 1\}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x \text{ ist gerade} \\ 1, & x \text{ ist ungerade} \end{cases}$ ist surjektiv und nicht injektiv.

3.3. Komposition: Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen, so definiert

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

eine Funktion $g \circ f$ ("g nach f"), die *Hintereinanderausführung* oder *Komposition* von f und g.

Satz: Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ Funktionen, so gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

dh die Hintereinanderausführung von Funktionen ist *assoziativ*.

Ende Di 18.10.11

3.4. Die Umkehrabbildung: Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion, so definiert

$$Y \to X, \quad y \mapsto x, \text{ falls } f(x) = y$$

eine Funktion f^{-1}, die *Umkehrabbildung* (oder *Umkehrfunktion*) von f.

Beachte: Da f surjektiv ist, gibt es zu jedem y ein solches x. Da f injektiv ist, ist dieses x eindeutig bestimmt. Somit ist f^{-1} tatsächlich eine Funktion.

Beispiel: Ist $\emptyset \neq X$ eine Menge, so heißt die Funktion $X \to X$, $x \mapsto x$, die *Identität* auf X, geschrieben Id_X oder id_X. Die Funktion id_X ist bijektiv und es ist $(\mathrm{id}_X)^{-1} = \mathrm{id}_X$.

Bemerkung: Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

Denn: Für jedes $x \in X$ gilt $f^{-1}(f(x)) = x$ nach Definition von f^{-1}. Für $y \in Y$ und $x := f^{-1}(y)$ ist $f(x) = y$ (vgl. 3.4), also $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$.

3.5. Satz: Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Funktionen mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, so ist f bijektiv und es gilt $g = f^{-1}$.

Beweis. Die Funktion $g \circ f$ ist injektiv, also ist f injektiv. Die Funktion $f \circ g$ ist surjektiv, also ist f surjektiv. Gezeigt: f ist bijektiv. Nach 3.4 existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$. Noch zu zeigen: $\forall y \in Y : g(y) = f^{-1}(y)$. Sei $y \in Y$. Setze $x := g(y)$. Dann gilt $f(x) = f(g(y)) = y$ nach Voraussetzung und demnach $x = f^{-1}(y)$ nach 3.4. $\square$

Bemerkung: Durch Vertauschen der Rollen von f und g folgt auch $f = g^{-1}$ und insbesondere $(f^{-1})^{-1} = f$.

3.6. Satz: Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektive Funktionen, so ist $g \circ f : X \to Z$ bijektiv, und es gilt:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X.$$

Das ist klar. Die Formel heißt "Hemd-Jacken-Regel".

4 Die reellen Zahlen

Grundmenge der Analysis ist die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen*. Wir führen diese Menge durch 15 *Axiome* ein, dh durch grundlegende Eigenschaften, aus denen sich **alle** weiteren Rechenregeln herleiten lassen. Wir nehmen dann $\mathbb{R}$ als mit diesen Axiomen gegeben an. Eine explizite *Konstruktion* (die natürlich möglich ist!), führen wir hier nicht durch.

4.1. Körperaxiome: Es gibt *Verknüpfungen* $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("plus", wir schreiben $a+b$) und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("mal", wir schreiben ab oder $a \cdot b$) mit

$$\begin{array}{rlrl}
\forall a,b,c \in \mathbb{R} : (a+b)+c = a+(b+c) & (A1) & (ab)c = a(bc) & (A5) \\
\exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a+0 = a & (A2) & \exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a & (A6) \\
\forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R} : a+(-a) = 0 & (A3) & \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1 & (A7) \\
\forall a,b \in \mathbb{R} : a+b = b+a & (A4) & ab = ba & (A8) \\
\forall a,b,c \in \mathbb{R} : a(b+c) = ab+ac & (A9) & &
\end{array}$$

Dabei sind $(A1)$ und $(A5)$ die *Assoziativgesetze*, $(A4)$ und $(A8)$ die *Kommutativgesetze*, und $(A9)$ ist das *Distributivgesetz*.

Schreibweisen: Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzen wir $a - b := a + (-b)$ und, falls $b \neq 0$ ist, $\frac{a}{b} := ab^{-1}$.

Bemerkung: Aus $(A1) - (A9)$ lassen sich alle Rechenregeln bzgl. "+" und "·" herleiten (insbesondere z.B. "Bruchrechnung"). Diese werden von nun an als bekannt vorausgesetzt.

Beispiele: (1) Die Null in $(A2)$ ist eindeutig, ebenso die Eins in $(A6)$.

Beweis. Ist $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$, so folgt wegen $(A2)$ und $(A4)$: $0 = 0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. $\square$

(2) Die Elemente a in $(A3)$ und a^{-1} in $(A7)$ sind eindeutig bestimmt. Außerdem gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$: $-(-a) = a$ und, falls $a \neq 0$ ist, $(a^{-1})^{-1} = a$.

(3) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a \cdot 0 = 0$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$. Nach $(A2)$ und $(A9)$ gilt $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Setzen wir $b := a \cdot 0$, so folgt $0 = b + (-b) = (b + b) + (-b) = b + (b + (-b)) = b + 0 = b$. $\square$

(4) $\forall a \in \mathbb{R}$: $-a = (-1) \cdot a$.

Beweis. Es gilt (nach $(A6)$, $(A9)$, und (3)): $a + a \cdot (-1) = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a \cdot (1 + (-1)) = a \cdot 0 = 0$, also $-a = a \cdot (-1) = (-1) \cdot a$. $\square$

(5) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a^2 = (-a)^2$, wobei $a^2 := a \cdot a$.

Beweis. Es ist, nach (4), $(A5)$, $(A8)$ und (2): $(-a)^2 = (-a)\cdot(-1)\cdot a = (-(-a))\cdot a = a^2$. $\square$

4.2. Anordnungsaxiome: In $\mathbb{R}$ ist eine *Ordnung* "$\leq$" gegeben mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&(A10) && \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ oder } b \leq a,\\
&(A11) && \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } b \leq c \Rightarrow a \leq c,\\
&(A12) && \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } b \leq a \Rightarrow a = b,\\
&(A13) && \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c,\\
&(A14) && \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc.
\end{aligned}$$

Wegen $(A10)$ ist "$\leq$" reflexiv, $(A11)$ ist Transitivität, $(A12)$ ist Antisymmetrie. $(A10)$ bedeutet außerdem, dass die Ordnung "total" ist (dh dass man je zwei Elemente vergleichen kann, was z.B. bei Tm_X nicht der Fall ist, wenn X mindestens zwei Elemente enthält).

$(A13)$ und $(A14)$ bedeuten, dass die Ordnung mit den Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" verträglich ist.

Schreibweisen: $b \geq a :\Leftrightarrow a \leq b$; $a < b :\Leftrightarrow a \leq b$ und $a \neq b$; $b > a :\Leftrightarrow a < b$.

Bemerkung: Aus $(A1) - (A14)$ lassen sich alle Rechenregeln für Ungleichungen herleiten. Diese setzen wir von nun an als bekannt voraus.

Beispiele: (1) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a^2 \geq 0$.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$. Fall 1, $a \geq 0$: Dann gilt $a \cdot a \geq 0 \cdot a$ nach $(A14)$ und somit $a^2 \geq 0$ nach 4.1(3).
Fall 2, $a < 0$: Dann gilt nach $(A13)$: $0 = a + (-a) \leq 0 + (-a) = -a$. Somit ist $(-a)^2 \geq 0$ nach Fall 1. Nach 4.1(5) ist dann $a^2 = (-a)^2 \geq 0$. $\square$

(2) Aus $a \leq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \geq bc$.

Beweis. $c \leq 0 \Rightarrow -c \geq 0$ (siehe Beweis von (1)). Nach $(A14)$ ist dann $a(-c) \leq b(-c)$. Beachtet man $a(-c) = -ac$ und $b(-c) = -bc$ und addiert $ac + bc$ zu der Ungleichung ($(A13)$!), so erhält man $bc \leq ac$. $\square$

Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir setzen:

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} && \text{abgeschlossenes Intervall,}\\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall,}\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} && \text{halboffenes Intervall,}\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} && \text{halboffenes Intervall,}\\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x\},\\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\},\\
(-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \le a\},\\
(-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.
\end{aligned}$$

Weiter: $[a,a] := \{a\}$ und $(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$.

4.3. Der Betrag: Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a & , a \ge 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$ der *Betrag von a*.

Beispiele: $|1| = 1$, da $1 = 1 \cdot 1 \ge 0$ (vgl. 4.2(2)), $|-2| = -(-2) = 2$, da $2 = 1 + 1 \ge 1 + 0 = 1 \ge 0$ und somit $-2 \le 0$.

Beachte: Es gilt $|a| = |-a|$ für alle $a \in \mathbb{R}$, also auch $|a - b| = |b - a|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Anschaulich ist $|a - b|$ der **Abstand** von a und b auf der Zahlengeraden.

Ende Do 20.10.11

Regeln: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $|a| \ge 0$;

(2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

(3) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

(4) $\pm a \le |a|$ und $\Big(|a| \le c \;\Leftrightarrow\; (a \le c \text{ und } -a \le c)\Big)$;

(5) $|a + b| \le |a| + |b|$ *Dreiecksungleichung*;

(6) $||a| - |b|| \le |a - b|$ *umgekehrte Dreiecksungleichung.*

Beweis. (1)-(4) sind leicht. Zu (5): Falls $a + b \ge 0$ ist, so gilt $|a+b| = a+b \le |a|+|b|$ nach (4). Falls $a + b < 0$ ist, so ist $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \le |a| + |b|$ nach (4).

Zu (6): Nach (5) ist $|a| = |a - b + b| \le |a - b| + |b|$ und $|b| = |b - a + a| \le |a - b| + |a|$. Es folgt $|a| - |b| \le |a - b|$ und $|b| - |a| \le |a - b|$. Nach (4) gilt somit $||a| - |b|| \le |a - b|$. □

4.4. Supremum und Infimum: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$.

M heißt *nach oben* [*unten*] *beschränkt* $:\Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}\, \forall x \in M : x \le \gamma$ $[x \ge \gamma]$.

In diesem Fall heißt γ eine *obere Schranke* (OS) [*untere Schranke* (US)] von M.

Eine obere Schranke [untere Schranke] γ von M mit $\gamma \in M$ heißt *Maximum* [*Minimum*] von M und wird mit $\max M$ [$\min M$] bezeichnet.

Wegen ($A12$) sind $\max M$ und $\min M$ im Falle der Existenz *eindeutig bestimmt*.

Beispiele: Jede endliche nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist nach oben und nach unten beschränkt und besitzt Maximum und Minimum. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $|a| = \max\{a, -a\}$.

$[1, 2]$ ist nach oben und nach unten beschränkt, es ist $1 = \min M$ und $2 = \max M$.

$(1, \infty)$ ist nach unten, aber nicht nach oben beschränkt und hat kein Minimum.

Definition: Ist γ obere Schranke [untere Schranke] von M mit $\gamma \leq \tilde{\gamma}$ [$\gamma \geq \tilde{\gamma}$] für **jede** obere Schranke [untere Schranke] $\tilde{\gamma}$ von M, so heißt γ *Supremum* [*Infimum*] von M (**kleinste** obere Schranke von M [**größte** untere Schranke von M]) und wird mit $\sup M$ [$\inf M$] bezeichnet.

Nach ($A12$) sind Supremum und Infimum im Falle der Existenz eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Ein Maximum ist immer auch Supremum, und es gilt $\sup M = \max M$ genau dann, wenn $\sup M \in M$ ist (entsprechend für min und inf).

Beispiele: (1) $M = [1, 2)$. M ist nach unten und nach oben beschränkt. Es ist $1 = \min M = \inf M$, M hat kein Maximum, und es ist $\sup M = 2$.

Beweis. 2 ist obere Schranke von M. Zeige: es gibt keine echt kleinere obere Schranke. Sei $\tilde{\gamma} < 2$. Zeige: $\tilde{\gamma}$ ist nicht obere Schranke von M. Falls $\tilde{\gamma} < 1$ ist, so gilt $\tilde{\gamma} < 1 \in M$, also ist $\tilde{\gamma}$ keine obere Schranke von M. Falls $\tilde{\gamma} \geq 1$ ist, so ist $\tilde{\gamma} < \frac{\tilde{\gamma}+2}{2} \in M$ und $\tilde{\gamma}$ ist keine obere Schranke von M. □

(2) $M = (1, \infty)$: Es ist $1 = \inf M \notin M$ und $\sup M$ existiert nicht.

4.5. Das Vollständigkeitsaxiom:

($A15$) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.

Folgerung: Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$. Setze $-M := \{-x : x \in M\}$.

Vorbemerkung: Dann gilt γ ist untere Schranke von $M \Leftrightarrow -\gamma$ ist obere Schranke von $-M$.

Da $M \neq \emptyset$ untere Schranken hat, ist $-M \neq \emptyset$ nach oben beschränkt, hat also ein Supremum $s := \sup(-M)$. Nach der Vorbemerkung ist $-s$ untere Schranke von M, und für jede untere Schranke $\tilde{\gamma}$ von M ist $-\tilde{\gamma}$ eine obere Schranke von $-M$, also $s \leq -\tilde{\gamma}$, dh $\tilde{\gamma} \leq -s$. Somit ist $-s$ größte untere Schranke von M, dh $-s = \inf M$. □

Definition: Eine Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bemerkung: M beschränkt $\Leftrightarrow \exists \gamma \geq 0 \forall x \in M : |x| \leq \gamma$.

4.6. Satz: Sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) A beschränkt $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$.

(2) A nach oben [nach unten] beschränkt $\Rightarrow$ B nach oben [nach unten] beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ [$\inf B \geq \inf A$].

(3) Sei A nach oben [nach unten] beschränkt und γ eine obere Schranke [untere Schranke] von A. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \gamma = \sup A \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon \\ [\gamma = \inf A \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x < \gamma + \varepsilon]. \end{aligned}$$

Beweis. (1) und (2) sind leicht.

Zu (3): "$\Rightarrow$": Sei $\gamma = \sup A$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $\gamma - \varepsilon$ keine obere Schranke von A.

"$\Leftarrow$" (Kontraposition): Sei $\gamma \neq \sup A =: \tilde{\gamma}$. Dann $\gamma > \tilde{\gamma}$, da γ obere Schranke von A ist, und $\varepsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$. Für jedes $x \in A$ gilt dann $x \leq \tilde{\gamma} = \gamma - \varepsilon$. Wir haben gezeigt: $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in A : x \leq \gamma - \varepsilon$, dh $\neg(\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon)$. $\square$

4.7. Natürliche Zahlen: Idee ist $\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, \ldots\}$.

Definition: $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Induktionsmenge* (*IM*), falls $1 \in A$ und $\forall x \in A : x + 1 \in A$.

Beispiele: $\mathbb{R}$, $[1, \infty)$, $\{1\} \cup [2, \infty)$ sind Induktionsmengen, $\{1\} \cup (2, \infty)$ ist keine Induktionsmenge.

Definition: $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} :$ für jede Induktionsmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt: $x \in A\}$ heißt *Menge der natürlichen Zahlen.*

Einschub: Sind $\emptyset \neq X$ eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$, so setzt man

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{A} \quad &:= \quad \{x \in X : \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\} \quad \text{und, falls } \mathcal{A} \neq \emptyset, \\ \bigcap \mathcal{A} \quad &:= \quad \{x \in X : \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}. \end{aligned}$$

Man schreibt auch $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A$, $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} A$.

Bemerkung: Es ist somit $\mathbb{N} = \bigcap \{A \subseteq \mathbb{R} : \ A \text{ ist Induktionsmenge }\}$.

Satz: (1) $\mathbb{N}$ ist eine Induktionsmenge (somit ist $\mathbb{N}$ die kleinste Induktionsmenge).

(2) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

(3) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

(4) Für jedes $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$.

Beweis. (1) Es ist $1 \in \mathbb{N}$, da $1 \in A$ für jede Induktionsmenge A. Sei $x \in \mathbb{N}$. Zu zeigen: $x+1 \in \mathbb{N}$. Sei dazu $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Induktionsmenge. Dann gilt $x \in \mathbb{N} \subseteq A$ und also $x+1 \in A$ (da A eine Induktionsmenge ist).

(2) **Annahme:** $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Dann existiert $\gamma := \sup \mathbb{N}$. Nach 4.6(3) (für $\varepsilon = 1$) finden wir $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \gamma - 1$. Dann gilt $n + 1 > \gamma$ und $n + 1 \in \mathbb{N}$, dh γ ist nicht obere Schranke von $\mathbb{N}$, Widerspruch.

(3) folgt sofort aus (2).

(4) Sei $b > 0$. Nach (3) gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{b} > 0$. Es folgt $\frac{1}{n} < b$. □

Ende Mo 24.10.11

4.8. Vollständige Induktion:

Satz: Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und ist A eine Induktionsmenge, dann ist $A = \mathbb{N}$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $A \subseteq \mathbb{N}$. Da A Induktionsmenge ist, gilt $\mathbb{N} \subseteq A$. □

Beweisverfahren durch Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte

$$\begin{array}{ll} (IA) & A(1) \\ (IS) & \forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(n+1))\,. \end{array}$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr, dh es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

Beweis. Setze $A := \{n \in \mathbb{N} : A(n)\}$. Nach (IA) gilt $1 \in A$. Sei $n \in A$. Dann gilt $A(n)$ und nach (IS) ist auch $A(n+1)$ wahr, dh $n + 1 \in A$. Somit ist A eine Induktionsmenge und $A = \mathbb{N}$ folgt aus dem Satz. □

Beispiel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\underbrace{n \geq 1}_{=:A(n)}$.

Beweis durch Induktion nach n. Induktionsanfang (IA): Es gilt $1 \geq 1$, dh $A(1)$ ist wahr.

Induktionsschluss (IS): Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $A(n)$, dh es gelte $n \geq 1$ (Induktionsvoraussetzung (IV)). Dann ist $n + 1 \geq 1 + 1$ nach (IV) und $1 + 1 \geq 1 + 0 = 1$ nach 4.2 und 4.1, also $n + 1 \geq 1$ und $A(n+1)$ ist wahr. □

Wir setzen die natürlichen Zahlen ab jetzt als bekannt voraus.

Definition durch Rekursion (bzw. durch Induktion)

Es sei $G(1)$ definiert, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $G(n+1)$ definiert unter der Voraussetzung, dass $G(1)$, $G(2)$, $\dots$, $G(n)$ schon definiert sind.

Dann hat man $G(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Beispiele: (1) *Fakultät*: $1! := 1$ und rekursiv $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, sowie $0! := 1$. Dann ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(2) Summenzeichen $\sum$: Seien $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Setze $\sum_{j=1}^{1} a_j := a_1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{j=1}^{n+1} a_j := (\sum_{j=1}^{n} a_j) + a_{n+1}$. Dann ist $\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die leere Summe ist $\sum_{j=1}^{0} a_j := 0$.

(3) Produktzeichen $\prod$: Seien $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Setze $\prod_{j=1}^{1} a_j := a_1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\prod_{j=1}^{n+1} a_j := (\prod_{j=1}^{n} a_j) \cdot a_{n+1}$. Dann ist $\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Das leere Produkt ist $\prod_{j=1}^{0} a_j := 1$.

(4) Potenzen: Setze für $a \in \mathbb{R}$: $a^0 := 1$, $a^1 := a$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

4.9. Ganze und rationale Zahlen:

Definition: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ *Menge der ganzen Zahlen* und $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ *Menge der rationalen Zahlen.*

Bemerkung: Die Axiome $(A1) - (A14)$ gelten auch in $\mathbb{Q}$. Hingegen hat die nach oben beschränkte Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$, dh das Vollständigkeitsaxiom $(A15)$ gilt **in $\mathbb{Q}$ nicht!**

Bemerkung: Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Minimum.

Satz: Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, so gibt es eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$.

Im Fall $y - x > 1$ gibt es ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $x < p < y$.

Beweis. Für den Zusatz setze $p := \min\{m \in \mathbb{Z} : m > x\}$. Dann gilt $x < p$ und $p - 1 \leq x$, also $p \leq x + 1 < y$.

Zum Beweis des allgemeinen Falles wählt man zunächst $q \in \mathbb{N}$ so, dass $y - x > 1/q$. Dann ist $qy - qx > 1$ und wir finden nach dem Zusatz ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $qx < p < qy$. Es folgt $x < p/q < y$. $\square$

4.10. Binomialkoeffizienten: Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ setzt man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

("n über k").

Etwa: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Lemma: Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n+1-k}{n+1-k} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \frac{k}{k} \\ &= \frac{(n+1-k+k)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

□

4.11. Potenzen: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ haben wir a^n in 4.8(4) definiert. Für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ setzt man $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

Es gelten die bekannten Rechenregeln, also etwa $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ und $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

(1) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

[Übungsaufgabe]

(2) **Binomialsatz:** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Etwa (mit $a = b = 1$): $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Beweis durch Induktion nach n. IA $n = 0$ ist klar.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
(j = k+1) \quad &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]}_{=\binom{n+1}{k}} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□

Ende Di 25.10.11

(3) **Bernoullische Ungleichung** (BU): Sei $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis durch Induktion nach n. IA $n = 1$: $(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (IV). Dann gilt:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

□

(4) **Folgerung:** Sei $a \in \mathbb{R}$.

Ist $a > 1$, so gibt es zu jedem $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > K$.

Ist $a \in (0,1)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n < \varepsilon$.

Beweis. Ist $a > 1$, so finden wir zu $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{K}{a-1}$ und mit (BU) für $x = a - 1$ gilt dann

$$a^n = (1+x)^n \geq 1 + nx = 1 + n(a-1) > 1 + K > K.$$

Ist $a \in (0,1)$, so ist $a^{-1} > 1$ und wir finden zu $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^{-n} > \varepsilon^{-1}$, dh mit $a^n < \varepsilon$. □

(5) Für alle $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x \leq y \Longleftrightarrow x^n \leq y^n.$$

[Übungsaufgabe]

4.12. Wurzeln: Sei $n \in \mathbb{N}$.

Satz: Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$ und $b^n = a$.

Bezeichnung: $b = \sqrt[n]{a}$, "n-te Wurzel aus a".

Bemerkung: Also existiert etwa die reelle Zahl $\sqrt{2}$ (bekannt: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Wir ziehen hier nur Wurzeln aus Zahlen ≥ 0!

Folgerung: Für alle $a, b \geq 0$ gilt:

$$a \leq b \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}.$$

Beweis des Satzes. Der Fall $a = 0$ ist klar. Sei also $a > 0$. Setze $M := \{x \geq 0 : x^n < a\}$. Dann ist M nichtleer, und $a + 1$ ist obere Schranke von M: Sei $x \geq 0$ mit $x^n < a$. Dann ist $x \leq a + 1$, da die Annahme $x > a + 1$ mithilfe von BU zum Widerspruch

$$x^n > (1 + a)^n \geq 1 + na > na \geq a$$

führt.

Also existiert $b := \sup M$. Dabei ist $b > 0$, denn $x := \left(1 + \frac{1}{na}\right)^{-1} \in M$ wegen

$$\frac{1}{x^n} = \left(1 + \frac{1}{na}\right)^n \overset{BU}{\geq} 1 + \frac{n}{na} = 1 + \frac{1}{a} > \frac{1}{a}.$$

Vorbemerkung: Für $\delta \in (0, b)$ gilt:

$$\begin{aligned} (b + \delta)^n &\leq b^n + \delta 2^n b^{n-1} \\ (b - \delta)^n &\geq b^n - \delta 2^n b^{n-1}. \end{aligned}$$

[Es ist

$$(b + \delta)^n = b^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\delta^k b^{n-k}}_{\leq \delta b^{n-1}} \leq b^n + \delta b^{n-1} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}}_{\leq 2^n} \leq b^n + \delta 2^n b^{n-1}$$

und die andere Ungleichung zeigt man ähnlich.]

Wir behaupten $b^n = a$.

Annahme: $b^n < a$ [$b^n > a$]. Dann ist $\varepsilon := a - b^n > 0$ [$\varepsilon := b^n - a > 0$] und wir finden $\delta \in (0, b)$ mit $\delta < \frac{\varepsilon}{2^n b^{n-1}}$. Unter Verwendung der Vorbemerkung ist dann

$$\begin{array}{rcl} (b+\delta)^n & \leq & b^n + \delta 2^n b^{n-1} < b^n + \varepsilon = a \\ [(b-\delta)^n & \geq & b^n - \delta 2^n b^{n-1} > b^n - \varepsilon = a], \end{array}$$

also $b + \delta \in M$ und somit $b + \delta \leq b$ [also $b - \delta$ obere Schranke von M und somit $b - \delta \geq b$]: Widerspruch! □

4.13. Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel: Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, so gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Bemerkung: Die Ungleichung gilt auch für $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$.

Beweis durch Induktion nach n. IA $n = 1$: Es gilt $a_1 \leq a_1$.

IS Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $\tilde{a} := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$. Dann ist $\tilde{a} > 0$. Es gelte $\tilde{a}^n \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ (IV). Dann ist

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} \leq \tilde{a}^n a_{n+1} = \tilde{a}^{n+1} \frac{a_{n+1}}{\tilde{a}}$$

und nach BU

$$\frac{a_{n+1}}{\tilde{a}} = 1 + (n+1)\frac{a_{n+1} - \tilde{a}}{(n+1)\tilde{a}} \leq \left(1 + \frac{a_{n+1} - \tilde{a}}{(n+1)\tilde{a}}\right)^{n+1}.$$

Zusammen erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} & \leq & \tilde{a}^{n+1} \left(1 + \frac{a_{n+1} - \tilde{a}}{(n+1)\tilde{a}}\right)^{n+1} \\ & = & \left(\frac{(n+1)\tilde{a} + a_{n+1} - \tilde{a}}{n+1}\right)^{n+1} \\ & = & \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}. \end{array}$$

Das war zu zeigen. □

5 Die komplexen Zahlen

5.1. Konstruktion: Auf $\mathbb{R}^2$ erklären wir zwei Verknüpfungen "+" und "$*$" durch

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{und}\\ (x_1, y_1) * (x_2, y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_2y_1 + x_1y_2).\end{aligned}$$

Man kann nun nachrechnen, dass die Körperaxiome $(A1) - (A9)$ für diese Verknüpfungen gelten (wobei "$*$" die Rolle der Multiplikation übernimmt):

$(A1) - (A4)$ sind leicht. $(A5)$ muss man nur hinschreiben (etwas aufwendiger), $(1, 0)$ ist das neutrale Element bzgl. "$*$". Das zu $(x, y) \neq (0, 0)$ bzgl. "$*$" inverse Element ist $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$. $(A8)$ ist klar, $(A9)$ schreibt man sofort hin.

Es gilt $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ und $(x_1, 0) * (x_2, 0) = (x_1x_2, 0)$, dh man kann das Paar $(x, 0)$ mit der reellen Zahl x identifizieren. Somit sind die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ in unserem Modell $(\mathbb{R}^2, +, *)$ der "komplexen Zahlen" enthalten. Ende Do 27.10.11

Weiter ist $(0, 1) * (0, 1) = (-1, 0)$, dh $(0, 1)$ ist eine "Zahl", deren Quadrat $= -1$ ist. Man setzt nun $i := (0, 1)$ und schreibt $x + iy$ statt (x, y). Es ist dann

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{die Menge der komplexen Zahlen.}$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt x der *Realteil von* z (geschrieben $\operatorname{Re} z$) und y heißt der *Imaginärteil von* z (geschrieben $\operatorname{Im} z$). Komplexe Zahlen z mit $\operatorname{Re} z = 0$ heißen *rein imaginär* und komplexe Zahlen mit $\operatorname{Im} z = 0$ heißen *reell.*

Also: Man kann mit komplexen Zahlen wie gewohnt rechnen und muss nur $i^2 = -1$ berücksichtigen, etwa

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2) + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2),$$

vergleiche die Definition von "$*$" oben.

5.2. Konjugation und Betrag: Zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ heißt $\overline{z} := x - iy$ die *konjugiert komplexe Zahl.* Es gilt dann $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ und $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt Betrag der komplexen Zahl z.

Rechenregeln: Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

$\overline{(\overline{z})} = z$,

$|\overline{z}| = |z|$,

$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,

$\max\{|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|\} \leq |z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$ [denn $\max\{|x|,|y|\} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$],

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ [denn $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$],

$|z+w| \leq |z|+|w|$ (Dreiecksungleichung) und $||z|-|w|| \leq |z-w|$. [Es ist nämlich

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + \underbrace{z\overline{w} + \overline{(z\overline{w})}}_{=2\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq 2|z\overline{w}|} \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z|+|w|)^2, \end{aligned}$$

woraus die Dreiecksungleichung durch Wurzelziehen folgt.]

Eine komplexe Zahl ist Null genau dann, wenn Real- und Imaginärteil beide Null sind. Ist $x+iy \neq 0$, so ist das multiplikativ Inverse gegeben durch

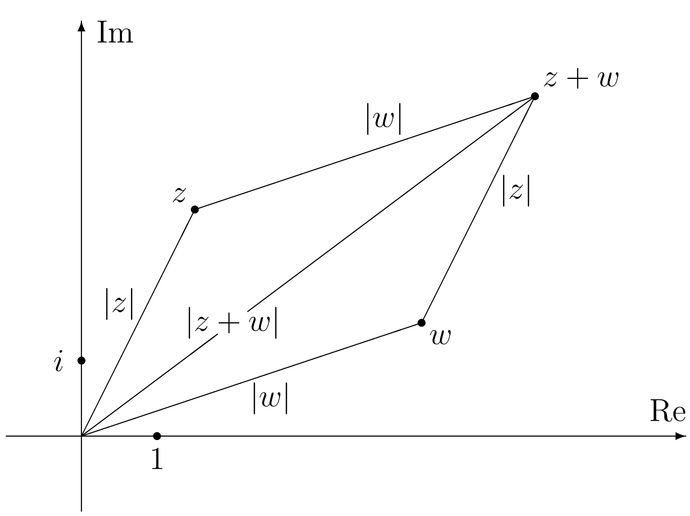
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

5.3. Zur anschaulichen Vorstellung: Man stellt sich komplexe Zahlen gerne in der Ebene vor, also $x+iy$ als den Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Addition: Addition mit $a+ib$ bedeutet eine Verschiebung.

Multiplikation: Multiplikation mit i bedeutet eine Drehung um 90^o nach links, Multiplikation mit $a+ib$ bedeutet also eine Drehstreckung.

Dreiecksungleichung:



5.4. Polynome: Ein Polynom p (oder $p(z)$) mit komplexen Koeffizienten ist ein formaler Ausdruck $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_j \in \mathbb{C}$ für alle $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Das Polynom heißt *reell*, wenn alle Koeffizienten a_j reell sind.

Das Polynom heißt *vom Grad* n, falls $a_n \neq 0$ gilt, und zusätzlich *normiert*, falls $a_n = 1$ ist.

Falls $a_n = 0$ ist, so ist auch $p(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, dh führende Nullkoeffizienten kann man weglassen.

Es gilt insbesondere

$$p(z) \text{ hat den Grad } 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(z) = a_0 \text{ und } a_0 \neq 0.$$

Das Nullpolynom $p(z) = 0$ hat keinen Grad.

Die Menge aller Polynome mit komplexen Koeffizienten (in der "freien Variablen" z) bezeichnen wir mit $\mathbb{C}[z]$.

Horner-Schema: Bei der Berechnung von $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ für ein gegebenes $z \in \mathbb{C}$ geht man ökonomischerweise so vor:

$$p(z) = ((\ldots(((a_n \cdot z + a_{n-1}) \cdot z + a_{n-2}) \cdot z + a_{n-3}) \ldots) \cdot z + a_1) \cdot z + a_0.$$

Definition: Ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$ heißt *Nullstelle* des Polynoms p.

5.5. Polynomdivision: Seien $p, q \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$ Polynome vom Grad n bzw. $k \leq n$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $m \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$ und $r \in \mathbb{C}[z]$ mit $\operatorname{Grad} m = n - k$ und $r = 0$ oder $\operatorname{Grad} r < k$ und $p = mq + r$ (*Division mit Rest*).

Beweis. Für $p(z) = a_n z^n + \ldots$ und $q(z) = b_k z^k + \ldots$ setze $c_{n-k} := a_n / b_k$. Dann ist $p_1(z) := p(z) - c_{n-k} z^{n-k} q(z)$ entweder $= 0$ (dann ist man fertig) oder hat Grad $n_1 \leq n - 1$. Ist $n_1 < k$, so ist man fertig, ansonsten wiederhole man den obigen Schritt mit p_1 statt p. Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten. $\square$

Satz: Ist $p \in \mathbb{C}[z]$ Polynom vom Grad $n \geq 1$ und ist z_0 Nullstelle von p, so gibt es ein Polynom $q \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $n - 1$ mit

$$p(z) = q(z) \cdot (z - z_0).$$

Dabei heißt $z - z_0$ *Linearfaktor*.

Beweis. Wir dividieren $p(z)$ durch das Polynom $z - z_0$ (das den Grad 1 hat) und erhalten $p(z) = q(z)(z - z_0) + r(z)$, wobei $\operatorname{Grad} q = n - 1$ und $r = 0$ oder $r(z) = r_0 \neq 0$. Wegen $p(z_0) = 0$ ist $r(z_0) = 0$, also $r = 0$. $\square$

Definition: Die *Vielfachheit* (Vfh) einer Nullstelle z_0 von p gibt an, wie oft man $p(z)$ durch den Linearfaktor $z - z_0$ dividieren kann. Ende Mo 31.10.11

Folgerung: Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

5.6. Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. (ohne Beweis)

Folgerung: Ist $p(z)$ normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$, so gibt es $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Eine feste Nullstelle z_0 von $p(z)$ kommt dabei in $z_1, z_2, \dots, z_n$ so oft vor, wie ihre Vielfachheit angibt.

Beispiele: (1) $p(z) = z^3 + z^2 + z + 1$. Eine Nullstelle ist $z_0 = -1$, dann ist $z - z_0 = z + 1$. Durch Polynomdivision findet man $(z^3+z^2+z+1) : (z+1) = z^2+1 = z^2-i^2 = (z-i)(z+i)$. Also ist $p(z) = (z+1)(z-i)(z+i)$, die Nullstellen sind -1, i und $-i$ und haben jeweils die Vielfachheit 1.

(2) $p(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$. Einzige Nullstelle ist 1 (mit Vielfachheit 2).

6 Folgen und Konvergenz

6.1. Definition: Eine *reelle* [*komplexe*] *Zahlenfolge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ [bzw. $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto a_n$].

Wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder kurz (a_n) oder auch $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Beispiele: (1) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$.

(2) $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$.

(3) $a_n = i^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \ldots)$.

Der Begriff der *Konvergenz* ist für die Analysis von zentraler Bedeutung.

6.2. Konvergenz: Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$ [bzw. $a \in \mathbb{C}$]. Wir sagen, dass (a_n) gegen a *konvergiert* und schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underbrace{n_0}_{= n_0(\varepsilon)} \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Das bedeutet: "die a_n kommen a beliebig nahe" oder "der Abstand $|a_n - a|$ wird beliebig klein".

Die Zahl a heißt dann *Limes* oder *Grenzwert* der Folge (a_n).

Eine Folge (a_n) heißt *konvergent*, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ [bzw. $a \in \mathbb{C}$] so gibt, dass (a_n) gegen a konvergiert. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Beispiele: (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Nach 4.7(4) finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für jedes $n \geq n_0$ gilt dann:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Wir haben $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ nachgewiesen.

Schreibweisen: Statt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ schreibt man auch $\lim a_n = a$, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ oder $a_n \to a$.

(2) Für jede Zahlenfolge (a_n) und jedes a gilt:

$$\lim a_n = a \iff \lim |a_n - a| = 0.$$

Insbesondere ist für $a = 0$:

$$\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0.$$

(3) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent: Sei $a \in \mathbb{R}$. Setze

$$\varepsilon := \begin{cases} 1/2, & \text{falls } a \in \{1,-1\} \\ 1/2 \cdot \min\{|1-a|, |-1-a|\}, & \text{falls } a \notin \{1,-1\} \end{cases}.$$

Dann gilt $|a_n - a| \geq \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Folglich konvergiert (a_n) nicht gegen a. Da a beliebig war, ist (a_n) divergent.

(4) Für $b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} b^n = 0 \iff |b| < 1.$$

Denn für $|b| \geq 1$ gilt $|b^n| = |b|^n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (b^n) konvergiert nicht gegen Null. Für $|b| < 1$ sei $\varepsilon > 0$. Nach 4.11(4) finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b|^{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $0 \leq |b^n| = |b|^n \leq |b|^{n_0} < \varepsilon$. Also ist $\lim_n b^n = 0$.

(5) Zu jedem $r \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge (q_n) mit $q_n \to r$ und $q_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn nach 4.9 finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $q_n \in (r - 1/n, r + 1/n) \cap \mathbb{Q}$. Wegen $|q_n - r| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt dann $q_n \to r$.

Umformulierung: Sei $a \in \mathbb{R}$ [oder $a \in \mathbb{C}$] und $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\} \quad [\text{bzw.} \quad U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\}]$$

die *ε-Umgebung von a in $\mathbb{R}$* [bzw. *in* $\mathbb{C}$].

Die ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ist das Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Wir sagen, dass eine Eigenschaft "*für fast alle (ffa) $n \in \mathbb{N}$ gilt*", falls sie für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel: Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n > 5$.

Sind eine Folge (a_n) und eine Zahl a gegeben, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bei Konvergenzfragen kommt es also auf endlich viele Folgenglieder nicht an.

Für $p \in \mathbb{Z}$ bezeichnet man auch $(a_n)_{n=p}^\infty$ als Folge.

Bemerkungen: (a) Der Grenzwert einer Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt.

(b) Eine konvergente Folge (a_n) ist *beschränkt*, dh die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

(c) Ist (z_n) eine komplexe Zahlenfolge, so ist (z_n) genau dann konvergent, wenn die reellen Zahlenfolgen $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ konvergent sind. Genauer gilt für $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$z_n \to z_0 \iff \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0 \text{ und } \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0$$

Das liegt an der Abschätzung (vgl. 5.2)

$$\max\{|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z_0|, |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z_0|\} \leq |z_n - z_0| \leq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z_0| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z_0|.$$

Konvergiert etwa (z_n) gegen $z_0 \in \mathbb{C}$, so zeigt die linke Ungleichung, dass $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0$. Konvergiert hingegen $(\operatorname{Re} z_n)$ gegen $a \in \mathbb{R}$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ gegen $b \in \mathbb{R}$, so setze $z_0 := a + ib$, und die rechte Ungleichung zeigt $z_n \to z_0$.

(d) Zur Beruhigung: Ist (a_n) eine reelle Zahlenfolge und $a \in \mathbb{C}$ mit $a_n \to a$, so gilt $a \in \mathbb{R}$. Wäre nämlich $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so hätte man für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - a| \geq |\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a| = |\operatorname{Im} a| =: \varepsilon > 0,$$

im Widerspruch zu $|a_n - a| \to 0$.

Wir beschränken uns deshalb weitgehend auf reelle Zahlenfolgen. Ende Do 03.11.11

6.3. Grenzwertsätze: Seien (a_n), (b_n), (α_n) und (c_n) reelle Folgen und $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $|a_n - a| \leq \alpha_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0 \Longrightarrow a_n \to a$.

(2) $a_n \to a \Longrightarrow |a_n| \to |a|$.

(3) $a_n \to a$ und $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \Longrightarrow a \leq b$.

(4) $a_n \to a$ und $b_n \to a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \Rightarrow c_n \to a$.

(5) Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so gilt $a_n + b_n \to a + b$ und $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$. Ist $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle n und es gilt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

Beweis. (1) ist leicht. Für (2) verwendet man $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ (vgl. 4.3(6)) und (1).

Zu (3): Sonst wäre $a > b$, und mit $\varepsilon := (a - b)/2$ ist $a_n > a - \varepsilon \geq b + \varepsilon > b_n$ für fast alle n, Widerspruch.

Zu (4): Ist $\varepsilon > 0$, so gilt für fast alle n: $a_n, b_n \in U_\varepsilon(a)$, also $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$.

Zu (5): Sei $\varepsilon > 0$. Dann $|a_n - a| < \varepsilon/2$ und $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für fast alle n. Also

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

für fast alle n. Bei $(a_n \cdot b_n)$ verwendet man

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

und die Tatsache, dass die konvergente Folge (a_n) beschränkt ist, dh es gibt $M > 0$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung folgt aus (1) und (5) für "+".

Die Aussage über $(\frac{a_n}{b_n})$ muss man nur für $a_n = 1$ zeigen. Sei dazu $b \neq 0$ und $\delta := |b|/2$. Dann ist $\delta > 0$ und wir finden $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ gilt dann auch

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b - b_n| > 2\delta - \delta = \delta$$

und

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|} \leq \frac{1}{2\delta^2}\,|b_n - b|,$$

woraus die Behauptung folgt. □

6.4. Monotone Folgen: Eine reelle Folge (a_n) heißt

$$\begin{aligned} \textit{monoton wachsend}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}, \\ \textit{monoton fallend}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}, \\ \textit{streng monoton wachsend}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}, \\ \textit{streng monoton fallend}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}. \end{aligned}$$

Satz: Ist eine monoton wachsende [bzw. fallende] reelle Folge (a_n) beschränkt, so konvergiert sie, und zwar gegen $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ [bzw. $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$].

Beweis. Sei (a_n) monoton wachsend und $s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > s - \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$, also auch $|a_n - s| < \varepsilon$. $\square$

6.5. Beispiele: (1) $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$ und $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass für alle $y > x \geq 0$ gilt $\sqrt[p]{y} - \sqrt[p]{x} \leq \sqrt[p]{y - x}$. [Es ist nämlich nach dem binomischen Satz $(\sqrt[p]{y-x} + \sqrt[p]{x})^p = y - x + \underbrace{\ldots}_{\geq 0} + x \geq y$.]

Wir erhalten somit $|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \sqrt[p]{|a_n - a|}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $b_n := |a_n - a|$, so gilt $b_n \to 0$ und es reicht zu zeigen, dass $\sqrt[p]{b_n} \to 0$. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir n_0 mit $b_n < \varepsilon^p$ für alle $n \geq n_0$. Es gilt dann $0 \leq \sqrt[p]{b_n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. $\square$

(2) $\sqrt[n]{n} \to 1$: Setze $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Dann ist $a_n \geq 0$ für alle n, und für $n \geq 2$ gilt:

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\, a_n^2,$$

also $0 \leq a_n \leq \sqrt{2}/\sqrt{n-1}$. Es folgt $a_n \to 0$.

Für $c > 0$ gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$: Für $c \geq 1$ ist $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$ für fast alle n, und für $c \in (0,1)$ ist $1/\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{c} \leq 1$ für fast alle n. Wende nun 6.3(4) an.

(3) Konvergiert die Folge (a_n) so gilt $a_{n+1} - a_n \to 0$. Denn es gilt auch $a_{n+1} \to 0$, und $a_{n+1} - a_n \to 0$ folgt aus Satz 6.3(5).

Es gilt aber auch z.B. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

woraus $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ folgt, obwohl $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

(4) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $s_n := \sum_{k=0}^{n} z^k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (s_n) konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$ ist. In diesem Falle gilt $\lim s_n = (1-z)^{-1}$. Für $|z| \geq 1$ ist nämlich $|s_{n+1} - s_n| = |z|^{n+1} \geq 1$, und (s_n) konvergiert nicht (verwende (3) und Bemerkung 6.2(c)). Für $|z| < 1$ ist $s_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ nach Übungsaufgabe und also $s_n \to (1-z)^{-1}$ nach Beispiel 6.2(4).

6.6. Die Eulersche Zahl e: Setze für jedes $n \in \mathbb{N}$: $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ und $b_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, den Limes bezeichnet man als *Eulersche Zahl e*.

Ende Mo 07.11.11

Beweis. Wir gehen in vier Schritten vor.

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$ [klar].

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$ und $b_n \geq b_{n+1}$ [s.u.].

(iii) $M := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nach oben beschränkt [z.B. ist $b_1 = 4$ obere Schranke von M].

(iv) $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup M$ [nach Satz 6.4].

zu (ii): Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} \leq \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^n$$

und nach BU:

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2} \geq 1 - \frac{n}{(n+2)n} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Somit ist $a_n \leq a_{n+1}$ gezeigt. Außerdem gilt:

$$b_n \geq b_{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \Leftrightarrow \left(\frac{(n+1)^2}{(n+2)n}\right)^{n+1} \geq \frac{n+2}{n+1},$$

sowie nach BU:

$$\left(1 + \frac{1}{(n+2)n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{(n+2)n} \geq 1 + \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{n+1}.$$

also ist auch $b_n \geq b_{n+1}$ gezeigt. □

Bemerkung: Es gilt auch $\lim_{n\to\infty} b_n = e$ und $e \approx 2.718$. Wir haben aus dem Beweis z.B. die Abschätzung $2 = a_1 < e < b_1 = 4$.

6.7. Intervallschachtelung: Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$, wobei $a_n \leq b_n$, mit $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n - a_n \to 0$.

Beispiel: Nach 6.6 definiert $I_n := [(1+\frac{1}{n})^n, (1+\frac{1}{n})^{n+1}]$ eine Intervallschachtelung, für die $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{e\}$ gilt.

Satz: Ist (I_n) eine Intervallschachtelung, so gibt es genau eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{r\}$. Es gilt $\max I_n \to r$ und $\min I_n \to r$.

Beweis. Setze $a_n := \min I_n$ und $b_n := \max I_n$, so dass $I_n = [a_n, b_n]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (b_n) monoton fallend und beschränkt und (a_n) ist monoton wachsend und beschränkt, nach Satz 6.4 finden wir also $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Wegen $b_n - a_n \to 0$ ist $b - a = 0$ nach 6.3(5), und $r := b = a$ ist die eindeutig bestimmte gesuchte Zahl. $\square$

6.8. Teilfolgen: Ist (a_n) eine Folge und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $k(n) < k(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (dh $(k(n))$ ist eine streng monotone Folge natürlicher Zahlen), so heißt die Folge $(a_{k(n)})$ *Teilfolge (TF)* von (a_n).

Eine Zahl b heißt *Häufungswert (HW) der Folge* (a_n), falls es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen b konvergiert.

Beispiel: $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ ist Teilfolge von (a_n), hier ist $k(n) = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $(a_3, a_1, a_7, a_5, \ldots)$ ist hingegen keine Teilfolge von (a_n).

Bemerkung: Eine Zahl b ist Häufungswert der Folge (a_n) genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass $a_k \in U_\varepsilon(b)$ ist für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$.

Beispiele: (1) Gilt $a_n \to a$, so konvergiert jede Teilfolge von (a_n) gegen a, dh a ist einziger Häufungswert von (a_n).

(2) Die Folge $((-1)^n)$ hat genau die Häufungswerte 1 und -1: Wegen $a_{2n} \to 1$ und $a_{2n+1} \to -1$ sind 1 und -1 Häufungswerte. Ist $b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ und $\varepsilon := \min\{|1-b|, |-1-b|\}/2$, so ist $\varepsilon > 0$ und in $U_\varepsilon(b)$ liegen keine Folgenglieder. Somit ist b kein Häufungswert von (a_n).

Satz (Bolzano-Weierstraß): Jede beschränkte Zahlenfolge hat eine konvergente Teilfolge, dh jede beschränkte Zahlenfolge hat einen Häufungswert.

Beweis. Ist $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so finden wir $I_1 := [a_1, b_1]$, das alle c_m enthält. Setze $k(1) := 1$, so dass $c_{k(1)} \in I_1$. Ist $I_n = [a_n, b_n]$ konstruiert und $k(n)$ gefunden, so definiere $I_{n+1} := [a_{n+1}, b_{n+1}]$ als linke Hälfte von I_n, falls diese unendlich viele der c_m enthält, sonst als die rechte Hälfte von I_n. Dann findet man $k(n+1) > k(n)$ mit $c_{k(n+1)} \in I_{n+1}$. Offenbar ist (I_n) eine Intervallschachtelung. Wählen wir $r \in \mathbb{R}$ gemäß Satz 6.7, so gilt $c_{k(n)} \to r$ wegen 6.3(4). $\square$

Bemerkung: Der Satz gilt auch für komplexe Zahlenfolgen.

6.9. Cauchyfolgen: Sei (a_n) eine konvergente Zahlenfolge. Dann gilt:

$$(C) \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Beweis. Es gelte $a_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann finden wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon/2$. Seien nun $n, m \geq n_0$. Dann gilt:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Definition: Eine Folge (a_n), für welche die Eigenschaft (C) gilt, heißt *Cauchyfolge (CF)*.

Bemerkung: Jede Cauchyfolge (a_n) ist beschränkt.

Beweis. Wähle n_0 mit $\forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq 1$ und setze $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\} + 1$. Ist nun $n \in \mathbb{N}$, so gilt $|a_n| \leq M$, falls $n \leq n_0$. Für $n > n_0$ ist

$$|a_n| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_0}|}_{\leq 1} + |a_{n_0}| \leq M.$$

□

Folgerung: In $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$ gilt, dass jede Cauchyfolge konvergiert.

Diese Eigenschaft heißt *Vollständigkeit*. Der Vorteil ist, dass man so Konvergenz zeigen kann, ohne den Grenzwert kennen zu müssen.

Beweis. Da eine Cauchyfolge beschränkt ist, hat sie nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge. Die Eigenschaft (C) impliziert dann Konvergenz der gesamten Folge (Übung!). □

Ende Di 08.11.2011

6.10. Rechnen mit ∞: Sei (a_n) eine reelle Folge.

$$\begin{aligned} a_n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : a_n > K, \\ a_n \to -\infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : a_n < K. \end{aligned}$$

Achtung: Man redet hier nicht von "Konvergenz" und auch nicht von "Grenzwert" , denn $\pm\infty \notin \mathbb{R}$, dh ∞ und $-\infty$ sind keine **Zahlen**. Man sagt jedoch etwa "die Folge a_n geht gegen unendlich" und schreibt auch $\lim_n a_n = \infty$.

Bemerkung: (a) Gilt $a_n \to \pm\infty$, so folgt $|a_n| \to \infty$ und $1/a_n \to 0$. [Der erste Teil ist klar. Es gelte $|a_n| \to \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir n_0 mit $\forall n \geq n_0 : |a_n| > 1/\varepsilon$. Es gilt dann $\forall n \geq n_0 : |1/a_n| < \varepsilon$.]

(b) Ist die reelle Folge (a_n) nicht nach oben [unten] beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $(a_{k(n)})$ von (a_n) mit $a_{k(n)} \to \infty$ [bzw. mit $a_{k(n)} \to -\infty$].

(c) Für jede monoton wachsende [monoton fallende] Folge (a_n) gibt es $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ [bzw. $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$] mit $a_n \to a$.

Konventionen: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $-\infty < a < \infty$.

Man setzt für $a \in \mathbb{R}$: $a+\infty = \infty$, $a-\infty = -\infty$, sowie für $a > 0$: $a\cdot\infty = \infty$, $a\cdot(-\infty) = -\infty$ und für $a < 0$: $a \cdot \infty = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = \infty$.

Außerdem setzt man $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$ und $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$.

Achtung: Die Ausdrücke $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$ und $\infty - \infty$ sind **nicht definiert!**

Regeln: Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_n + b_n \to a + b, &\quad \text{falls} \quad a + b \text{ definiert ist,} \\ a_n \cdot b_n \to a \cdot b, &\quad \text{falls} \quad a \cdot b \text{ definiert ist.} \end{aligned}$$

Definition: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.

$$\begin{aligned} \sup M = \infty &\quad :\Longleftrightarrow \quad M \text{ ist nicht nach oben beschränkt,} \\ \inf M = -\infty &\quad :\Longleftrightarrow \quad M \text{ ist nicht nach unten beschränkt.} \end{aligned}$$

Bemerkung: Manchmal findet man auch $\sup \emptyset := -\infty$ und $\inf \emptyset := \infty$.

Bemerkung: Man hat also für $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sup M = \infty &\quad \Longleftrightarrow \quad \forall K > 0\, \exists x \in M : x > K, \\ \inf M = -\infty &\quad \Longleftrightarrow \quad \forall K > 0\, \exists x \in M : x < -K. \end{aligned}$$

Beispiele: $\sup \mathbb{N} = \infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$.

6.11. Limes superior und Limes inferior: Sei (a_n) eine reelle Folge. Ist (a_n) nach oben beschränkt, so ist die durch $b_n := \sup\{a_k : k \geq n\}$ definierte Folge (b_n) monoton fallend und wir definieren

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\}.$$

Ist (a_n) nach unten beschränkt, so ist die durch $c_n := \inf\{a_k : k \geq n\}$ definierte Folge (c_n) monoton wachsend und wir definieren

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geq n\}.$$

Ist (a_n) nicht nach oben [unten] beschränkt, setzen wir $\limsup_{n\to\infty} a_n := \infty$ [bzw. $\liminf_{n\to\infty} a_n := -\infty$].

Schreib- und Sprechweisen: Man schreibt auch kurz $\limsup_n a_n$ oder $\limsup a_n$, sowie $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, $\overline{\lim}_n a_n$, $\overline{\lim} a_n$ und spricht vom "oberen Limes", entsprechend für $\liminf$ mit $\underline{\lim}$ ("unterer Limes").

Bemerkung: (a) Es gibt stets Teilfolgen $(a_{k(n)})$ und $(a_{l(n)})$ von (a_n) mit

$$a_{k(n)} \to \limsup_{m\to\infty} a_m \quad (n \to \infty), \qquad\qquad a_{l(n)} \to \liminf_{m\to\infty} a_m \quad (n \to \infty).$$

(b) Ist (a_n) beschränkt, so ist $\limsup a_n$ der **größte** und $\liminf a_n$ ist der **kleinste** Häufungswert von (a_n).

Beispiele: (1) Für $a_n := (-n)^n$ ist $\limsup a_n = \infty$ und $\liminf a_n = -\infty$. Die Folge hat keine Häufungswerte.

(2) Für $a_n := (-1)^n$ ist $\limsup a_n = 1$ und $\liminf a_n = -1$.

(3) Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim a_n = 0$ genau dann, wenn $\limsup a_n = 0$ ist.

(4) Gilt $a_n \to a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, so ist $\limsup a_n = \liminf a_n = a$.

6.12. Abzählbare Mengen: Die leere Menge $\emptyset$ ist endlich. Eine Menge $M \neq \emptyset$ heißt *endlich*, falls es $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to M$ gibt.

Eine Menge, die nicht endlich ist, heißt *unendlich*.

Bemerkung: $M \neq \emptyset$ ist endlich genau dann, wenn es $n \in \mathbb{N}$ und eine **surjektive** Abbildung $\varphi : \{1, \ldots, n\} \to M$ gibt.

Ist M unendlich, so gibt es eine **injektive** Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$.

Definition: Eine unendliche Menge M heißt *abzählbar* (*unendlich*), falls es eine **surjektive** Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$ gibt, andernfalls heißt M *überabzählbar*.

Ist M abzählbar unendlich, so gibt es also eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$ derart, dass $M = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Satz: Ist M abzählbar, so gibt es auch eine **bijektive** Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to M$.

Beweis (nicht in der Vorlesung). Wähle zu jedem $m \in M$ ein $\nu(m) \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(\nu(m)) = m$ (etwa $\nu(m) := \min \varphi^{-1}(\{m\})$). Setze $T := \{\nu(m) : m \in M\}$. Dann ist $\varphi : T \to M$ bijektiv und T ist unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Wir konstruieren rekursiv eine bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to T$ wie folgt: $\tau(1) := \min T$ und $\tau(n+1) := \min(T \setminus \{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)\})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung $\psi := \varphi \circ \tau : \mathbb{N} \to M$ bijektiv. $\square$

Bemerkung: Wir haben insbesondere gezeigt, dass jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge abzählbar ist.

Beispiele: (1) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar: $(0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$.

(2) Sind M und N abzählbare Mengen, so ist $M \times N$ abzählbar: Für $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$, $N = \{n_1, n_2, \ldots\}$ schreibe

$$M \times N = \{(m_1, n_1), (m_2, n_1), (n_2, m_1), (n_3, m_1), (n_2, m_2), (n_1, m_3), \ldots\}.$$

(3) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ist nach (1) und (2) abzählbar und die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $(a, b) \mapsto a/b$ ist surjektiv.

(4) Ist $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen, so ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ abzählbar: Ist nämlich $M_n = \{m_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so wählen wir eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach (2) und haben $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \{m_{\varphi(l)} : l \in \mathbb{N}\}$. Ende Do 10.11.11

(5) $\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ eine Abbildung. Wir zeigen, dass φ nicht surjektiv ist. Setzt man nämlich $T := \{n \in \mathbb{N} : n \notin \varphi(n)\}$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$n \in T \iff n \notin \varphi(n),$$

so dass $T \neq \varphi(n)$ ist. Somit ist $T \notin \varphi(\mathbb{N})$, dh φ ist nicht surjektiv.

Zusammenhang mit dem *Cantorschen Diagonalverfahren*: Bezeichnet man die Menge aller Abbildungen $x : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ mit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, so ist die Abbildung

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \mathrm{Pot}(\mathbb{N}), \qquad x \mapsto \{n \in \mathbb{N} : x(n) = 1\}$$

bijektiv. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $S \mapsto x_S$, wobei

$$x_S(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \in S \\ 0, & \text{falls } n \notin S \end{cases}$$

ist. Wir interpretieren die Folge $(x_S(n))_{n \in \mathbb{N}}$ als "Kodierung" der Teilmenge S.

Für die Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$ schreibe man die Kodierungen $x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots$ als Zeilen untereinander. Die Menge T von oben erhält man dann durch "Ändern der Diagonalen", nämlich durch

$$x_T(n) := 1 - x_{\varphi(n)}(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann unterscheiden sich x_T und $x_{\varphi(n)}$ mindestens an der Stelle n. Da dies für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, kommt x_T nicht als Zeile vor, gehört also nicht zu den Kodierungen der Mengen im Bild von φ.

Bemerkung: Allgemeiner kann man mit demselben Beweis zeigen, dass es für keine Menge $M \neq \emptyset$ eine surjektive Abbildung $M \to \mathrm{Pot}(M)$ gibt, indem man $T := \{m \in M : m \notin \varphi(m)\}$ betrachtet.

7 Reihen

7.1. Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $s_N := \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ heißt (*unendliche*) *Reihe* und wird mit $\sum_{n=1}^\infty a_n$ bezeichnet. Die Zahl s_N heißt N*-te Partialsumme* oder N*-te Teilsumme* von $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ heißt *konvergent* [*divergent*], falls die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert [bzw. divergiert].

Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{N\to\infty} s_N$ der *Reihenwert* von $\sum_{n=1}^\infty a_n$ und wird ebenfalls mit $\sum_{n=1}^\infty a_n$ bezeichnet.

Bemerkung: (a) Die Folge (a_n) kann hier reell oder komplex sein. Ist (a_n) komplex, so heißt die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{Re} a_n$ *Realteil* der komplexen Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ und $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{Im} a_n$ heißt *Imaginärteil* von $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Eine komplexe Reihe konvergiert genau dann, wenn ihr Realteil **und** ihr Imaginärteil **beide** konvergieren. In diesem Fall ist

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty \operatorname{Re} a_n \; + i \sum_{n=1}^\infty \operatorname{Im} a_n,$$

also

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^\infty a_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \operatorname{Re} a_n \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^\infty a_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \operatorname{Im} a_n,$$

vgl. mit 6.2.

(b) Ist $p \in \mathbb{Z}$, so verfährt man für Folgen $(a_n)_{n=p}^\infty$ entsprechend, indem man $s_N := \sum_{n=p}^N$ für $N \geq p$ setzt und $(s_N)_{N=p}^\infty$ betrachtet. Ein wichtiger Fall ist hierbei $p = 0$.

Beispiele: (1) Die *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^\infty z^n$, wobei $z \in \mathbb{C}$, konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$. Für $|z| < 1$ ist $\sum_{n=0}^\infty z^n = (1-z)^{-1}$ (vgl. 6.5(4)).

(2) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, also ist für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$s_N = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1 \; (N \to \infty).$$

Somit ist $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)}$ konvergent und $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(3) Die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist

$$s_{2N} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N}}_{=s_N} + \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\geq \frac{1}{2N}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2N}}_{\geq \frac{1}{2N}} \geq s_N + N\frac{1}{2N} = s_N + \frac{1}{2}.$$

Also ist (s_N) divergent, denn $s_N \to s \in \mathbb{R}$ würde $s_{2N} - s_N \to s - s = 0$ implizieren im Widerspruch zu $s_{2N} - s_N \geq 1/2$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

7.2. Satz: Seien (a_n) und (b_n) Folgen und $s_N := a_1 + \ldots + a_N$, $N \in \mathbb{N}$.

(1) **Monotoniekriterium:** Sind alle $a_n \geq 0$ und ist die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $p \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ und es gilt

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{p} a_n.$$

(3) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und definiert man $r_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ für jedes $N \in \mathbb{N}$, so gilt $r_N \to 0$ $(N \to \infty)$.

(4) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so folgt $a_n \to 0$.

(5) Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (oder in $\mathbb{C}$), so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Beweis. (1) folgt aus 6.4, angewandt auf die monton wachsende Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

(2) Setzt man $\sigma_N := \sum_{n=p+1}^{N} a_n$ für $N \geq p+1$, so ist $\sigma_N = s_N - s_p \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_p$ $(N \to \infty)$.

(3) Wegen (2) gilt $r_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_N \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

(4) Es ist $a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$.

(5) folgt aus 6.3(5). $\square$

7.3. Cauchykriterium und absolute Konvergenz: Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $s_N := a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ für $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt wegen 6.9:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } &\iff (s_N)_{N\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \iff (s_N)_{N\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge} \\
&\iff \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall N, M \geq n_0 : |s_N - s_M| < \varepsilon \\
&\iff \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall N > M \geq n_0 : \Big| \sum_{n=M+1}^{N} a_n \Big| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cauchykriterium: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\forall N > M \geq n_0 : \Big| \sum_{n=M+1}^{N} a_n \Big| < \varepsilon.$$

Definition: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert (dh also, falls die Reihe über die Absolutbeträge der a_n konvergiert).

Beispiel: Für $|z| < 1$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ absolut konvergent (wegen $|z^n| = |z|^n$ und Beispiel 7.1(1)).

Satz: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und es gilt die "Dreiecksungleichung für Reihen":

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Beweis. Für $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N > M$ ist nach Dreiecksungleichung und 7.2(3):

$$\Big|\sum_{n=M+1}^{N} a_n\Big| \leq \sum_{n=M+1}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=M}^{\infty} |a_n| \to 0 \ (M \to \infty).$$

Damit konvergiert die Reihe nach dem Cauchykriterium. Die Abschätzung folgt aus $|s_N| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n|$. $\square$

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent. Setzt man $a_n := (-1)^n/n$ und $s_N := a_1 + \ldots + a_N$ für alle $n, N \in \mathbb{N}$, so stellt man fest, dass $(s_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist mit unterer Schranke $s_1 = -1$ und dass $(s_{2N-1})_{N\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist mit oberer Schranke $s_2 = -1/2$. Nach 6.4 konvergieren beide Folgen, und zwar wegen $s_{2N} - s_{2N-1} = a_{2N} \to 0$ gegen denselben Grenzwert. Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Ende Mo 14.11.11

7.4. Majoranten- und Minorantenkriterium: Seien (a_n) und (b_n) Folgen.

(1) Gilt $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. Für (1) verwende 7.2(1). (2) folgt aus (1). $\square$

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ konvergiert, denn $0 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert nach 7.1(2). Somit konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Weiter ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konvergent für jedes $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$.

Bemerkung: (a) Ist (a_n) eine komplexe Folge, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann absolut konvergent, wenn beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ absolut konvergent sind. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so schreibt man auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

(b) Für eine reelle Folge (a_n) sei $b_n := \max\{a_n, 0\}$ und $c_n := \max\{-a_n, 0\}$, so dass $a_n = b_n - c_n$ und $|a_n| = b_n + c_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann absolut konvergent, wenn beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergieren. In diesem Falle ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

7.5. Leibnizkriterium für alternierende Reihen: Sei (b_n) eine **monoton fallende** Folge mit $b_n \to 0$. Setzt man $a_n := (-1)^n b_n$, $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. Wie im Fall $b_n = 1/n$ im Beispiel in 7.3. □

Bemerkung: Beachte, dass aus den Voraussetzungen folgt: $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Monotonie ist hier wichtig! Setzt man nur voraus, dass $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n \to 0$, so ist die Aussage i.a. falsch (Beispiele in den Übungen).

7.6. Wurzelkriterium: Sei (a_n) eine Folge und $\alpha := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$.

(1) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) Ist $\alpha > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung: Ist $\alpha = 1$, so liefert das Wurzelkriterium keine Entscheidung. Denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent und $\alpha = \limsup \sqrt[n]{1/n} = \lim 1/\sqrt[n]{n} = 1$, hingegen ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent mit $\alpha = \limsup \sqrt[n]{1/n^2} = \lim 1/(\sqrt[n]{n})^2 = 1$.

Beweis. Ist $\alpha < 1$, so wählen wir $\beta \in (\alpha, 1)$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, also $|a_n| \leq \beta^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\beta \in (0,1)$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$, und die Behauptung folgt aus 7.4(1).

Ist $\alpha > 1$, so wählen wir $\gamma \in (1, \alpha)$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \gamma \geq 1$ für unendlich viele n, also $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $a_n \not\to 0$, und nach 7.2(4) ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. □

Beispiel: Sei $p \in \mathbb{N}$. Wir untersuchen Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ für $x \in \mathbb{R}$ mit dem Wurzelkriterium. Hier ist $a_n = n^p x^n$ und

$$\sqrt[n]{|a_n|} = (\sqrt[n]{n})^p |x| \to |x| \ (n \to \infty).$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ für $|x| < 1$ absolut konvergent und für $|x| > 1$ divergent. Für $|x| = 1$ gilt $|a_n| = n^p \to \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ ist nach 7.2(4) divergent.

7.7. Quotientenkriterium: Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $c_n := |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ für n mit $a_n \neq 0$.

(1) Ist $c_n \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

(2) Ist $\limsup c_n < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Ist $\liminf c_n > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung: Konvergiert (c_n) gegen α, so ist für $\alpha < 1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und für $\alpha > 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Im Falle $\alpha = 1$ ist **keine** allgemeine Aussage möglich (man betrachte wieder $a_n = \frac{1}{n}$ bzw. $a_n = \frac{1}{n^2}$).

Beweis. (1) Es sei $c_n \geq 1$ für $n \geq n_0$. Dann ist $|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \ldots \geq |a_{n_0}| > 0$ für alle $n \geq n_0$, dh $|a_n| \not\to 0$. Nach 7.2(4) divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ende Di 15.11.11

(2) Ist $\alpha := \limsup c_n < 1$, so wähle $\beta \in (\alpha, 1)$. Es gilt dann $c_n \leq \beta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dh wir finden n_0 mit $c_n \leq \beta$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt

$$|a_n| \leq \beta |a_{n-1}| \leq \ldots \leq \beta^{n-n_0}|a_{n_0}| = \beta^n(|a_{n_0}|\beta^{-n_0})$$

für alle $n \geq n_0$. Wegen $\beta \in (0,1)$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$, und nach 7.4(1) ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Ist $\liminf c_n > 1$, so folgt $c_n \geq 1$ für fast alle n und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert nach (1). $\square$

7.8. Die Exponentialreihe: Wir betrachten $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe konvergiert für $z = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$. Setzt man für $z \neq 0$: $a_n := z^n/n!$, so gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe also für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut. Insbesondere ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

Satz: Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\leq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\leq 1} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =: b_n.\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir $e \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Andererseits ist für fixiertes $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq m$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

woraus für $n \to \infty$ folgt: $e \geq b_m$. Für $m \to \infty$ erhalten wir $e \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. □

Bemerkung: Allgemeiner gilt $(1+\frac{x}{n})^n \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ ($\to$ später).

Wir erhalten wegen $n! \geq 2^{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$e < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 3.$$

7.9. Umordnungen: Sei (a_n) eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Setze $b_n := a_{\varphi(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt (b_n) [bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$] eine *Umordnung* von (a_n) [bzw. von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$].

Beispiel: $(a_2, a_4, a_1, a_3, a_6, a_8, a_5, a_7, \ldots)$ ist eine Umordnung von (a_n) (aber **keine** Teilfolge von (a_n)!).

Satz: Sei (b_n) eine Umordnung von (a_n).

(1) Ist (a_n) konvergent, so konvergiert auch (b_n) und $\lim a_n = \lim b_n$.

(2) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolut** konvergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beweis. (1) Setze $a := \lim a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $|a_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) Wegen der Bemerkung in 7.4 reicht es, den Fall $a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \geq 0$ zu betrachten. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \leq \sum_{k=1}^{\max \varphi(\{1,\ldots,N\})} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{k=1}^{\max \varphi^{-1}(\{1,\ldots,N\})} b_k.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Riemannscher Umordnungssatz (ohne Beweis): Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber **nicht** absolut konvergent. Dann gibt es für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$. Es gibt außerdem divergente Umordnungen von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiele hierzu gibt es in den Übungen.

7.10. Das Cauchyprodukt: Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen. Setze für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt das *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Satz: Sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **absolut konvergent**, so ist auch ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Beweis. Auch hier reicht es, den Fall $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ zu betrachten. Es gilt dann für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \leq \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) \leq \sum_{n=0}^{2N} c_n,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Ende Do 17.11.11

Beispiel: Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolut. Das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mit sich selber ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Nach dem Satz konvergiert diese Reihe absolut und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

7.11. Die Exponentialfunktion: Da die Exponentialreihe nach 7.8 für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, können wir durch

$$E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

eine Funktion definieren, E heißt die *komplexe Exponentialfunktion*.

(0) Es gilt $E(0) = 1$.

(1) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $E(z)E(w) = E(z + w)$.

[Cauchyprodukt für $a_n = z^n/n!$ und $b_n = w^n/n!$; man hat dann

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{(z+w)^n}{n!}$$

nach dem binomischen Satz, und 7.10 gibt die Behauptung.]

(2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$, sowie $E(z)^n = E(nz)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

[Es ist $1 = E(0) = E(z + (-z)) = E(z)E(-z)$, woraus $E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$ folgt. Der Rest folgt aus (1).]

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $E(x) \in \mathbb{R}$ und $E(x) > 0$; für $x > 0$ gilt $E(x) > 1$.

[Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $E(x) \in \mathbb{R}$ klar und für $x > 0$ gilt

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{\geq 0} \geq 1 + x > 1.$$

Also ist für $x < 0$ nach (2): $E(x) = E(-x)^{-1} \in (0, 1)$.]

(4) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$.

[Ist $x < y$, so gilt nach (1) und (3):

$$E(y) = E(\underbrace{y - x}_{>0}) \underbrace{E(x)}_{>0} > E(x).]$$

(5) Es ist $\sup\{E(x) : x \in \mathbb{R}\} = \infty$ und $\inf\{E(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0$.

[Für jedes $K > 0$ gilt $E(K) \geq 1 + K > K$ (woraus die erste Behauptung folgt) und also auch $0 \leq E(-K) = E(K)^{-1} < 1/K$, woraus die zweite Behauptung folgt.]

(6) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $E(\overline{z}) = \overline{E(z)}$.

[Dies folgt aus der Definition, sowie der Tatsache, dass $w_n \to w$ für eine komplexe Folge (w_n) impliziert: $\overline{w_n} \to \overline{w}$.]

(7) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $E(x + iy) = E(x)E(iy)$ und $|E(iy)| = 1$.

[Die erste Gleichung folgt aus (1). Mittels (6), (1) und (0) gilt für $y \in \mathbb{R}$:

$$|E(iy)| = \sqrt{E(iy)\overline{E(iy)}} = \sqrt{E(iy)E(-iy)} = \sqrt{E(iy - iy)} = 1.]$$

(8) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt[n]{E(x)} = E(\frac{x}{n})$.

[Es gilt nach (2): $E(\frac{x}{n})^n = E(n\frac{x}{n}) = E(x)$.]

(9) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|E(z)| = E(\operatorname{Re} z)$.

[Nach (6), (1) und (8) ist:

$$|E(z)| = \sqrt{E(z)\overline{E(z)}} = \sqrt{E(z + \overline{z})} = \sqrt{E(2\operatorname{Re} z)} = E(\operatorname{Re} z).]$$

Bemerkung und Definition: Wegen (2), (8) und 7.8 gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$e^m = E(m), \quad \sqrt[n]{e} = E\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \sqrt[n]{e^m} = E\Big(\frac{m}{n}\Big) = \big(\sqrt[n]{e}\big)^m.$$

Man schreibt deshalb auch $e^z := E(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Eine andere Bezeichnung ist $\exp(z) := E(z)$.

Wir zeigen noch die folgenden **Abschätzungen**:

(10) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt $|E(h) - 1| \leq |h|E(|h|)$.

(11) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $|\frac{E(h)-1}{h} - 1| \leq |h|E(|h|)$.

Beweis. Es ist $E(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots$. Also

$$|E(h) - 1| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!}| \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{n!} \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{(n-1)!} = |h|E(|h|),$$

womit (10) gezeigt ist. Für $h \neq 0$ haben wir

$$|\frac{E(h)-1}{h} - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^n}{(n+1)!} \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{n!} \leq |h|E(|h|).$$

□

7.12. Sinus und Cosinus: Wir definieren die Funktionen $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad \text{und} \qquad \cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

(0) Es ist $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$. [folgt aus 7.11(0)]

(1) **Reihendarstellungen:** Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots. \end{aligned}$$

Das folgt aus

$$\begin{aligned} E(iz) &= 1 + iz - \frac{z^2}{2} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots \\ E(-iz) &= 1 - iz - \frac{z^2}{2} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + i\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots. \end{aligned}$$

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin x \in \mathbb{R}$ und $\cos x \in \mathbb{R}$, sowie

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \text{und} \qquad (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

[Aus (1) folgt $\sin x, \cos x \in \mathbb{R}$. Weiter ist

$$\operatorname{Re} e^{ix} = \frac{1}{2}(e^{ix} + \overline{e^{ix}}) = \cos x \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} e^{ix} = \frac{1}{2i}(e^{ix} - \overline{e^{ix}}) = \sin x.$$

Somit $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = |e^{ix}|^2 = 1$ nach 7.11(7).] Ende Mo 21.11.11

(3) **Additionstheoreme:** Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w, \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w. \end{aligned}$$

Das folgt sofort aus 7.11(1) (zur Übung).

Wir zeigen noch die folgenden **Abschätzungen**:

(4) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: $|\sin h| \leq |h|E(|h|)$.

(5) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: $|\cos h - 1| \leq |h|E(|h|)$.

(6) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $|\frac{\sin h}{h} - 1| \leq |h|E(|h|)$.

(7) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $|\frac{\cos h - 1}{h}| \leq |h|E(|h|)$.

Beweis. Die Abschätzungen folgen aus (10) und (11) in 7.11, wenn man beachtet:

$$\begin{aligned} \sin h &= \frac{1}{2i}(E(ih) - 1 - (E(-ih) - 1)), \\ \cos h - 1 &= \frac{1}{2}(E(ih) - 1 + (E(-ih) - 1)), \\ \frac{\sin h}{h} - 1 &= \frac{E(ih) - E(-ih)}{2ih} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{E(ih) - 1}{ih} - 1 + \frac{E(-ih) - 1}{-ih} - 1\right), \\ \frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{i}{2}\frac{E(ih) - 1 + E(-ih) - 1}{ih} = \frac{i}{2}\left(\frac{E(ih) - 1}{ih} - 1 - \left(\frac{E(-ih) - 1}{-ih} - 1\right)\right). \end{aligned}$$

□

7.13. Potenzreihen: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine *Potenzreihe (PR) um z_0* hat die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, wobei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ ist. Die a_n heißen *Koeffizienten* der Potenzreihe und z_0 heißt *Entwicklungspunkt*.

Wir nennen eine Potenzreihe *reell*, falls $z_0 \in \mathbb{R}$ und alle a_n reell sind. Betrachten wir reelle Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und wollen reelle Zahlen einsetzen, so schreiben wir häufig $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Fragen: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert eine gegebene Potenzreihe? Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert eine reelle Potenzreihe?

Beispiele: Die Potenzreihen für exp, sin und cos konvergieren für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist für $|z| < 1$ absolut konvergent und für $|z| \geq 1$ divergent.

Alle diese Reihen haben als Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

Bemerkung: Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergiert für $z = z_0$, dh im Entwicklungspunkt. Setzt man $z = z_0$ ein, erhält man nämlich $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots = a_0$.

7.14. Der Konvergenzradius: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe. Setzt man

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{(Formel von Cauchy-Hadamard)}$$

mit den Konventionen $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$[1], so gilt:

(a) Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$.

(b) Die Potenzreihe divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$.

Die Zahl R heißt *Konvergenzradius* (KR) der Potenzreihe.

Bemerkung: Im Falle $R = 0$ konvergiert die Potenzreihe also nur für $z = z_0$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Im Fall $R = \infty$ ist die Potenzreihe für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

Bemerkung: Im Fall $R \in (0, \infty)$ lässt sich für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = R$ keine allgemeine Aussage treffen:

(a) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$, sie divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(b) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat Konvergenzradius $R = 1$, für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist sie absolut konvergent.

Folgerung: (a) Konvergiert die Potenzreihe für ein $z_1 \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ und für den Konvergenzradius R gilt $R \geq |z_1 - z_0|$.

(b) Divergiert die Potenzreihe für ein $z_1 \in \mathbb{C}$, so divergiert sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ und für den Konvergenzradius R gilt $R \leq |z_1 - z_0|$.

Beispiele: (1) Die Potenzreihen für exp, sin, cos haben jeweils Konvergenzradius ∞.

(2) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$, ebenso die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n$ mit $p \in \mathbb{N}$. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ hat Konvergenzradius $R = 0$.

---

[1] Beachte, dass $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$ und dass also diese Konventionen für $1/\alpha \in [0, \infty]$ sinnvoll sind, vgl. 6.10.

Beweis des Satzes. Wir haben für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right) |z-z_0|,$$

und die Behauptungen des Satzes folgen aus dem Wurzelkriterium 7.6. $\square$

Bemerkung: Eine reelle Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mit Konvergenzradius $R \in (0,\infty]$ ist für $x \in (x_0-R, x_0+R)$ absolut konvergent und für $x \in \mathbb{R} \setminus [x_0-R, x_0+R]$ divergent. Für $x = x_0 \pm R$ ist keine allgemeine Aussage möglich!

7.15. Satz: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \to \alpha$, wobei $0 \leq \alpha \leq \infty$, so ist der Konvergenzradius $R = 1/\alpha$.

Beweis. Das folgt aus dem Quotientenkriterium (Bemerkung in 7.7). $\square$

Beispiel: Für die Exponentialreihe ist $a_n = 1/n!$, also $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{n+1} \to 0$ und $R = 1/0 = \infty$. Auf die Potenzreihen für sin und cos aus 7.12 lässt sich der Satz nicht anwenden.

Bemerkung: Hier erlauben $\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ und $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ i.a. keine Entscheidung!

Beispiel: $a_n = (\frac{2+(-1)^n}{3})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$a_n = \begin{cases} 3^{-n} & , n \text{ ungerade,} \\ 1 & , n \text{ gerade.} \end{cases} \quad \text{und} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} 3^n & , n \text{ ungerade,} \\ 3^{-n-1} & , n \text{ gerade.} \end{cases},$$

also $\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$ und $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, aber der Konvergenzradius ist $R = 1$.

7.16. Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0,\infty]$ und

$$f : (x_0-R, x_0+R) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

sowie für jedes $N \in \mathbb{N}_0$:

$$f : (x_0-R, x_0+R) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n,$$

Frage: Wie gut ist die Approximation, dh wie konvergiert f_N für $N \to \infty$ gegen f. Ende Di 22.11.11

1.Antwort: Es gilt für jedes $x \in (x_0-R, x_0+R)$: $f_N(x) \to f(x)$ $(N \to \infty)$, also

$$\forall x \in (x_0-R, x_0+R)\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N_0 \in \mathbb{N}\, \forall N \geq N_0 : |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Man sagt, "die Funktionenfolge $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* auf (x_0-R, x_0+R) gegen die Funktion f".

2. Antwort: Ist $r \in (0, R)$ und $x \in [x_0-r, x_0+r]$, so gilt

$$|f_N(x) - f(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||x-x_0|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|r^n.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$, so finden wir $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|r^n < \varepsilon$ für alle $N \geq N_0$. Es gilt dann für alle $N \geq N_0$ und alle $x \in [x_0-r, x_0+r]$:

$$|f_N(x) - f(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|r^n < \varepsilon,$$

dh wir haben gezeigt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_0 \in \mathbb{N} \, \forall N \geq N_0 \forall x \in [x_0-r, x_0+r] : |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Man sagt hierzu: "die Funktionenfolge $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *konvergiert auf* $[x_0-r, x_0+r]$ *gleichmäßig* gegen die Funktion f".

Fazit:

(a) Es gilt $f_N \to f$ punktweise auf (x_0-R, x_0+R).

(b) Für jedes $r \in (0, R)$ gilt $f_N \to f$ gleichmäßig auf $[x_0-r, x_0+r]$.

Beispiele: (1) Für jedes $r > 0$ konvergiert die durch $f_N(x) := \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$ definierte Funktionenfolge (f_N) auf $[-r, r]$ gleichmäßig gegen exp. Entsprechendes gilt für die sin- und cos-Reihen aus 7.12.

(2) Für jedes $r \in (0, 1)$ konvergiert die durch $f_N(x) := \sum_{n=0}^{N} x^n$ definierte Funktionenfolge (f_N) auf $[-r, r]$ gleichmäßig gegen die durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ definierte Funktion f. Auf $[0, 1)$ konvergiert (f_N) *punktweise* gegen f, aber **nicht gleichmäßig!**

7.17. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar: Die folgende Teilmenge C von $\mathbb{R}$ ist nämlich überabzählbar:

$$C := \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0, 2\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis. (i) Ist $a_n \in \{0, 2\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ eine konvergente Majorante ist (es gilt dabei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1$).

(ii) Wir wissen, dass die Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{0, 1\}$ überabzählbar ist (vgl. mit Beispiel 6.12(5)).

(iii) Die Abbildung
$$\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to M, \qquad (x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$$
ist bijektiv: Surjektivität von ψ ist klar. Zum Beweis der Injektivität seien $(x_n), (y_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit $(x_n) \neq (y_n)$. Dann finden wir ein minimales $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} \neq y_{n_0}$, also etwa mit $x_{n_0} = 0$ und $y_{n_0} = 1$. Es gilt dann
$$\psi((x_n)) = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{2x_n}{3^n}}_{=:a} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n} \leq a + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = a + 1/3^{n_0}$$
und
$$\psi((y_n)) = a + \frac{2}{3^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2y_n}{3^n} \geq a + 2/3^{n_0},$$
also $\psi((x_n)) < \psi((y_n))$. □

Hintergrund der Konstruktion von C im Beweis ist die *g-adische Entwicklung* reeller Zahlen, wobei $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$:

> Für jedes $x \in [0,1]$ gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{0,1,\ldots,g-1\}$ so, dass gilt:
> $$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{g^n}.$$
> Man schreibt dies dann als
> $$x = 0.a_1a_2a_3\ldots,$$
> wobei aus dem Zusammenhang klar sein muss, was g hier sein soll.

Gebräuchlich sind vor allem die *Dezimaldarstellung* ($g = 10$) und (meist im Zusammenhang mit Computern) die *Dualdarstellung* ($g = 2$). Für die Menge C haben wir $g = 3$ genommen.

Die Folge (a_n) ist nicht für jedes $x \in [0,1]$ eindeutig bestimmt, z.B. gilt
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0}{3^n}$$
(links steht $0.02222\ldots$ und rechts steht $0.10000\ldots$, wobei hier $g = 3$).

Bemerkung: C ist die *Cantormenge*, die man auch wie folgt erhält: Setze $C_0 := [0,1]$. C_1 entstehe aus C_0 durch Entfernung des offenen mittleren Drittels $(1/3, 2/3)$. C_2 entstehe aus C_1 durch Entfernen des mitteleren Drittels aus jedem verbliebenen Teilintervall, und ebenso entstehe C_{n+1} aus C_n für jedes $n \geq 2$. Man erhält eine Folge $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$ und setzt $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$.

Die einem $x \in C$ zugeordnete Folge (a_n) in $\{0, 2\}$ beschreibt für jedes $n \in \mathbb{N}$, ob x im n-ten Schritt im linken Drittel $a_n = 0$ oder im rechten Drittel $a_n = 2$ des bisherigen Intervalls zu finden ist, was man sich auch als *dyadischen Baum* vorstellen kann.

8 Stetigkeit

8.1. Definition: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt *stetig in* $x_0 \in D$, falls für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$.

Die Funktion f heißt *stetig in/auf* D, falls sie in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

8.2. Beispiele: (1) exp, sin und cos sind stetig in 0.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to 0$. Wir finden $M \in \mathbb{R}$ mit $|x_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach 7.11(10), 7.12(4) und 7.12(5) gilt

$$\left.\begin{array}{c} |E(x_n) - \underbrace{E(0)}_{=1}| \\ |\sin x_n - \underbrace{\sin 0}_{=0}| \\ |\cos x_n - \underbrace{\cos 0}_{=1}| \end{array}\right\} \le \quad |x_n| E(|x_n|) \le E(M)\,|x_n| \to 0.$$

□

(2) exp, sin und cos sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge mit $x_n \to x_0$. Dann gilt nach 7.11, 7.12 und (1):

$$\begin{aligned} |E(x_n) - E(x_0)| &= E(x_0)|E(\underbrace{x_n - x_0}_{\to 0}) - 1| \to 0, \\ |\sin(x_n) - \sin(x_0)| &= |\sin(x_n - x_0)\cos x_0 + \cos(x_n - x_0)\sin x_0 - \sin x_0| \\ &\le |\cos x_0| \underbrace{|\sin(x_n - x_0)|}_{\to 0} + |\sin x_0| \underbrace{|\cos(x_n - x_0) - 1|}_{\to 0} \to 0, \\ |\cos(x_n) - \cos(x_0)| &= |\cos(x_n - x_0)\cos x_0 - \sin(x_n - x_0)\sin x_0 - \cos x_0| \\ &\le |\cos x_0||\cos(x_n - x_0) - 1| + |\sin x_0||\sin(x_n - x_0)| \to 0. \end{aligned}$$

□

Ende Do 24.11.11

(3) Ist $p \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom, dh $p(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, so ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto p(x)$ stetig. Dies folgt aus 6.3, genauso wie der folgende Satz.

8.3. Satz: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in D$ stetig sind. Dann sind auch $f + g, f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig. Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g} : D \setminus \{x \in D : g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

Beachte: Ist g stetig in x_0 und $g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \{x \in D : g(x) = 0\} = \emptyset,$$

dh mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Beweis. Andernfalls findet man zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $g(x_n) = 0$ und $x_n \in (x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$, dh mit $|x_n - x_0| < 1/n$. Wir haben also $x_n \to x_0$ und wegen der Stetigkeit von g in x_0 auch $0 = g(x_n) \to g(x_0) \neq 0$ Widerspruch! $\square$

Beispiel: Sind $p \in \mathbb{R}[X]$ und $q \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ reelle Polynome, so ist die *rationale* Funktion

$$\frac{p}{q} : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

stetig.

8.4. Grenzwerte bei Funktionen: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ derart, dass eine Folge (x_n) in $D \setminus \{\alpha\}$ mit $x_n \to \alpha$ existiert. Wir schreiben

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta,$$

falls *für jede Folge* (x_n) in $D \setminus \{\alpha\}$ mit $x_n \to \alpha$ gilt: $f(x_n) \to \beta$.

Beispiele: Aus den Abschätzungen in 7.11 und 7.12 folgt etwa:

$$\begin{gathered}\lim_{x \to 0} E(x) = 1, \quad \lim_{x \to \infty} E(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} E(x) = 0, \\ \lim_{x \to 0} \tfrac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \tfrac{E(x)-1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \tfrac{\cos x - 1}{x} = 0.\end{gathered}$$

Bemerkung: (1) β ist in dieser Definition eindeutig bestimmt (das liegt daran, dass es *mindestens eine* Folge (x_n) in $D \setminus \{\alpha\}$ mit $x_n \to \alpha$ gibt).

(2) Der eventuell vorhandene Funktionswert $f(\alpha)$ spielt **keine** Rolle.

Definition: Ist $\alpha = x_0 \in \mathbb{R}$ und gibt es eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$, so heißt x_0 ein *Häufungspunkt von D*. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ und jede Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$x_0 \text{ ist Häufungspunkt von } D \iff \forall \delta > 0 \, U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Beispiele: 0 ist ein Häufungspunkt von $(0, 1)$ oder von $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, aber 0 ist kein Häufungspunkt von $\mathbb{Z}$.

Bemerkung: Ist $x_0 \in D$ kein Häufungspunkt von D, so gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) = \emptyset, \text{ dh mit } U_\delta(x_0) \cap D = \{x_0\}.$$

Ein solches x_0 heißt *isolierter Punkt von D*.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in jedem isolierten Punkt x_0 von D stetig.

Beweis. Ist (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$, so folgt $x_n = x_0$ für fast alle n, also $f(x_n) = f(x_0)$ für fast alle n und somit $f(x_n) \to f(x_0)$. Also ist f in x_0 stetig. $\square$

Satz: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig genau dann, wenn für jedes $x_0 \in D$, das Häufungspunkt von D ist, gilt: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Beispiel: Sei $D = [0,1] \cup \{2\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2 & , x \in [0,1) \\ 1/2 & , x = 1 \\ 0 & , x = 2 \end{cases}$.

(i) $x_0 \in [0,1)$: Ist (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$, so gilt $x_n \in [0,1)$ für fast alle n, und somit $f(x_n) = x_n^2 \to x_0^2$. Also ist f stetig in x_0.

(ii) $x_0 = 1$: Ist (x_n) eine Folge in $D \setminus \{1\}$ mit $x_n \to 1$, so gilt ebenfalls $x_n \in [0,1)$ für fast alle n, also $f(x_n) = x_n^2 \to 1$. Somit gilt $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq \frac{1}{2} = f(1)$ und f ist in $x_0 = 1$ nicht stetig.

(iii) $x_0 = 2$ ist ein isolierter Punkt von D (man nehme etwa $\varepsilon = 1/2$). Also ist f in $x_0 = 2$ stetig.

8.5. ε-δ-Kriterium: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann ist f in x_0 stetig genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass

$$\text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta\text{: } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Beweis. Es gelte "ε-δ". Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$ und $\varepsilon > 0$. Dann finden wir ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Wegen $x_n \to x_0$ gilt $|x_n - x_0| < \delta$ für fast alle n. Es folgt $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für fast alle n. Damit ist $f(x_n) \to f(x_0)$ gezeigt.

Wenn "ε-δ" nicht gilt, finden wir ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit

$$|x_n - x_0| < 1/n[= \delta] \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Es gilt dann $x_n \to x_0$, aber $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Somit ist f in x_0 nicht stetig. $\square$

Ende Mo 28.11.11

8.6. Satz zur Komposition stetiger Funktionen: Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$, $f : D_1 \to \mathbb{R}$ und $g : D_2 \to \mathbb{R}$ Funktionen. Es sei $f(D_1) \subseteq D_2$, $x_0 \in D_1$ und $y_0 := f(x_0)$. Ist f stetig in x_0 und g stetig in y_0, so ist $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in D_1 mit $x_n \to x_0$. Da f in x_0 stetig ist, folgt $y_n := f(x_n) \to f(x_0) = y_0$. Da g stetig in y_0 ist, folgt

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) = g(y_n) \to g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

Also ist $g \circ f$ in x_0 stetig. $\square$

Beispiel: Sei $p \in \mathbb{N}$. Die Funktion $g_p : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[p]{x}$ ist stetig (nach 6.5(1)). Da $f : x \mapsto x^2$ stetig ist, ist auch $x \mapsto g_2 \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ auf $\mathbb{R}$ stetig.

Die Funktion $\exp \circ (f + \sin) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x^2 + \sin x)$, ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

8.7. Stetigkeit von Potenzreihen: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius R, wobei $0 < R \leq \infty$. Dann ist die Funktion

$$f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

auf $D := (x_0 - R, x_0 + R)$ stetig.

Wir zeigen diesen Satz mithilfe des folgenden allgemeinen Satzes.

8.8. Gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$. Die Folge (f_n) konvergiere auf D gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Dann ist f in D stetig.

Beweis von Satz 8.7. Sei $r \in (0, R)$. Nach 7.16 können wir 8.8 anwenden auf $D := [x_0 - r, x_0 + r]$ und die Folge $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$, wobei

$$f_N : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x - x_0)^n.$$

Somit ist f stetig auf $[x_0 - r, x_0 + r]$. Da $r \in (0, R)$ beliebig war, ist f stetig auf $(x_0 - R, x_0 + R)$. $\square$

Beweis von Satz 8.8. Sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in D$ und $n \in \mathbb{N}$ ist dann

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Zunächst finden wir $m \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $\tilde{x} \in D$ gilt: $|f_m(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| < \varepsilon/3$. Da f_m in x_0 stetig ist, finden wir ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \varepsilon/3$. Für jedes $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ folgt dann (setze $\tilde{x} = x$ bzw $= x_0$):

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

womit Stetigkeit von f in x_0 gezeigt ist. $\square$

Wie zeigt man gleichmäßige Konvergenz? Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ mit $D \neq \emptyset$. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $D \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

(a) Findet man eine Folge (α_n) mit $\alpha_n \geq 0$ und $\alpha_n \to 0$ so, dass

$$\text{für fast alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in D\text{: } |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n,$$

so konvergiert (f_n) auf D gleichmäßig gegen f.

(b) Findet man eine Folge (c_n) mit $c_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^\infty c_n < \infty$ so, dass

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in D\text{: } |f_n(x)| \leq c_n,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ für jedes $x \in D$ absolut konvergent. Definiert man nun

$$g : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

so konvergiert die Funktionenfolge $(\sum_{n=1}^N f_n)_{N\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig gegen g. Man sagt dazu: "die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ konvergiert gleichmäßig auf D".

(c) Wenn es $x_0 \in D$ so gibt, dass $(f_n(x_0))$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert, so konvergiert (f_n) nicht punktweise gegen f, also auch nicht gleichmäßig gegen f.

(d) Sind alle f_n stetig auf D, aber f ist nicht stetig auf D, so konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f (Kontraposition von Satz 8.8).

Beispiele: (1) Die durch $f_n(x) := \frac{x^n}{n}$ definierte Funktionenfolge konvergiert auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion (wegen (a) mit $\alpha_n = \frac{1}{n}$).

(2) Die Reihe $x \mapsto \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(nx)}{n^2}$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ (wegen (b) mit $c_n = \frac{1}{n^2}$).

(3) Die durch $f_n(x) := x^n$ auf $[0,1]$ definierte Funktionenfolge konvergiert auf $[0,1]$ punktweise aber nicht gleichmäßig gegen die durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , x \in [0,1) \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

definierte Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (wegen (d)).

Bemerkung: Eine Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt (auf D)*, falls $\{g(x) : x \in D\}$ beschränkt ist, dh falls gilt

$$\sup\{|g(x)| : x \in D\} < \infty.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \iff \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\} \leq \varepsilon,$$

und somit

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig auf } D \iff \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\} \to 0.$$

Dabei ist rechts insbesondere gemeint, dass $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\} < \infty$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Die Bedingung in (a) bedeutet

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\} \leq \alpha_n,$$

und die Bedingung in (b) bedeutet

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in D\} \leq c_n,$$

so dass man nach 7.4(1) in (b) sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup\{|f_n(x)| : x \in D\} < \infty$$

hat. Es gilt noch folgendes:

(e) Sind alle f_n auf D beschränkt und gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf D, so ist f auf D beschränkt,

denn:

$$\sup\{|f(x)| : x \in D\} \leq \sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in D\} + \sup\{|f_n(x)| : x \in D\},$$

und wir finden $n \in \mathbb{N}$ so, dass das erste Supremum ≤ 1 ist. Das zweite Supremum ist endlich.

Insbesondere kann eine Folge beschränkter Funktionen nicht gleichmäßig gegen eine unbeschränkte Funktion konvergieren, dh

(e') Sind alle f_n auf D beschränkt, aber f ist auf D nicht beschränkt, so konvergiert (f_n) auf D nicht gleichmäßig gegen f.

Vergleiche mit dem Beispiel der geometrischen Reihe auf $D = [0, 1)$ in 7.16. Ende Di 29.11.11

8.9. Zwischenwertsatz (ZWS): Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Es sei y_0 *zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ (dh $y_0 \in [f(a), f(b)]$, falls $f(a) \leq f(b)$, und $y_0 \in [f(b), f(a)]$, falls $f(a) > f(b)$). Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $f(a) < f(b)$ (andernfalls betrachte $-f$ und $-y_0$). Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung (I_n) mit $I_n = [a_n, b_n]$ so, dass $b_n - a_n = (b - a)/2^n$ und $y_0 \in [f(a_n), f(b_n)]$. Setze dazu $I_0 := [a, b]$ (IA) und im Induktionsschritt $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ und

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n, c_n] & , \text{ falls } f(c_n) \geq y_0 \\ [c_n, b_n] & , \text{ falls } f(c_n) < y_0 \end{cases} .$$

Setze $x_0 = \lim_n a_n = \lim_n b_n$. Da f stetig ist, folgt $f(x_0) = \lim_n f(a_n) = \lim_n f(b_n)$ und wegen $y_0 \in [f(a_n), f(b_n)]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ dann auch $y_0 = \lim_n f(a_n) = \lim_n f(b_n)$. $\square$

Folgerung: Ist I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(I)$ ein Intervall.

Bemerkung: Eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn für alle $c, d \in J$ mit $c < d$ gilt: $[c, d] \subseteq J$.

Beweis der Folgerung. Seien $c, d \in f(I)$ mit $c < d$. Sei $y_0 \in [c, d]$. Wir finden $a, b \in I$ mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein x_0 zwischen a und b mit $f(x_0) = y_0$. Somit ist $y_0 \in f(I)$, und $[c, d] \subseteq f(I)$ ist gezeigt. □

Beispiel: Ist $p \in \mathbb{R}[X]$ ein normiertes Polynom von ungeradem Grad m, so gilt $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Beweis. Wegen des Zwischenwertsatzes reicht es zu zeigen, dass $p(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und dass $p(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$. Die Behauptungen sind klar für $m = 1$. Sei also $m \geq 3$ und $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Für $x \geq 1 + |a_{m-1}| + |a_{m-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$ gilt dann

$$\begin{aligned}
p(x) &\geq x^m - |a_{m-1}|x^{m-1} - |a_{m-2}|x^{m-2} - \ldots - |a_1|x - |a_0| \\
&\geq x^m - |a_{m-1}|x^{m-1} - |a_{m-2}|x^{m-1} - \ldots - |a_1|x^{m-1} - |a_0|x^{m-1} \\
&\geq x^{m-1} \underbrace{\left(x - (|a_{m-1}| + |a_{m-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|)\right)}_{\geq 1} \\
&\geq x^{m-1} \to \infty \quad (x \to \infty).
\end{aligned}$$

Die Aussage für $x \to -\infty$ zeigt man ähnlich. □

8.10. Einseitige Grenzwerte: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ [bzw. von $D \cap (-\infty, x_0)$]. Wir schreiben

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} \quad [\text{bzw. } \lim_{x \to x_0-} f(x) = \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}],$$

falls für jede Folge (x_n) in $D \cap (x_0, \infty)$ [bzw. in $D \cap (-\infty, x_0)$] mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to \beta$.

Im Falle der Existenz heißt $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ *rechtsseitiger Limes* und $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ heißt *linksseitiger Limes* von f in x_0.

Bemerkung: Man kann sich für den rechtsseiten Limes auf monoton fallende Folgen und für den linksseitigen Limes auf monoton wachsende Folgen (x_n) beschränken!

Schreibweisen: $\lim_{x \to x_0+0} f(x)$, $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ für $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0-0} f(x)$, $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ für $\lim_{x \to x_0-} f(x)$.

Beispiel: Sei $D = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in (0,1) \\ 0 & , x \notin (0,1) \end{cases}$. Dann gilt $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ und $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$.

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ Häufungspunkt sowohl von $D \cap (-\infty, x_0)$ als auch von $D \cap (x_0, \infty)$. f ist stetig in x_0 genau dann, wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

8.11. Monotone Funktionen und Stetigkeit: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *monoton wachsend* [bzw. *monoton fallend*], falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad [\text{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2)].$$

f heißt *streng monoton wachsend* [bzw. *streng monoton fallend*], falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad [\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2)].$$

f heißt *monoton*, falls f monoton wachsend oder monoton fallend ist, und f heißt *streng monoton*, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Beispiele: $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.
Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht monoton.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ ist monoton wachsend, aber *nicht streng* monoton wachsend.

Satz: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend [bzw. fallend].

(a) Dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend [bzw. fallend].

(b) Ist f zusätzlich stetig, so ist $f(I)$ ein Intervall und $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis. zu (a): Injektivität ist klar. Ist f streng monoton wachsend, erhalten wir durch Kontraposition:

$$\forall x_1, x_2 \in I : \; f(x_1) \geq f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 \geq x_2,$$

woraus strenge Monotonie von f^{-1} folgt.

zu (b): Wir verwenden 8.10 zum Nachweis der Stetigkeit. Sei $y_0 = f(x_0) \in f(I)$ und $(y_n) = (f(x_n))$ eine monotone Folge mit $y_n \to y_0$. Nach (a) ist dann auch (x_n) eine monotone Folge, die durch x_1 und x_0 beschränkt ist, und somit gegen ein $\alpha \in I$ konvergiert. Da f stetig ist, folgt $y_n = f(x_n) \to f(\alpha)$. Somit ist $f(\alpha) = y = f(x_0)$ und $x_0 = \alpha$, und wir haben $f^{-1}(y_n) = x_n \to x_0 = f^{-1}(y_0)$ gezeigt. $\square$

8.12. Der Logarithmus: Es gilt $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Die Abbildung $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv und stetig.

Ende Do 01.12.11

Definition: Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ heißt (*natürlicher*) *Logarithmus* $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dh also $\log x := \ln x := E^{-1}(x)$ für $x \in (0, \infty)$.

Somit ist $\log(E(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $E(\log y) = y$ für alle $y \in (0, \infty)$.

Eigenschaften: log ist streng monoton wachsend und stetig. Es gilt $\log((0, \infty)) = \mathbb{R}$, $\log(1) = 0$ und $\log(e) = 1$, sowie $\log x \to \infty$ für $x \to \infty$ und $\log x \to -\infty$ für $x \to 0+$.

Für alle $x, y > 0$ gilt

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad \text{und} \quad \log(x/y) = \log x - \log y.$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} E(\log x + \log y) &= E(\log x)E(\log y) = xy = E(\log(xy)), \\ E(\log x - \log y) &= E(\log x)E(-\log y) = xE(\log y)^{-1} = x/y = E(\log(x/y)). \end{aligned}$$

8.13. Die allgemeine Potenz: Wir definieren für $a > 0$ die allgemeine Potenz:

$$a^x := E(x \log a) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Nach 7.11 stimmt dies für $x \in \mathbb{Z}$ mit der bisherigen Definition überein. Für $x = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist (ebenfalls nach 7.11) $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Für $x = p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ folgt aus 7.11:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Für $a = e$ erhalten wir $e^x = E(x)$ wie in 7.11. Wir schreiben in Zukunft in der Regel e^x statt $E(x)$.

Eigenschaften: Für $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $a^x > 0$;

(2) die Funktion $x \mapsto a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig (wegen 8.6);

(3) $a^{x+y} = e^{(x+y)\log a} = e^{x \log a} e^{y \log a} = a^x a^y$;

(4) $a^{-x} = e^{-x \log a} = (e^{x \log a})^{-1} = (a^x)^{-1} = 1/a^x$;

(5) $\log(a^x) = \log(E(x \log a)) = x \log a$;

(6) $(a^y)^x = e^{x \log(a^y)} \overset{(5)}{=} e^{xy \log a} = a^{xy}$.

(7) $(ab)^x = e^{x \log(ab)} \overset{8.12}{=} e^{x \log a} e^{x \log b} = a^x b^x$.

Der allgemeine Logarithmus: Sei $a > 1$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto a^x$, streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

Die Umkehrfunktion $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt *Logarithmus zur Basis a*. Es ist also $\log_a(a^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a^{\log_a y} = y$ für alle $y \in (0, \infty)$.

Satz: Für alle $y \in (0, \infty)$ gilt $\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$.

Denn $a^{\frac{\log y}{\log a}} = E(\frac{\log y}{\log a} \log a) = E(\log y) = y$.

8.14. Abgeschlossene und kompakte Mengen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

D heißt *abgeschlossen*, falls für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $x_0 \in D$.

Beispiele: (1) Folgende Mengen sind abgeschlossen: $\mathbb{R}$,

$$\emptyset,\ [a, b],\ (-\infty, a],\ [a, \infty),\ \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

(2) Folgende Mengen sind nicht abgeschlossen:

$$(a, b),\ (a, b],\ [a, b),\ (a, \infty),\ (-\infty, a),\ \{1/n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Bemerkung: D ist abgeschlossen genau dann, wenn jeder Häufungspunkt von D zu D gehört.

Definition: D heißt *kompakt*, falls jede Folge (x_n) in D eine Teilfolge enthält, die gegen ein $x_0 \in D$ konvergiert.

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$D \text{ ist kompakt} \iff D \text{ ist abgeschlossen und beschränkt.}$$

Beweis. Ist D kompakt und (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}$, so hat (x_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in D. Also ist $x_0 \in D$, und D ist abgeschlossen. Ist D nicht beschränkt, so finden wir eine streng monotone Folge (x_n) in D mit $|x_n| \to \infty$. Diese enthält keine konvergente Teilfolge, und D ist nicht kompakt.

Sei umgekehrt D abgeschlossen und beschränkt und (x_n) eine Folge in D. Nach Bolzano-Weierstraß hat (x_n) eine Teilfolge, die gegen ein $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert. Da D abgeschlossen ist, gilt $x_0 \in D$. Somit ist D kompakt. $\square$

Beispiele: $\emptyset$, $[a, b]$ und $[1, 2] \cup [3, 4]$ sind kompakt.

8.15. Satz: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, D kompakt, sowie $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(D)$ kompakt und es gibt $x_1, x_2 \in D$ mit

$$\text{für alle } x \in D \text{ gilt: } f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

(dh "f nimmt auf D Maximum und Minimum an").

Beweis. Sei $(y_n) = (f(x_n))$ eine Folge in $f(D)$. Dann ist (x_n) Folge in D und es gibt eine Teilfolge $(x_{k(n)})$, die gegen ein $x_0 \in D$ konvergiert. Da f stetig ist, folgt $y_{k(n)} = f(x_{k(n)}) \to f(x_0) \in f(D)$. Somit ist $f(D)$ kompakt. $\square$

Folgerung: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \leq d$ und $f([a, b]) = [c, d]$. (Verwende außerdem 8.9.)

Beispiel: $D = [1, 53]$ und $f(x) := x^3 \sin(e^x + \log x)$.

9 Trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen

9.1. Die Zahl π: Wir beginnen mit einer **Vorbetrachtung** und interessieren uns für Nullstellen der Cosinus-Funktion. Nach 7.12 gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Die Reihe ist alternierend. Wie beim Leibnizkriterium 7.5 können wir durch Abbrechen der Reihe bei $n = n_0$ Abschätzungen nach oben oder nach unten angeben, wenn nur die Folge $(x^{2n}/(2n)!)_{n \geq n_0}$ monoton fallend ist. Wegen

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} \geq \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \Leftrightarrow (2n+2)(2n+1) \geq x^2$$

gilt dies für $n_0 = 1$, wenn $x^2 \leq 12$, dh $|x| \leq 2\sqrt{3}$ ist.
Also gilt für alle $x \in [0, 2\sqrt{3}]$:

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \geq \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Insbesondere ist $\cos \sqrt{2} \geq 0$ und $\cos(\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{3}}) \leq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz 8.9 gibt es mindestens ein $x_0 \in [\sqrt{2}, \sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}]$ mit $\cos x_0 = 0$. Ende Mo 05.12.11

Definition: Wir definieren $\pi/2$ als die kleinste Nullstelle des Cosinus im Intervall $[0, 2]$, also

$$\frac{\pi}{2} := \inf\{x_0 \in [0, 2] : \cos x_0 = 0\}.$$

Beachte: Es gilt

$$\sqrt{2} \leq \pi/2 \leq \sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{3}} < 2 < 2\sqrt{3}$$

und $\sqrt{2} \approx 1.41421$, sowie $\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{3}} \approx 1.59245$.

Bemerkung: Nach 7.12 gilt

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Argumente in der Vorbetrachtung zeigen dann

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \geq 0 \quad \text{für alle } x \in [0, \sqrt{6}].$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt also $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

9.2. Eigenschaften: Aus den Additionstheoremen in 7.12 erhalten wir:

(1) $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$;

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x+\pi) = -\sin x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$;

(3) $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$;

(4) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ (dh sin und cos sind 2π-*periodisch*).

(5) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(\pi+x) = -\sin(\pi-x)$, $\cos(\pi+x) = \cos(\pi-x)$;

(6) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$, $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\cos(\frac{\pi}{2}-x)$;

(7) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Hieraus können wir alle Nullstellen von sin und cos bestimmen:

(8) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

(9) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = k\pi$.

(10) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $\cos(k\pi) = (-1)^k$ und $\sin((2k+1)\pi/2) = (-1)^k$.

Schließlich geben wir noch an:

(11) $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Außerdem erinnern wir an:

(12) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$.

9.3. Monotonie bei sin **und** cos**:** Es reicht, die Funktionen auf dem Intervall $[0,\pi/2]$ zu betrachten. Dabei ist $\sin x > 0$ für $x \in (0,\pi/2]$ und $\cos x > 0$ für $x \in [0,\pi/2)$. Für $x, x+h \in [0,\pi/2]$ mit $h > 0$ gilt also

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \underbrace{\sin x \sin h}_{>0} < \cos x,$$

dh cos **ist auf** $[0,\pi/2]$ **streng monoton fallend**.

Folglich ist $\sin x$ auf $[0,\pi/2]$ streng monoton wachsend (wegen $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ für $x \in [0,\pi/2]$).

9.4. Arcussinus und Arcuscosinus: Wegen 9.3 und 9.2(6) ist $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ streng monoton fallend, nach 8.2(2) ist diese Abbildung stetig und wegen 8.11 ist sie bijektiv.

Die Umkehrabbildung $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ heißt *Arcuscosinus*.

Eigenschaften: $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ ist streng monoton fallend, stetig und bijektiv. Es gilt $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos 1 = 0$.

Wegen 9.3 und 9.2(12) ist $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ streng monoton wachsend. Auch diese Funktion ist stetig und bijektiv.

Die Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ heißt *Arcussinus*.

Eigenschaften: Die Funktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Es gilt $\arcsin(1) = \pi/2$, $\arcsin 0 = 0$ und $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ für alle $x \in [-1, 1]$.

Achtung! Wegen 9.2 sind für jedes $k \in \mathbb{Z}$ auch die Abbildungen

$$\cos : [k\pi, (k+1)\pi] \to [-1, 1], \qquad \sin : [(2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2] \to [-1, 1]$$

streng monoton, stetig und bijektiv. Für $k \neq 0$ sind ihre Umkehrabbildungen verschieden von den eben definierten Funktionen arccos und arcsin!

9.5. Der Tangens: Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

heißt *Tangens*. (Beachte, dass die Menge $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ genau die Nullstellen des Cosinus enthält.)

Eigenschaften: Es gilt $\tan 0 = 0$, $\tan \pi/4 = 1$, sowie für alle x im Definitionsbereich, dh für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$:

$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \tan(x + \pi) = \tan x.$$

Somit ist der Tangens eine π-periodische Funktion.

Außerdem ist tan auf $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton wachsend mit $\tan x \to \infty$ für $x \to \pi/2-$ und $\tan x \to -\infty$ für $x \to -\pi/2+$.

Folglich ist $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ heißt *Arcustangens*. Ende Di 06.12.11

Eigenschaften: Es gilt $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \pi/4$ und $\arctan(-x) = -\arctan x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Sei $k \in \mathbb{Z}$. Man sieht leicht, dass die Umkehrabbildung von $\tan : (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2) \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$\mathbb{R} \to (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2), x \mapsto k\pi + \arctan x.$$

9.6. Anwendung (Polarkoordinaten): Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $r \in (0, \infty)$ und genau einen Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = re^{i\varphi}$. Dabei heißt $r = |z|$ *Länge von* z und $\varphi =: \arg z$ heißt das *Argument von* z.

Satz: Für jedes Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a^2 + b^2 = 1$ gibt es genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $\cos\varphi = a$ und $\sin\varphi = b$.

Bemerkung: Dabei ist $\varphi = \arcsin b$, falls $a \geq 0$ ist, und $\varphi = \arccos a$, falls $b \geq 0$ ist. Sind $a, b < 0$, so ist $\varphi = \arccos|a| - \pi = \arcsin|b| - \pi$.

Alternativ hat man $\varphi = \arctan(b/a)$ für $a > 0$, $\varphi = b\pi/2$ für $a = 0$ (dann $b \in \{-1, 1\}$), sowie $\varphi = \pi + \arctan(b/a)$ für $a < 0$, $b \geq 0$, und $\varphi = -\pi + \arctan(b/a)$ für $a, b < 0$.

Bemerkung: Es gilt $e^{i\psi} = 1$ genau dann, wenn $\psi \in 2\pi\mathbb{Z}$ ist. Insbesondere gibt es zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ unendlich viele $\psi \in \mathbb{R}$ mit $z = |z|e^{i\psi}$.

Multiplikation komplexer Zahlen: Seien $z = re^{i\varphi}, w = se^{i\psi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\varphi, \psi \in (-\pi, \pi]$. Dann gilt

$$zw = rse^{i(\varphi+\psi)},$$

dh Multiplikation mit w dreht z um den Winkel $\psi = \arg w$. Ist aber $\varphi + \psi \notin (-\pi, \pi]$, so ist $\arg z + \arg w \neq \arg(zw)$!

9.7. Hyperbelfunktionen: Definiere für $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

(*Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus*).

Dann gilt $\cosh 0 = 1$ und $\sinh 0 = 0$, sowie

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cosh(-x) = \cosh x, \quad \sinh(-x) = -\sinh x.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \cosh x \to \infty, \quad \sinh x \to \infty \quad &\text{für} \quad x \to \infty \\ \cosh x \to \infty, \quad \sinh x \to -\infty \quad &\text{für} \quad x \to -\infty, \end{aligned}$$

sowie

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Reihendarstellungen: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Folgerung: Die Funktionen

$$\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty) \quad \text{und} \quad \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sind streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

Additionstheoreme: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y. \end{aligned}$$

Definition: Die Funktion

$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

heißt *Tangens hyperbolicus.*

Es ist $\tanh(-x) = -\tanh x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\tanh 0 = 0$. Außerdem gilt $\tanh x \to 1$ für $x \to \infty$ und $\tanh x \to -1$ für $x \to -\infty$.

Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

9.8. Areafunktionen: Die Umkehrfunktionen von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ und $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ heißen $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*Areasinus*), $\operatorname{Arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ (*Areacosinus*) und $\operatorname{Artanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ (*Areatangens*). Diese Funktionen sind jeweils streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

9.9. Weitere Funktionen: Es gibt noch weitere Funktionen, auf die wir hier nicht näher eingehen, z.B. $\cot x = 1/\tan x$, $\sec x = 1/\cos x$, $\operatorname{sech} x = 1/\cosh x$ etc.

Ende Do 08.12.11

10 Differentialrechnung

In diesem Abschnitt sei $I \subseteq \mathbb{R}$ stets ein Intervall.

10.1. Differenzierbarkeit: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

Idee: Approximation von f “in der Nähe von x_0” durch eine *lineare* Funktion (da lineare Funktionen leichter zu behandeln sind):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \approx f(x_0) + a(x - x_0).$$

Anschaulich sollte dafür a die “Steigung” von f in x_0 sein.

Definition: f heißt in $x_0 \in I$ *differenzierbar* (*dbar*), falls der Limes $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt *die Ableitung von f in x_0*, Bezeichnung: $f'(x_0)$.

Die Funktion f heißt *auf I differenzierbar*, falls f in jedem $x \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, die *Ableitung von f auf I*.

Bemerkung: Es ist $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Außerdem ist $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 \,\forall x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|.$$

Beispiele: (1) $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \in \mathbb{R}$, ist auf I differenzierbar mit $f' = 0$ auf I.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ **nicht** differenzierbar, denn für $h \neq 0$ ist

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & , h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

Also existiert $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ nicht.

(3) $I = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$. f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $x \neq x_0$ ist nämlich nach 4.11(1)

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \to n x_0^{n-1} \ (x \to x_0).$$

(4) exp, sin, cos, sinh, cosh sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$. Für $x, h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$ gilt nämlich nach 7.11(1) und 8.4:

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} \to e^x \ (h \to 0),$$

sowie nach 7.12(3) (Additionstheoreme) und 8.4:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cosh h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \sin x\underbrace{\frac{\cosh -1}{h}}_{\to 0}+\cos x\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}\to\cos x\ (h\to 0).\end{aligned}$$

Die Beweise für cos, sinh und cosh sind analog.

Satz: Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Beweis. Da I ein Intervall ist, ist $x_0 \in I$ Häufungspunkt von I. Für $x \in I \setminus \{x_0\}$ ist dann

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\to f'(x_0)\cdot 0=0\ (x\to x_0).$$

Also ist f in x_0 stetig. □

10.2. Ableitungsregeln: Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in I$ differenzierbar sind, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $\alpha f+\beta g$ ist differenzierbar in $x_0 \in I$ und

$$(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0).$$

(2) fg ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0) \qquad \textit{Produktregel.}$$

(3) Ist $g(x_0)\neq 0$, so gibt es ein $\delta>0$ mit $g(x)\neq 0$ für alle $x\in I\cap U_\delta(x_0)=: J$. Die Funktion $\frac{f}{g}: J\to\mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \textit{Quotientenregel.}$$

Beweis. (1) ist klar wegen 6.3 und 8.4.

(2) Für $x \in I\setminus\{x_0\}$ gilt

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

woraus für $x\to x_0$ die Behauptung folgt (beachte, dass $g(x)\to g(x_0)$ für $x\to x_0$, da g nach 10.1 in x_0 stetig ist).

(3) Wegen (2) reicht $f = 1$. Die Existenz von δ erhalten wir aus 8.3, da g in x_0 stetig ist. Beachte, dass J ein Intervall ist. Für $x \in J \setminus \{x_0\}$ ist

$$\frac{1/g(x) - 1/g(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}}{g(x)g(x_0)},$$

woraus für $x \to x_0$ die Behauptung folgt. Wieder beachte man $g(x) \to g(x_0)$ für $x \to x_0$. $\square$

Beispiele: $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ und $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$ sind auf $\mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \pi/2)$ bzw. auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt:

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 \text{ auf } \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \pi/2), \quad \tanh' = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 \text{ auf } \mathbb{R}.$$

Es ist nämlich

$$\tan' = (\frac{\sin}{\cos})' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 .$$

Der Beweis für tanh ist analog.

10.3. Kettenregel: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar und $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $f(I) \subseteq J$. Sei $g : J \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

("äußere Ableitung mal innere Ableitung").

Beweis. Die Idee ist zu schreiben

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da man dabei eventuell durch Null dividiert, setzen wir

$$q : J \to \mathbb{R}, q(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & , y \neq y_0 \\ g'(y_0) & , y = y_0 \end{cases} .$$

Dann gilt $q(y) \to g'(y_0)$ für $y \to y_0$, also auch $q(f(x)) \to g'(f(x_0))$ für $x \to x_0$, da f in x_0 stetig ist. Außerdem gilt $g(y) - g(y_0) = q(y)(y - y_0)$ für **alle** $y \in J$, also

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = q(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad (x \to x_0).$$

$\square$

Beispiel: Sei $a > 0$ und $h(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist h auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$h'(x) = (a^x)' = a^x \log a.$$

10.4. Satz über die Umkehrfunktion: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf I. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Nach 8.9 ist $f(I)$ ein Intervall. Sei $y \in f(I)$ und $x := f^{-1}(y)$. Dann gilt

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} \quad (y \to y_0),$$

da wegen der Stetigkeit von f^{-1} aus $y \to y_0$ folgt $x \to x_0$. □

Ende Mo 12.12.11

Beispiele: Die Funktionen $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{Artanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar. Dabei ist log die Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$ und $f'(x) = e^x$, also

$$\log' y = (e^{\log y})^{-1} = \frac{1}{y} \quad \text{für jedes } y > 0.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \arctan'(y) &= \frac{1}{1+y^2}, \quad \operatorname{Arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \quad y \in \mathbb{R} \\ \operatorname{Artanh}'(y) &= \frac{1}{1-y^2}, \quad |y| < 1. \end{aligned}$$

Die Funktionen $\arcsin : (-1, 1) \to (-\pi/2, \pi/2)$, $\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi)$ und $\operatorname{Arcosh} : (1, \infty) \to (0, \infty)$ sind differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \arcsin'(y) &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad |y| < 1 \\ \operatorname{Arcosh}'(y) &= \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \quad y > 1. \end{aligned}$$

Anwendung: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Beweis. Für $n > -x$ ist die linke Seite $= \exp(n \log(1 + \frac{x}{n}))$. Also reicht zu zeigen

$$n \log(1 + \frac{x}{n}) \to x \quad (n \to \infty).$$

Das ist klar für $x = 0$. Für $x \neq 0$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + \frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1 + h) - \log 1}{h} = \log'(1) = \frac{1}{t}\Big|_{t=1} = 1,$$

woraus die Behauptung folgt. □

10.5. Lokale Extremstellen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ mit $D \neq \emptyset$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.

Definition: g hat in x_0 ein *lokales Maximum* [*Minimum*], falls es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\forall x \in D \cap U_\delta(x_0) : g(x) \leq g(x_0) \quad [\text{ bzw. } g(x) \geq g(x_0)],$$

dh $\forall x \in D$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow g(x) \leq g(x_0)$ [bzw. $g(x) \geq g(x_0)$].

Ein lokales Maximum/Minimum wird auch als *relatives Maximum/Minimum* bezeichnet.

Ein *relatives* oder *lokales Extremum* ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

10.6. Satz: Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar. Gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq I$, so ist $f'(x_0) = 0$.

Bemerkung: Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge, so heißen Punkte $x_0 \in M$, für die es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq M$ gibt, *innere Punkte von* M.

Da I ein Intervall ist, ist $x_0 \in I$ genau dann ein innerer Punkt von I, wenn $x_0 \notin \{\sup I, \inf I\}$ gilt.

Beweis des Satzes. Wir nehmen an, dass f in x_0 ein lokales Maximum hat (sonst betrachte $-f$). Wir können weiter annehmen, dass das δ aus 10.5 mit dem δ aus dem Satz übereinstimmt (sonst betrachte das Minimum von beiden). Für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ gilt dann $f(x) \leq f(x_0)$, also $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ und damit $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$ und $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, woraus $f'(x_0) \geq 0$ folgt. □

10.7. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS): Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $f(a) = f(b)$. Nach 8.15 finden wir $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ für alle $x \in [a, b]$. Somit hat f in x_1 ein lokales Minimum und in x_2 ein lokales Maximum.

Fall 1, $x_1 \in (a, b)$: Dann wenden wir 10.6 an und erhalten $f'(x_1) = 0$.

Fall 2, $x_1 \in \{a, b\}$, $x_2 \in (a, b)$: Wir wenden 10.6 an und erhalten $f'(x_2) = 0$.

Fall 3, $x_1, x_2 \in \{a, b\}$: Dann ist f konstant und $f'(x) = 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Im allgemeinen Fall setzen wir $g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ für $x \in [a, b]$ und wenden das Gezeigte auf g an (es ist $g(a) = f(a) = g(b)$). Wir erhalten $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

wie gewünscht. □

10.8. Folgerungen: Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar.

(1) f ist auf I konstant $\iff f' = 0$ auf I.

(2) Ist $f' = g'$ auf I, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$ auf I.

(3) Ist $f' \ge 0$ [bzw. $f' \le 0$, $f' > 0$, $f' < 0$] auf I, so ist f auf I monoton wachsend [bzw. monoton fallend, streng monoton wachsend, streng monoton fallend].

Beweis. (1) "$\Leftarrow$": Nach MWS ist $f(b) = f(a)$ für alle $a, b \in I$.

(2) Wende (1) an auf $f - g$.

(3) Ist $f' \ge 0$ auf I, so gilt für $x, y \in I$ mit $x < y$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \ge 0$$

für ein $\xi \in (x, y)$. Es folgt $f(y) \ge f(x)$. Die anderen Aussagen beweist man analog. □

Anwendung: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\phi : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $\phi' = a\phi$ auf I, sowie $x_0 \in I$. Dann gilt $\phi(x) = \phi(x_0)e^{a(x-x_0)}$ für jedes $x \in I$: Setzt man $\psi(x) := \phi(x)e^{-ax}$, $x \in I$, so ist nämlich ψ differenzierbar auf I mit $\psi' = 0$ auf I, und somit

$$\phi(x)e^{-ax} = \psi(x) = \psi(x_0) = \phi(x_0)e^{-ax_0} \text{ für jedes } x \in I.$$

Somit hat für feste $x_0 \in I$, $c \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$y' = ay \ \text{ auf } I, \quad y(x_0) = c,$$

genau eine differenzierbare Lösung $\phi : I \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\phi(x) = ce^{a(x-x_0)}$, $x \in I$.

Bemerkung und Definition: Man kann schon an der Gleichung $y' = ay$ sehen, dass für eine differenzierbare Lösung $\phi : I \to \mathbb{R}$ die Ableitung $\phi' : I \to \mathbb{R}$ auf I stetig ist. Wir nenen eine solche Funktion *stetig differenzierbar* und bezeichnen den Raum aller auf I stetig differenzierbaren Funktionen mit $C^1(I)$. Den Raum aller auf I stetigen Funktionen bezeichnen wir mit $C(I)$ oder $C^0(I)$. Dh

$$\begin{aligned} C(I) &= \{f : I \to \mathbb{R} : \ f \text{ auf } I \text{ stetig } \}, \\ C^1(I) &= \{f : I \to \mathbb{R} : \ f \text{ auf } I \text{ differenzierbar, } f' \in C(I) \ \}. \end{aligned}$$

Ende Di 13.12.11

In 10.1 bei der Definition der Differenzierbarkeit haben wir gesagt, dass sich die lineare Approximation einer Funktion oft leichter behandeln lässt als die Funktion selber. Das folgende ist dafür ein Beispiel.

10.9. Das Newton-Verfahren: Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, für die man eine *Nullstelle* berechnen möchte, dh also ein $x^* \in I$ mit $f(x^*) = 0$ (wir nehmen an, dass f in I *genau eine* Nullstelle hat).

Zu einem gewählten *Startwert* $x_0 \in I$ betrachtet man statt f die linearisierte Funktion $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ und bestimmt für diese eine Nullstelle x_1. Dies ist möglich, wenn $f'(x_0) \neq 0$ ist; dann ist $x_1 = x_0 - f'(x_0)^{-1} f(x_0)$.

Man hofft, dass x_1 eine Näherung für x^* ist, und bestimmt rekursiv

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

(unter der Voraussetzung, dass immer $f'(x_k) \neq 0$ ist), in der Hoffnung, dass die Folge (x_k) gegen x^* konvergiert.

Bemerkung: (1) Das Newton-Verfahren konvergiert unter den Voraussetzungen $f \in C^1(I)$ und $f'(x^*) \neq 0$ im allgemeinen nur, wenn x_0 schon genügend nahe bei x^* liegt, dann jedoch "schnell".

(2) Wenn $f \in C^1(I)$ ist mit $f'(x^*) \neq 0$ und (x_k) konvergiert, so ist $\lim x_k$ eine Nullstelle von f.

Satz: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x^* \in I$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) > 0$. Ist $x_0 > x^*$ und f' auf $[x^*, x_0]$ monoton wachsend, so konvergiert das Newton-Verfahren gegen x^*.

Beweis. Wie man leicht sieht, gilt $x_k \geq x^*$ für jedes k. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - f'(x_k)^{-1} f(x_k)$$

und nach dem MWS

$$f(x_k) = f(x_k) - f(x^*) = f'(\xi)(x_k - x^*)$$

für ein $\xi \in (x^*, x_k)$, also

$$x_{k+1} - x^* = (1 - f'(\xi)/f'(x_k))(x_k - x^*) \leq \underbrace{(1 - f'(x^*)/f'(x_0))}_{=:\alpha\in[0,1)}(x_k - x^*).$$

Wir erhalten $x_k - x^* \leq \alpha^k(x_0 - x^*) \to 0$ für $k \to \infty$. □

Beispiel: $m \in \mathbb{N}$, $a > 0$ und $f(x) = x^m - a$. Für jeden Startwert $x_0 > \sqrt[m]{a}$ konvergiert das Newton-Verfahren gegen $\sqrt[m]{a}$.

10.10. Verallgemeinerter Mittelwertsatz: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gilt $g(a) \neq g(b)$ und es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis. Wäre $g(b) = g(a)$, so gäbe es nach dem MWS ein $\eta \in (a, b)$ mit $g'(\eta) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Definiere $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Dann ist h stetig und auf (a, b) differenzierbar mit

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$$

und

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x).$$

Die Behauptung folgt aus dem MWS, angewandt auf h. □

10.11. Die Regeln von de l'Hospital: Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf (a, b) differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Weiter sei $\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

(a) Ist $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$, so gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to L \quad (x \to b).$$

(b) Ist $\lim_{x\to b} g(x) = \pm\infty$, so gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to L \quad (x \to b).$$

Beweis. nur (a): Für $b \in \mathbb{R}$ setze $f(b) = g(b) = 0$ und verwende 10.10 auf $[x, b]$. Für $b = \infty$ betrachte $F(x) := f(1/x)$, $G(x) := g(1/x)$. $\square$

Beispiele: (1) Für $a, b > 0$ gilt

$$\lim_{x \to 0+} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b.$$

(2) Es ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

(3) Es ist

$$\lim_{x \to 0+} x \log x = \lim_{x \to 0+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0.$$

(4) Aus (3) folgt mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion:

$$\lim_{x \to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} e^{x \log x} = e^0 = 1.$$

Bemerkung: Hier ist es jeweils so, dass erst die Existenz des letzten Limes die Existenz des ersten Limes garantiert (vgl. die Regeln oben).

Der folgende Satz kann in Anwendungen nützlich sein.

10.12. Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in (a, b)$. Weiter sei f auf (a, x_0) und (x_0, b) differenzierbar. Existiert der Grenzwert $\alpha := \lim_{x \to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$ und ist f in x_0 stetig, so ist f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = \alpha$ und f' ist in x_0 stetig.

Ende Do 15.12.11

Beweis. Für $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi(x))$$

für ein $\xi(x)$ zwischen x und x_0. Für $x \to x_0$ hat man $\xi(x) \to x_0$ und also $f'(\xi(x)) \to \alpha$ nach Voraussetzung. $\square$

Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} x^{-2} e^{-1/x} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}.$$

Wegen $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{-1/x} = 0$ ist f in 0 stetig. Wegen $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} x^{-2}e^{-1/x} = \lim_{s\to\infty} s^2 e^{-s} = 0$ [2] ist f nach dem Satz in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$ und f' ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Beispiel zur Warnung: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. In Punkten $x_0 \neq 0$ ist dies klar und es gilt

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), \quad x \neq 0.$$

Wir untersuchen f auf Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$: Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin(1/x), \quad \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = |x||\sin(1/x)| \leq |x| \to 0 \ (x \to 0),$$

also ist f in 0 differenzierbar und $f'(0) = 0$. Man beachte, dass der Limes $\lim_{x\to 0} f'(x)$ nicht existiert!

10.13. Höhere Ableitungen: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei auf I differenzierbar.

Definition: (a) f heißt in $x_0 \in I$ *zweimal differenzierbar*, falls f' in x_0 differenzierbar ist. Dann heißt

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

die 2. *Ableitung von f in x_0*.

f heißt auf I *zweimal differenzierbar*, falls f' auf I differenzierbar ist. Dann heißt $f'' = (f')'$ *zweite Ableitung von f auf I*.

Entsprechend definiert man im Falle der Existenz $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$ etc. bzw. f''', $f^{(4)}$, ...

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. f heißt *auf I n-mal stetig differenzierbar*, falls f auf I n-mal differenzierbar ist und $f, f', f'', \ldots, f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ stetig sind. Dafür schreiben wir $f \in C^n(I)$.

Außerdem: $f \in C^0(I) = C(I)$, falls f auf I stetig ist, und $f \in C^\infty(I)$, falls $f \in C^n(I)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dh wenn f auf I beliebig oft differenzierbar ist.

Beispiele: (1) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Hier ist $f^{(n)}(x) = e^x$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

(2) Es gilt $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$. Hier ist $\sin' = \cos$, $\sin'' = \cos' = -\sin$, $\sin''' = -\sin' = -\cos$ und $\sin^{(4)} = -\cos' = \sin$, etc. Genauso sind $\sinh, \cosh \in C^\infty(\mathbb{R})$.

[2] Man kann via 10.11 zeigen, dass $\lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{e^s} = 0$ ist. Eine andere Möglichkeit ist die Abschätzung $e^s = \sum_{k=0}^\infty s^k/k! \geq s^3/3!$ für $s > 0$, aus der folgt $0 \leq s^2 e^{-s} \leq 3!/s \to 0$ für $s \to \infty$. Allgemeiner gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\lim_{s\to\infty} s^n e^{-s} = 0$.

(3) Für die Funktion f aus dem Beispiel in 10.12 gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$: Es ist klar, dass f auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ beliebig oft differenzierbar ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-1/x} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases},$$

wobei p_n ein Polynom ist (für $n = 1$ ist $p_1(s) = s^2$ und also $p_1(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}$, vgl. Beispiel in 10.12 oben; die allgemeine Aussage zeigt man durch Induktion nach n: Ist p_n gefunden mit $f^{(n)}(x) = p_n(1/x)e^{-1/x}$ für $x > 0$, so haben wir

$$f^{(n+1)}(x) = p_n'(1/x) \cdot (-x^{-2})e^{-1/x} + p_n(1/x)e^{-1/x} \cdot x^{-2},\ x > 0,$$

also $p_{n+1}(s) = -s^2 p_n'(s) + s^2 p_n(s)$). Wir wenden den Satz jetzt wiederholt an (dh sukzessive auf f, f', f'', etc.), wobei wir beachten, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x \to 0+} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0+} p_n\Big(\frac{1}{x}\Big)e^{-1/x} = \lim_{s \to \infty} p_n(s)e^{-s} = 0.$$

Wir erhalten so, dass f, f', f'', etc. auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind.

10.14. Satz von Taylor: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^n(I)$ und $f^{(n)}$ sei auf I differenzierbar. Seien $x, x_0 \in I$. Dann gibt es ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{n\text{-tes Taylorpolynom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{\text{Restglied}}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für $n = 0$ ist das der Mittelwertsatz.

Definition: Für $n \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir

$$T_n(f; x_0)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad x \in I,$$

für das n-te Taylorpolynom von f bei Entwicklung um x_0.

Beweis des Satzes. Es reicht $x_0 = 0$. Wir definieren $g : I \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Dann ist $g \in C^n(I)$ mit $g^{(j)}(0) = 0$ für $j = 0, 1, \ldots, n$ und $g^{(n)} = f^{(n)}$ ist auf I differenzierbar. Wir setzen $h(x) := x^{n+1}/(n+1)!$, dann ist $h \in C^{n+1}(I)$ mit $h^{(j)}(0) = 0$, $h^{(j)} \neq 0$ Ende Mo 19.12.11

auf $I \setminus \{0\}$ für $j = 0, 1, \ldots, n$ und $h^{(n+1)} = 1$. Wir wenden nun wiederholt 10.10 an: Für $x \in I \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{h(x)} &= \frac{g(x) - g(0)}{h(x) - h(0)} = \frac{g'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} = \frac{g'(\xi_1) - g'(0)}{h'(\xi_1) - h'(0)} = \frac{g''(\xi_2)}{h''(\xi_2)} \\ &= \ldots = \frac{g^{(n)}(\xi_n) - g^{(n)}(0)}{h^{(n)}(\xi_n) - h^{(n)}(0)} = g^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = f^{(n+1)}(\xi_{n+1}), \end{aligned}$$

wobei die Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$ alle zwischen x und 0 liegen. Für $\xi := \xi_{n+1}$ ist dann

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

wie gewünscht. $\square$

Bemerkung: Falls $f \in C^\infty(I)$, so ist f um x_0 in eine auf I konvergente Potenzreihe entwickelbar, falls für jedes $x \in I$ gilt:

$$T_n(f; x_0)(x) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

Gleichbedeutend damit ist, dass für jedes $x \in I$ das entsprechende Restglied für $n \to \infty$ gegen Null geht.

Warnung: Das ist **nicht** für jedes $f \in C^\infty(I)$ der Fall!

Beispiel: Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$, in $x_0 = 0$. Es gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, also auch $T_n(f; 0)(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Für **kein** $x > 0$ gilt somit $T_n(f; 0)(x) \to f(x)$!

10.15. Lokale Extrema: Sei $n \geq 2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$ ein innerer Punkt von I (dh kein Randpunkt). Weiter sei

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \textbf{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$ [bzw. $f^{(n)}(x_0) < 0$], so hat f in x_0 ein lokales Minimum [bzw. ein lokales Maximum].

(b) Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.

Bemerkung: In der Anwendung ist meist $n = 2$. Ist $f'(x_0) = 0$, so gilt:

für $f''(x_0) > 0$ hat f in ein lokales Minimum,

für $f''(x_0) < 0$ hat f in ein lokales Maximum, für $f''(x_0) = 0$ erhält man keine Entscheidung.

Beweis. $f^{(n)}$ ist stetig auf I mit $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, somit gibt es $\delta > 0$ mit

$$f^{(n)}(\xi) f^{(n)}(x_0) > 0 \quad \text{für alle } \xi \in U_\delta(x_0) \subseteq I.$$

Nach dem Satz von Taylor und der Voraussetzung gibt es für jedes $x \in U_\delta(x_0)$ ein $\xi \in U_\delta(x_0)$ mit

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Nun betrachte man das Vorzeichen der rechten Seite. □

Beispiel: Sei $p > 1$, $\alpha > 0$. Bestimme das Maximum von $f(x) := \alpha x - x^p/p$ über $x \geq 0$.

Es gilt $f(0) = 0$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$. Für $x > 0$ ist $f'(x) = \alpha - x^{p-1}$ und $f''(x) = -(p-1)x^{p-2} < 0$. Weiter ist $f'(x_0) = 0$ genau dann, wenn $x_0 = \alpha^{1/(p-1)}$ ist. Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(\alpha^{1/(p-1)}) = (1 - \frac{1}{p})\alpha^{p/(p-1)} > 0$. Dies ist das gesuchte Maximum.

10.16. Ableitung von Potenzreihen: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenradius $R \in (0, \infty]$, $I := (x_0 - R, x_0 + R)$ und

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Dann ist f auf I differenzierbar, und für jedes $x \in I$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Beweis des Satzes. später! □

Bemerkung: Der Satz besagt, dass man Potenzreihen im Inneren des Konvergenzintervalls gliedweise differenzieren kann. Da f' wieder eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R ist, kann man den Satz wiederholt anwenden und erhält damit: $f \in C^\infty(I)$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) a_n (x - x_0)^{n-k}, \quad x \in I.$$

Für $x = x_0$ erhält man

$$f^{(k)}(x_0) = k(k-1)(k-2) \cdot \ldots \cdot (k-(k-1)) a_k = k! a_k.$$

Somit gilt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

und wir erhalten die Darstellung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in I,$$

so dass die Potenzreihe die Taylorreihe der dargestellten Funktion ist. Ende Di 20.12.11

Beispiel: Für $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist 1. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ ist ebenfalls 1. Setzt man

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k + 1}, \quad x \in (-1, 1),$$

so ist g nach 10.16 auf $(-1, 1)$ differenzierbar, und es gilt

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \arctan'(x), \quad x \in (-1, 1).$$

Wegen $\arctan 0 = 0 = g(0)$ ist also

$$\arctan(x) = g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k + 1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Wir stellen fest, dass die Potenzreihe auch noch für $x = \pm 1$ konvergiert (Leibnizkriterium), und würden gerne $x = 1$ einsetzen.

Abelscher Grenzwertsatz: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent. Dann gilt

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

(beachte, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe wegen der vorausgesetzten Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nicht < 1 sein kann und also ≥ 1 ist).

Für $x = 1$ erhält man also in der Arcustangens-Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \lim_{x \to 1-} \arctan(x) = \lim_{x \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + 1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

Beweis des Abelschen Grenzwertsatzes (nicht in der Vorlesung). Wir fixieren ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2$. Für $x \in (0,1)$ gilt dann

$$d_N(x) := \sum_{n=0}^{N} b_n - \sum_{n=0}^{N} b_n x^n = \sum_{n=1}^{N} b_n(1 - x^n),$$

wobei für $n \geq 1$ nach 4.11(1):

$$1 - x^n = (1-x)\sum_{j=0}^{n-1} x^j.$$

Also haben wir für $x \in (0,1)$ und $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $N_0 \leq N$:

$$\begin{aligned} d_N(x) &= (1-x)\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=0}^{n-1} b_n x^j = (1-x)\sum_{j=0}^{N-1} x^j \sum_{n=j+1}^{N} b_n \\ &= (1-x)\sum_{j=0}^{N_0-1} x^j \sum_{n=j+1}^{N} b_n + (1-x)\sum_{j=N_0}^{N-1} x^j \sum_{n=j+1}^{N} b_n. \end{aligned}$$

Setzen wir $c_m := \sum_{n=0}^{m} b_n$, so haben wir $c_m \to c := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ für $m \to \infty$. Die Folge $(c_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ ist also beschränkt, etwa $|c_m| \leq M$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Wir haben nun

$$\Big|\sum_{j=0}^{N_0-1} x^j \sum_{n=j+1}^{N} b_n\Big| \leq \sum_{j=0}^{N_0-1} x^j |c_N - c_j| \leq N_0 \cdot 2M$$

und

$$\Big|(1-x)\sum_{j=N_0}^{N-1} x^j \sum_{n=j+1}^{N} b_n\Big| \leq (1-x)\sum_{j=N_0}^{N-1} x^j |c_N - c_j| \leq \underbrace{(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k}_{=1} \max_{j=N_0,\ldots,N} |c_N - c_j|,$$

also

$$|d_N(x)| \leq (1-x)\cdot 2MN_0 + \max_{N_0\leq j\leq N} |c_N - c_j|.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da (c_m) eine Cauchyfolge ist, finden wir ein N_0 so, dass für alle $N \geq j \geq N_0$ gilt: $|c_N - c_j| < \varepsilon/2$. Wir haben dann für $x \in (0,1)$:

$$\underbrace{\Big|\sum_{n=0}^{\infty} b_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big|}_{=:r(x)} = \lim_{N\to\infty} |d_N(x)| \leq (1-x)2MN_0 + \varepsilon/2.$$

Für $x \in (0,1)$ mit $1 - x < \varepsilon/(4MN_0)$ ist dann $|r(x)| < \varepsilon$. Damit ist $\lim_{x\to 1-} r(x) = 0$ gezeigt. $\square$

10.17. Identitätssatz für Potenzreihen: Sei $r > 0$ und $I := (x_0 - r, x_0 + r)$. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad x \in I,$$

wobei die Potenzreihen auf I konvergieren. Es gebe eine streng monotone Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in I mit $x_m \to x_0$ für $m \to \infty$ und $f(x_m) = g(x_m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung: Insbesondere gilt also:

$$f = g \text{ auf } I \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = b_n,$$

aber die Voraussetzung lässt sich sehr abschwächen.

Beweis. Wir dürfen $g = 0$ und $b_n = 0$ annehmen (durch Betrachtung von $f - g$ und $a_n - b_n$).
Annahme: es gibt $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\}$. Dann gilt $f(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ und

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^{n_0}} = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n-n_0} \to a_{n_0} \quad (x \to x_0).$$

Also ist nach Voraussetzung $a_{n_0} = \lim_{m\to\infty} \frac{f(x_m)}{(x_m - x_0)^{n_0}} = 0$ im Widerspruch zur Annahme. □

Beispiel: Wir wollen ein Intervall I mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion y bestimmen mit $y'(x) = xy(x)$, $x \in I$, und $y(0) = 1$ und machen einen *Potenzreihenansatz* $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x \in I = (-R, R)$, wobei R der Konvergenzradius der Potenzreihe sei. Wegen $y(0) = 0$ ist $a_0 = 1$.
Wenn $R > 0$, so ist nach 10.16: $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ für $x \in I$. Außerdem ist

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1}, \quad x \in I.$$

Durch *Koeffizientenvergleich* (dh nach 10.17) erhalten wir $a_1 = 0$ und

$$n a_n = a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Durch Induktion erhält man hieraus $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$ und $a_{2k} = (2^k k!)^{-1}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Somit

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big(\frac{x^2}{2}\Big)^k = e^{x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

und dies genügt tatsächlich den geforderten Bedingungen.

11 Integration

11.1. Ober- und Untersummen, oberes und unteres Integral: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt*, dh $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ beschränkt.

Definition: $Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ heißt eine *Zerlegung* von $[a, b]$, falls $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Sei $m := \inf f([a, b])$ und $M := \sup f([a, b])$. Sei $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ein Zerlegung von $[a, b]$. Für $j = 1, 2, \dots, n$ setze

$$\begin{aligned} I_j &:= [x_{j-1}, x_j], \quad |I_j| := x_j - x_{j-1}, \quad m_j := \inf f(I_j), \quad M_j := \sup f(I_j), \text{ sowie} \\ s_f(Z) &:= \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j| \qquad \textit{Untersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z, \\ S_f(Z) &:= \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j| \qquad \textit{Obersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z. \end{aligned}$$

Es ist $m \le m_j \le M_j \le M$, also wegen $|I_j| > 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} m|I_j| \le \sum_{j=1}^{n} m_j|I_j| \le \sum_{j=1}^{n} M_j|I_j| \le \sum_{j=1}^{n} M|I_j|.$$

Somit gilt für jede Zerlegung Z von $[a, b]$:

$$(*) \qquad\qquad m(b-a) \le s_f(Z) \le S_f(Z) \le M(b-a).$$

Satz: Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen.

(1) Ist $Z_1 \subseteq Z_2$, so gilt $s_f(Z_1) \le s_f(Z_2) \le S_f(Z_2) \le S_f(Z_1)$.

(2) Es gilt $s_f(Z_1) \le S_f(Z_2)$.

Beweis. (1) Wende $(*)$ an auf diejenigen Teilintervalle von Z_1, die durch Punkte von Z_2 weiter unterteilt werden.

(2) Setze $Z := Z_1 \cup Z_2$. Wegen $Z_1 \subseteq Z$ und $Z_2 \subseteq Z$ gilt dann nach (1) und $(*)$:

$$s_f(Z_1) \le s_f(Z) \le S_f(Z) \le S_f(Z_2).$$

□

Nach $(*)$ können wir definieren:

$$s_f := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\{s_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\},$$

das *untere Integral von* f über $[a, b]$ und

$$S_f := \int_a^{b} f(x)\,dx := \inf\{S_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\}$$

das *obere Integral von* f über $[a, b]$.

Wegen $(*)$ und (2) gilt dann

$$(**) \qquad\qquad m(b-a) \le s_f \le S_f \le M(b-a).$$

[Zunächst folgt aus (2) durch Supremumsbildung über Z_1: $s_f \le S_f(Z_2)$ für jede Zerlegung Z_2. Dann bilde man das Infimum über alle Z_2.]

11.2. Definition: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt*. Dann heißt f (Riemann-)*integrierbar* (*ib*), falls $s_f = S_f$ gilt.

In diesen Falle heißt

$$\int_a^b f\,dx := \int_a^b f(x)\,dx := S_f (= s_f)$$

das (Riemann-)*Integral* von f über $[a, b]$.

Ende Do 22.12.11

Wir setzen

$$R[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} :\ f \text{ ist beschränkt und über } [a, b] \text{ integrierbar}\}$$

(Menge der über $[a, b]$ integrierbaren Funktionen).

Beispiele: (1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = c$, $x \in [a, b]$. Dann ist $m = M = c$ und aus $(**)$ folgt $s_f = S_f = c(b-a)$. Also ist f integrierbar und

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

(2) Sei $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Ist $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ Zerlegung von $[0, 1]$ und sind m_j, M_j, I_j wie oben, so haben wir $m_j = 0$, $M_j = 1$ für alle j, also $s_f(Z) = 0$ und $S_f(Z) = 1$. Folglich ist

$$s_f = 0 \ne 1 = S_f,$$

und f ist nicht integrierbar über $[0, 1]$.

11.3. Satz: Seien $f, g \in R[a,b]$.

(1) Gilt $f \leq g$ auf $[a,b]$, so ist $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$.

(2) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx.$$

Beweis. (1) ist klar. (2) ist klar für $g = 0$ und $\alpha \geq 0$. Für $g = 0$ und $\alpha = -1$ folgt die Aussage aus $S_{-f}(Z) = -s_f(Z)$, $s_{-f}(Z) = -S_f(Z)$. Für $\alpha = \beta = 1$ haben wir

$$s_f(Z) + s_g(Z) \leq s_{f+g}(Z) \leq S_{f+g}(Z) \leq S_f(Z) + S_g(Z)$$

für jede Zerlegung, woraus

$$s_f + s_g \leq s_{f+g} \leq S_{f+g} \leq S_f + S_g$$

folgt. Hieraus folgt die Aussage im Fall $\alpha = \beta = 1$. □

11.4. Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Es gilt $f \in R[a,b]$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit $S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$.

Insbesondere: Ist $(Z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit

$$S_f(Z_m) - s_f(Z_m) \to 0 \quad (m \to \infty),$$

so gilt $f \in R[a,b]$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} S_f(Z_m) = \lim_{m\to\infty} s_f(Z_m).$$

Beweis. Das folgt aus der Definition mithilfe von 11.1 Satz (1). □

11.5. Satz: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist $f \in R[a,b]$.

Beweis. Sei f monoton wachsend (sonst betrachte $-f$ und verwende 11.3(2)). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_j := a + j(b-a)/n$ für $j = 0, 1, \ldots, n$ und $Z_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Sind I_j, M_j und m_j wie in 11.1, so gilt $|I_j| = (b-a)/n$, $M_j = f(x_j)$ und $m_j = f(x_{j-1})$. Somit haben wir

$$S_f(Z_n) - s_f(Z_n) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)|I_j| = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \to 0$$

für $n \to \infty$, und die Behauptung folgt aus 11.4. □

Beispiele: (1) Sei $b > 0$ und $f : [0, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Nach 11.5 ist $f \in R[0, b]$. Wir berechnen das Integral. Sei Z_n wie eben im Beweis, also $x_j = jb/n$ für $j = 0, 1, \ldots, n$. Dann gilt $M_j = f(x_j) = x_j = jb/n$ und $m_j = (j-1)b/n$, sowie

$$\begin{aligned} S_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)|I_j| = \sum_{j=1}^{n} j\frac{b^2}{n^2} = \frac{b^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \longrightarrow \frac{b^2}{2} \ (n \to \infty), \\ s_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})|I_j| = \sum_{j=1}^{n}(j-1)\frac{b^2}{n^2} = \frac{b^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} \longrightarrow \frac{b^2}{2} \ (n \to \infty), \end{aligned}$$

und mithilfe von 11.4 folgt $\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$.

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ und $b > 0$ ist $x \mapsto x^n$ über $[0, b]$ integrierbar. Für $0 < a < b$ und $n \in \mathbb{N}$ sind $x \mapsto x^{-n}$ und $x \mapsto \log x$ über $[a, b]$ integrierbar.

11.6. Riemann-Summen: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung, sowie I_j, M_j, m_j wie in 11.1. Dann heißt

$$\|Z\| := \max\{|I_j| : j = 1, 2, \ldots, n\}$$

die *Feinheit* von Z.

Ein n-Tupel $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ heißt *passender Zwischenvektor*, wenn $\xi_j \in I_j$ für jedes $j = 1, \ldots, n$ gilt. Für einen solchen heißt

$$\sigma_f(Z, \xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j|$$

eine *Riemannsche Summe*. Wegen $m_j \le f(\xi_j) \le M_j$ gilt dabei $s_f(Z) \le \sigma_f(Z, \xi) \le S_f(Z)$.

Satz: Sei $f \in R[a, b]$ und $(Z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen mit $\|Z_m\| \to 0$, sowie $(\xi^{(m)})$ eine Folge von passenden Zwischenvektoren. Dann gilt

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_f(Z_m, \xi^{(m)}) = \int_a^b f\,dx.$$

Beweisidee. Wegen 11.4 reicht zu zeigen: $S_f(Z_m) - s_f(Z_m) \to 0$. □

Bemerkung: Haben *alle* Folgen Riemannscher Summen, deren Feinheit gegen Null geht, den Limes $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt $f \in R[a, b]$ und $\int_a^b f(x)\,dx = \alpha$.

Beweisidee. Zeige für eine Folge (Z_m) mit $\|Z_m\| \to 0$, dass gilt

$$S_f(Z_m) \to \alpha \ (m \to \infty), \quad s_f(Z_m) \to \alpha \ (m \to \infty),$$

und verwende 11.4. Beachte dazu, dass man $\sigma_f(Z, \xi) - s_f(Z)$ bzw. $S_f(Z) - \sigma_f(Z, \xi)$ durch Wahl geeigneter ξ beliebig klein machen kann. □

11.7. Satz: Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(1) Seien $a, b, c \in I$ mit $a < c < b$. Dann gilt $f \in R[a, b]$ genau dann, wenn $f \in R[a, c]$ und $f \in R[c, b]$. In diesem Fall ist

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx.$$

(2) Sei $f \in R[a, b]$ für alle $[a, b] \subseteq I$, und sei $c \in I$. Setzt man

$$F : I \to \mathbb{R}, y \mapsto F(y) := \int_c^y f(x)\,dx,$$

wobei $\int_c^y f(x)\,dx := -\int_y^c f(x)\,dx$ für $y < c$ und $\int_c^c f(x)\,dx := 0$ gesetzt ist, so gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ende Mo 09.01.12

Beweis. (2) folgt aus (1). Zum Beweis von (1) sei zunächst $f \in R[a, b]$ und $\varepsilon > 0$. Wir finden eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$. Wegen Satz 11.1(1) können wir davon ausgehen, dass $c \in Z$ gilt. Setzen wir dann $Z_1 := Z \cap [a, c]$ und $Z_2 := Z \cap [c, b]$, so gilt für $k = 1, 2$:

$$S_f(Z_k) - s_f(Z_k) \leq S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon.$$

Nach 11.4 ist also $f \in R[a, c]$ und $f \in R[c, b]$.

Ist umgekehrt $f \in R[a, c]$ und $f \in R[c, b]$, sowie $\varepsilon > 0$, so finden wir Zerlegungen Z_1 von $[a, c]$ und Z_2 von $[c, b]$ mit $S_f(Z_k) - s_f(Z_k) < \varepsilon/2$ für $k = 1, 2$. Wir setzen $Z := Z_1 \cup Z_2$ und erhalten

$$S_f(Z) - s_f(Z) = S_f(Z_1) + S_f(Z_2) - s_f(Z_1) - s_f(Z_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt also wieder mithilfe von 11.4. Schließlich haben wir

$$\begin{aligned}
\int_a^b f\,dx &= \sup\{s_f(Z) : Z \text{ Zerl. von } [a, b]\} = \sup\{s_f(Z) : Z \text{ Zerl. von } [a, b] \text{ mit } c \in Z\} \\
&= \sup\{s_f(Z_1) + s_f(Z_2) : Z_1 \text{ Zerl. von } [a, c],\ Z_2 \text{ Zerl. von } [c, b]\} \\
&= \sup\{s_f(Z_1) : Z_1 \text{ Zerl. von } [a, c]\} + \sup\{s_f(Z_2) : Z_2 \text{ Zerl. von } [c, b]\} \\
&= \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx,
\end{aligned}$$

wobei die erste Gleichheit die Definition ist, die zweite aus Satz 11.1(1) folgt, die dritte die Überlegungen im Beweis oben benutzt und die vierte die Gleichung $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ verwendet. $\square$

Beispiele: Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt $\sin, \cos \in R[a,b]$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^n$ über $[a,b]$ integrierbar (man kombiniere 11.5 mit 11.7).

11.8. Satz: Sei $f \in R[a,b]$ und F wie in 11.7(2), sowie $x_0 \in [a,b]$. Dann gilt:

(1) F ist stetig in x_0, dh

$$\int_a^{x_0+h} f(x)\,dx \to \int_a^{x_0} f(x)\,dx \quad (h \to 0).$$

(2) Ist f stetig in x_0, so ist F differenzierbar in x_0 mit $F'(x_0) = f(x_0)$, dh es gilt

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \to f(x_0) \quad (h \to 0).$$

Hierbei betrachten wir für $x_0 = a$ nur $h \to 0+$ und für $x_0 = b$ nur $h \to 0-$.

Beweis. (1) Wir wählen $\gamma > 0$ mit $|f(x)| \le \gamma$ für alle $x \in [a,b]$. Es gilt dann für $h \neq 0$ mit $x_0, x_0 + h \in [a,b]$:

$$\Big|\int_a^{x_0+h} f(x)\,dx - \int_a^{x_0} f(x)\,dx\Big| = \Big|\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx\Big|$$
$$\le \int_{\min\{x_0,x_0+h\}}^{\max\{x_0,x_0+h\}} \underbrace{|f(x)|}_{\le\gamma}\,dx \le \gamma|h| \to 0 \ (h \to 0).$$

Für den vorletzten und letzten Schritt gibt es verschiedene Möglichkeiten:

(i) Verwende: $f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$ und $|\int_a^b f\,dx| \le \int_a^b |f|\,dx$ ($\to$ später).

(ii) Verwende 11.6: $\int_a^b f\,dx$ ist Limes von Riemann-Summen $\sigma_f(Z,\xi)$, und

$$|\sigma_f(Z,\xi)| = \Big|\sum_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j|\Big| \le \sum_{j=1}^n \underbrace{|f(\xi_j)|}_{\le\gamma}|I_j| \le \gamma(b-a).$$

(iii) Verwende die Definition 11.2: $\int_a^b f\,dx = s_f$, also $|\int_a^b f\,dx| = \sup\{|s_f(Z)| : Z \text{ Zerl.}\}$, und

$$|s_f(Z)| = \Big|\sum_{j=1}^n m_j|I_j|\Big| \le \sum_{j=1}^n \underbrace{|m_j|}_{\le\gamma}|I_j| \le \gamma(b-a).$$

(2) Sei $\varepsilon > 0$. Da f in x_0 stetig ist, finden wir $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$ für $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für $|h| < \delta$ mit $x_0, x_0 + h \in [a,b]$ gilt wegen $h^{-1}\int_{x_0}^{x_0+h} 1\,dx = 1$:

$$|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx - f(x_0)| = |\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))\,dx|$$
$$\le \frac{1}{|h|}\int_{\min\{x_0,x_0+h\}}^{\max\{x_0,x_0+h\}} \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{\le\varepsilon}\,dx \le \varepsilon,$$

wobei man am Ende wie im Beweis von (1) argumentiert. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) := x^n$ sowie $G(x) := \frac{x^{n+1}}{n+1}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist G auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $G'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Für $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist $f \in R[a, b]$. Definiert man F wie in 11.7(2), so ist F auf $[a, b]$ differenzierbar mit $F' = f$ auf $[a, b]$. Nach 10.8 ist $G - F$ konstant, also

$$\int_a^b x^n\, dx = F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

11.9. Satz über stetige Funktionen: Sei $f \in C[a, b]$. Dann gilt:

(1) f ist *gleichmäßig stetig*, dh zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass

$$\forall x, \widetilde{x} \in [a, b] \text{ mit } |x - \widetilde{x}| < \delta : \quad |f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon.$$

(2) f ist integrierbar, dh $f \in R[a, b]$.

Beweis. (1) Sei $\varepsilon > 0$. Ist die Aussage falsch, so finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, \widetilde{x}_n \in [a, b]$ mit $|x_n - \widetilde{x}_n| < 1/n$ und $|f(x_n) - f(\widetilde{x}_n)| \geq \varepsilon$. Nach Bolzano-Weierstraß finden wir eine konvergente Teilfolge $(x_{k(n)})$ von (x_n) mit Limes $x_0 \in [a, b]$. Dann konvergiert $(\widetilde{x}_{k(n)})$ ebenfalls gegen x_0. Da f in x_0 stetig ist, folgt $f(x_{k(n)}) - f(\widetilde{x}_{k(n)}) \to 0$ im Widerspruch zu $|f(x_{k(n)}) - f(\widetilde{x}_{k(n)})| \geq \varepsilon$ für alle n.

(2) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_j := a + j(b - a)/n$ für $j = 0, 1, \ldots, n$ und $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Sind I_j, M_j und m_j wie in 11.1, so gilt $|I_j| = (b - a)/n$ und

$$S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)|I_j| = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j) \leq (b - a) \max_{j=1,2,\ldots,n} M_j - m_j.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ gemäß (1) und $n > 1/\delta$. Dann gilt für jedes j:

$$M_j - m_j = \sup f(I_j) - \inf f(I_j) = \sup f(I_j) + \sup(-f(I_j)) = \sup\{f(x) - f(\widetilde{x}) : x, \widetilde{x} \in I_j\} \leq \varepsilon,$$

also

$$S_f(Z) - s_f(Z) \leq (b - a)\varepsilon,$$

und die Behauptung folgt aus 11.4. □

11.10. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

(1) Ist $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $G' = f$ auf $[a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a) \; \left(=: G(x)\Big|_a^b =: [G(x)]_a^b \right).$$

(2) Setzt man $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := \int_a^x f(\xi)\, d\xi$, so ist F auf $[a, b]$ differenzierbar mit $F' = f$ auf $[a, b]$.

Beweis. (2) haben wir in 11.8 gezeigt. (1) folgt aus (2) wie im Beispiel 11.8. □

Ende Di 10.01.12

11.11. Stammfunktionen: Sind $f, F : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei F auf I differenzierbar ist mit $F' = f$ auf I, so heißt F eine *Stammfunktion von f auf I.*

Bemerkung: Der Hauptsatz 11.10 besagt, dass man zur Berechnung von Integralen stetiger Funktionen Stammfunktionen verwenden kann und dass stetige Funktionen Stammfunktionen besitzen. Für eine Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$ schreibt man wegen 11.1(1) auch $\int f(x)\,dx$ (*unbestimmtes Integral*).

Zwei Stammfunktionen von $f : I \to \mathbb{R}$ unterscheiden sich nach 10.8(2) nur durch eine additive Konstante.

Beispiele: Auf $I = \mathbb{R}$ gilt $\int \cos x\,dx = \sin x + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine feste Konstante ist.

Auf $I = (-\infty, 0)$ oder $I = (0, \infty)$ gilt $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$. Dies ist fr $x > 0$ klar. Für $x < 0$ ist nach Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{|x|}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

Erinnerung: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *stetig differenzierbar auf I* und wir schreiben $f \in C^1(I)$, falls f auf I differenzierbar ist und $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Bemerkung: Ist $f \in C^1(I)$, so gilt $\int f'\,dx = f$ auf I.

Beispiel: Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \begin{cases} x^{3/2}\sin(\frac{1}{x}) & , x \in (0,1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Für $x \in (0,1]$ ist f in x differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(\frac{1}{x}).$$

Beachte, dass diese Funktion auf $(0,1]$ nicht beschränkt ist.

Die Funktion f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$, denn für jedes $h \in (0,1]$ gilt

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = \sqrt{h}\left|\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \le \sqrt{h} \to 0 \quad (h \to 0+),$$

dh $\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$.

Die Funktion f ist auf $[0,1]$ differenzierbar, aber $f \notin C^1([0,1])$, da f' nicht stetig ist. f' ist hier sogar unbeschränkt, insbesondere also $f' \notin R[0,1]$.

Die beiden folgenden Integrationsregeln ergeben sich über den Hauptsatz aus Differentiationsregeln.

11.12. Partielle Integration: Seien $f, g \in C^1(I)$. Dann gilt

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \quad \text{auf } I.$$

Ist $I = [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Beweis. Es gilt $(fg)' = f'g + fg'$ auf I. Somit hat $f'g + fg'$ die Stammfunktion fg auf I, woraus die Behauptungen folgen (für die zweite Formel verwenden wir den Hauptsatz 11.10). $\square$

Beispiele: (1) $\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^x}_{f'}\,dx = \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^x}_{f} - \int \underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{e^x}_{f}\,dx = xe^x - e^x.$

(2) $\int \log x\,dx = \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{\log x}_{g}\,dx = \underbrace{x}_{f}\underbrace{\log x}_{g} - \int \underbrace{x}_{f}\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx = x\log x - x.$

11.13. Integration durch Substitution: Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in C^1(J)$ mit $g(J) \subseteq I$. Dann ist

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=g(t)} \quad \text{auf } J.$$

Ist $g'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$, so ist g auf J streng monoton und

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} \quad \text{auf } g(J).$$

Ist $I = [a, b]$ und $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ sowie $J = \begin{cases} [\alpha, \beta] & , \alpha \leq \beta \\ [\beta, \alpha] & , \alpha > \beta \end{cases}$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

Beweis. Wähle eine Stammfunktion F von f auf I. Dann ist $G := F\circ g$ eine Stammfunktion von $h := (f \circ g) \cdot g'$ auf J (denn $G' = (F \circ g)' = (F' \circ g)g' = (f \circ g)g'$). Also ist

$$\int h(t)\,dt = G(t) = F(g(t)) = \int f(x)\,dx|_{x=g(t)}$$

auf J. Ist $g'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$, so ist nach dem Zwischenwertsatz entweder $g' > 0$ auf J oder es ist $g' < 0$ auf J. In jedem Fall ist g streng monoton auf J und besitzt also eine Umkehrfunktion $g^{-1} : g(J) \to J$ (beachte auch, dass $g(J)$ ein Intervall ist). Dann ist

$$\int h(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = G(g^{-1}(x)) = F(g(g^{-1}(x)) = F(x) = \int f(x)\,dx$$

auf $g(J)$. Schließlich verwenden wir den Hauptsatz. $\square$

Merkregel: Ist $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, so schreibt man für die Ableitung y' auch $\frac{dy}{dx}$. In $\int f(x)\,dx$ substituiere nun $x = g(t)$, dh fasse x als Funktion von t auf. Dann ist $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ und man erhält (formal!) "$dx = g'(t)\,dt$" (dies ist nur eine Schreibweise, da "dx" oder "dt" hier **keine mathematische Bedeutung** tragen).

Beispiele: (1) $\int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}\,dx$, substituiere $t = e^x$, also $x = \log t$. Dann ist $dx = dt/t$ und aus $x : 0 \to 1$ ergibt sich $t : 1 \to e$. Wir erhalten:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}\,dx = \int_1^e (1 + t^{-2})\,dt = (t - t^{-1})|_1^e = e - 1/e.$$

(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, das ist der Flächeninhalt eines Viertelkreises mit Radius 1. Substituiere $x = \sin t$. Dann ist $dx = \cos t\,dt$ und aus $x : 0 \to 1$ ergibt sich $t : 0 \to \pi/2$. Wir erhalten

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\sqrt{\cos^2 t}} \cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt,$$

da $\cos \geq 0$ auf $[0, \pi/2]$ ist. Nun schreiben wir

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1,$$

also $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$, und erhalten

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\Big(\int_0^{\pi/2} 1\,dt + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos(2t)\,dt}_{=0}\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius 1 is also π.

11.14. Satz: Seien $f, g \in R[a, b]$ und $D := f([a, b])$.
(1) Sei $L \geq 0$ und $h : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\forall s, t \in D : |h(t) - h(s)| \leq L|t - s|. \tag{L}$$

Dann gilt $h \circ f \in R[a, b]$.
(2) Es ist $|f| \in R[a, b]$ und

$$\Big|\int_a^b f\,dx\Big| \leq \int_a^b |f|\,dx \qquad \text{(Dreiecksungleichung für Integrale).}$$

(3) Es ist $fg \in R[a, b]$.
(4) Ist $c > 0$ und gilt $|f(x)| \geq c$ für alle $x \in [a, b]$, so ist $1/f \in R[a, b]$.

Bemerkung: Eine Funktion h mit (L) heißt *Lipschitz-stetig* mit *Lipschitz-Konstante* L. Eine solche Funktion ist insbesondere stetig (sogar gleichmäßig stetig).

Beweis. (1) Sei $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung und I_j, M_j, m_j wie in 11.1, sowie

$$\tilde{M}_j := \sup(h \circ f)(I_j) \quad \text{und} \quad \tilde{m}_j := \inf(h \circ f)(I_j).$$

Wie im Beweis von 11.8 zeigt man

$$\tilde{M}_j - \tilde{m}_j = \sup\{\underbrace{h(f(x)) - h(f(\tilde{x}))}_{\leq L|f(x)-f(\tilde{x})|} : x, \tilde{x} \in I_j\} \leq L(M_j - m_j).$$

Man erhält $S_{h\circ f}(Z) - s_{h\circ f}(Z) \leq L(S_f(Z) - s_f(Z))$, und $h \circ f \in R[a,b]$ folgt mithilfe von 11.4.

(2) Wende (1) an auf $h(t) = |t|$. Es gilt $||t| - |s|| \leq |t - s|$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$, dh (L) gilt mit $L = 1$. Also ist $|f| \in R[a,b]$. Weiter ist

$$\Big|\int_a^b f\,dx\Big| = \max\Big\{\int_a^b \underbrace{f}_{\leq|f|}\,dx, \int_a^b \underbrace{(-f)}_{\leq|f|}\,dx\Big\} \leq \int_a^b |f|\,dx.$$

(3) Wegen $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ reicht es, $f^2 \in R[a,b]$ zu zeigen. Da f beschränkt ist, gibt es $\gamma > 0$ mit $|f(x)| \leq \gamma$ für alle $x \in [a,b]$. Also gilt $D \subseteq [-\gamma, \gamma]$. Für $s, t \in D$ gilt somit:

$$|t^2 - s^2| = |t+s||t-s| \leq (|t| + |s|)|t-s| \leq 2\gamma|t-s|.$$

Mit $h(t) = t^2$ in (1) folgt $f^2 \in R[a,b]$. Ende Do 12.01.12

(4) Nach Voraussetzung gilt $D \subseteq (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$. Somit ist für $t, s \in D$:

$$\left|\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right| = \frac{|s-t|}{|s||t|} \leq \frac{1}{c^2}|t-s|.$$

Mit $h(t) := 1/t$ in (1) folgt die Behauptung. □

12 Differentialgleichungen

12.1. Differentialgleichungen erster Ordnung: Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(x, y), \tag{D}$$

und für gegebene $(x_0, y_0) \in I \times J$ das **Anfangswertproblem:**

$$\begin{array}{rcl} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0. \end{array} \tag{AWP}$$

Eine *Lösung von* (D) ist eine differenzierbare Funktion $\phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}$, wobei $\tilde{I} \subset I$ ein Intervall ist, mit $\phi(x) \in J$ für alle $x \in \tilde{I}$ und

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \text{für alle } x \in \tilde{I}.$$

Eine *Lösung von* (AWP) ist eine Lösung $\phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ von (D) mit $x_0 \in \tilde{I}$ und $\phi(x_0) = y_0$.

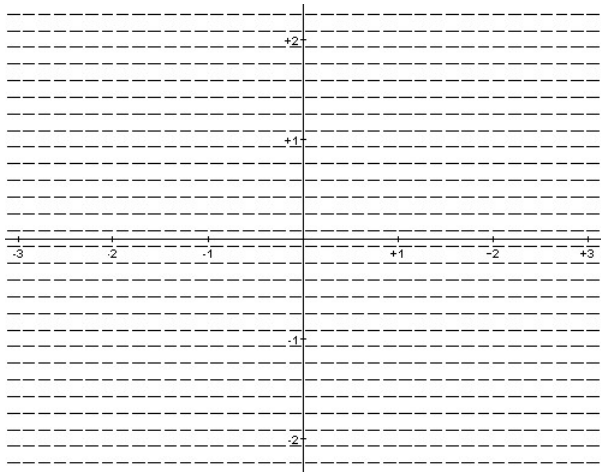
Ein Anfangswertproblem (AWP), welches Lösungen besitzt, heißt *eindeutig lösbar* auf I, wenn für je zwei Lösungen $\phi_j : \tilde{I}_j \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, von (AWP) gilt $\phi_1 = \phi_2$ auf $\tilde{I}_1 \cap \tilde{I}_2$.

Ist (AWP) auf I eindeutig lösbar, so gibt es genau eine Lösung $\phi_{\max} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ mit maximalem Existenzintervall $\tilde{I}$. Diese heißt die *maximale Lösung* von (AWP) (jede Lösung von (AWP) erhält man dann als Einschränkung von $\phi_{\max}$).

Beispiel: $y' = \lambda y$, $y(x_0) = y_0$ ist für alle $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar auf $\mathbb{R}$ und die maximale Lösung ist gegeben durch $\phi(x) = y_0 e^{\lambda(x - x_0)}$, $x \in \mathbb{R}$ (vgl. Anwendung in 10.8).

Bedeutung von (D) **und** (AWP)**:** Häufig ist x hier ein Zeitparameter und $y = y(x)$ beschreibt einen Zustand zur Zeit x. (D) besagt, dass die Zustandsänderung (zum Zeitpunkt x) abhängt vom gegebenen Zeitpunkt x und dem gegebenen Zustand $y(x)$. Ist (AWP) eindeutig lösbar, so legen Anfangswert $y(x_0) = y_0$ und Systembeschreibung (D) den zeitlichen Zustandsverlauf fest.

Man kann sich Differentialgleichungen der Form (D) auch durch das **Richtungsfeld** veranschaulichen: In jedem Punkt $(x, y) \in I \times J$ gibt $f(x, y)$ die durch (D) gegebene **Steigung** in diesem Punkt an.



Richtungsfeld von $y' = 0$.

Beispiel: $y' = 0$: Nach 10.8 sind alle Lösungen konstant.

12.2. Hilfssatz (Differentialungleichung): Sei $w : [0, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $L \in \mathbb{R}$ mit

$$w'(t) \leq Lw(t), \quad t \in [0, b].$$

Dann gilt $w(t) \leq w(0)e^{tL}$ für alle $t \in [0, b]$. Ist zusätzlich $w \geq 0$ auf $[0, b]$ und $w(0) = 0$, so gilt $w = 0$ auf $[0, b]$.

Beweis. Für $t \in [0, b]$ gilt

$$\frac{d}{dt} w(t)e^{-Lt} = w'(t)e^{-tL} - Lw(t)e^{-tL} \leq Lw(t)e^{-tL} - Lw(t)e^{-tL} = 0.$$

Also ist $t \mapsto w(t)e^{-tL}$ monoton fallend, und es folgt $w(t)e^{-tL} \leq w(0)$, $t \in [0, b]$. □

12.3. Lineare Differentialgleichung erster Ordnung: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b \in C(I)$. Für alle $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y + b(x) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{L1}$$

eindeutig lösbar. Die maximale Lösung $\phi : I \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\phi(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s)\, ds, \quad x \in I,$$

wobei $A(x) := \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$, $x \in I$.

Beweis. Wir betrachten den Fall $I = [x_0, b]$ (für $I = [a, x_0]$ siehe Übungsaufgabe).

(i): Sind $\phi_1, \phi_2 : I \to \mathbb{R}$ Lösungen der *inhomogenen Gleichung*

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{L1-inhom}$$

so ist $z := \phi_1 - \phi_2 : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der zugehörigen *homogenen Gleichung*

$$y' = a(x)y. \tag{L1-hom}$$

Gilt $\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0)$, so ist $z(x_0) = 0$.

(ii) Ist $z : I \to \mathbb{R}$ Lösung von (L1-hom) mit $z(x_0) = 0$ und setzen wir

$$w(t) := (z(t + x_0))^2, \quad t \in [0, b - x_0],$$

so gilt $w(0) = 0$, $w \geq 0$ und

$$w'(t) = 2z(t + x_0)z'(t + x_0) = 2z(t + x_0)a(t + x_0)z(t + x_0) \leq Lw(t), \quad t \in [0, b - x_0],$$

wobei $L := 2 \max\{a(x) : x \in I\} \in \mathbb{R}$ (da $a \in C(I)$, vgl. 8.15). Nach 12.2 ist $w = 0$ auf $[0, b - x_0]$, also $z = 0$ auf I. Im Falle $y_0 = 0$, $b = 0$ ist das Anfangswertproblem (L1) also eindeutig lösbar und die maximale Lösung ist die Nullfunktion auf I.

(iii) Man rechnet nun nach, dass die angegebene Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (L1) ist. Nach (i) und (ii) ist (L1) also eindeutig lösbar. □

Bemerkung: Eine Lösung $z : I \to \mathbb{R}$ von (L1-hom) erhält man nach der Kettenregel durch

$$z(x) = ce^{A(x)}, \quad x \in I,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und A eine Stammfunktion von $a \in C(I)$ auf I ist. Wegen (ii) haben alle Lösungen von (L1-hom) diese Gestalt.

Hat man *irgendeine* Lösung ϕ_P von (L1-inhom) (*spezielle* oder *partikuläre Lösung* genannt), so erhält man wegen (i) *alle* Lösungen ϕ von (L1-inhom) durch $\phi = \phi_P + z$, wobei z die Lösungen von (L1-hom) durchläuft.

Eine spezielle Lösung ϕ_P von (L1-inhom) erhält man durch den Ansatz $\phi_P(x) = c(x)z(x)$ (*Variation der Konstanten*), wobei $z(x) = e^{A(x)}$. Dies führt auf

$$c'z + caz = c'z + cz' = \phi_P' \overset{!}{=} a\phi_P + b = acz + b,$$

also auf $c'z = b$ oder

$$c'(x) = e^{-A(x)}b(x), \quad \text{dh} \quad c(x) = \int e^{-A(x)}b(x)\,dx,$$

woraus sich die Formel oben ergibt, wenn wir A mit $A(x_0) = 0$ wählen. Ende Mo 16.01.12

Beispiel: $y' = -(\sin x)y + \sin^3 x$. Hier ist $A(x) = \cos x$ und die Lösung der homogenen Gleichung ist gegeben durch $y(x) = ce^{\cos x}$. Eine Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir durch die "Variation-der-Konstanten"-Formel (wobei wir $s = \cos t$, $ds = -\sin t\,dt$ substituieren):

$$\begin{aligned} y_P(x) &= e^{\cos x}\int_0^x e^{-\cos t}\sin^3 t\,dt \\ &= e^{\cos x}\int_1^{\cos x}(s^2-1)e^{-s}\,ds \\ &= -e^{\cos x}(s^2-1+2s+2)e^{-s}\Big|_1^{\cos x} \\ &= \sin^2 x - 2\cos x - 2 + \underbrace{4e^{\cos x-1}}_{\text{Lsg. der hom. Gl.}} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$y(x) = \sin^2 x - 2\cos x - 2 + ce^{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

12.4. Trennung der Variablen: Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ stetig. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(x)g(y) \tag{TdV-1}$$

heißt Differentialgleichung *mit getrennten Variablen* (oder *Veränderlichen*). Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= f(x)g(y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{TdV-2}$$

mit $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ behandelt man wie folgt:

Fall $g(y_0) = 0$**:** Eine Lösung ist gegeben durch $y(x) = y_0$, $x \in I$.

Fall $g(y_0) \neq 0$**:** Sei $\tilde{J} \subseteq J$ das größte Teilintervall von J mit $y_0 \in \tilde{J}$ und $g \neq 0$ auf $\tilde{J}$. Ist $y : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (TdV-2) mit $y(\tilde{I}) \subseteq \tilde{J}$, dh mit $g(y(x)) \neq 0$ für alle $x \in \tilde{I}$, so gilt

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \quad x \in \tilde{I},$$

und mittels Substitution $\eta = y(t)$, $d\eta = y'(t)\,dt$:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{x_0}^x \frac{y'(t)\,dt}{g(y(t))} = \int_{x_0}^x f(t)\,dt, \quad x \in \tilde{I}.$$

Sei F eine Stammfunktion von f auf I und G eine Stammfunktion von $1/g$ auf $\tilde{J}$. Dann gilt

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0), \quad \text{also} \quad G(y(x)) = F(x) - F(x_0) + G(y_0) \quad \text{für alle } x \in \tilde{I}.$$

Wegen $G' = 1/g \neq 0$ auf $\tilde{J}$ und der Stetigkeit von $1/g$ auf $\tilde{J}$ ist G auf $\tilde{J}$ streng monoton und besitzt also auf $G(\tilde{J})$ eine Umkehrfunktion G^{-1}. Wir erhalten

$$y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)), \quad x \in \tilde{I}. \tag{TdV-3}$$

Insbesondere ist die Lösung im Falle der Existenz eindeutig.

Umgekehrt definiert (TdV-3) auch eine Lösung von (TdV-2) (wenn man $\tilde{I}$ als ein Teilintervall von I nimmt mit $x_0 \in \tilde{I}$ und $F(x) - F(x_0) + G(y_0) \in G(\tilde{J})$ für alle $x \in \tilde{I}$), denn

$$y(x_0) = G^{-1}(F(x_0) - F(x_0) + G(y_0)) = G^{-1}(G(y_0)) = y_0$$

und für $x \in \tilde{I}$ gilt

$$y'(x) = (G^{-1})'(F(x) - F(x_0) + G(y_0)) \cdot \underbrace{F'(x)}_{=f(x)},$$

sowie nach der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$(G^{-1})'(F(x) - F(x_0) + G(y_0)) = (G'(\underbrace{G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0))}_{=y(x)}))^{-1} = g(y(x)).$$

Beispiele: 1) $y' = \sqrt{|y|}$, $y(x_0) = y_0$, wobei $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Hier ist $f(x) = 1$ auf $I = \mathbb{R}$ und $g(y) = \sqrt{|y|}$ auf $J = \mathbb{R}$.

Für $y_0 = 0$ ist $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, eine Lösung.

Wir betrachten nun $y_0 > 0$. Dann ist $\tilde{J} = (0, \infty)$. Auf $\tilde{J}$ gilt $G(\eta) = \int 1/\sqrt{|\eta|}\, d\eta = 2\sqrt{\eta}$, also $G(\tilde{J}) = (0, \infty)$. Somit haben wir $F(x) - F(x_0) = x - x_0$, $G(y) - G(y_0) = 2\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0}$ und

$$x - x_0 + 2\sqrt{y_0} > 0 \iff x > x_0 - 2\sqrt{y_0}.$$

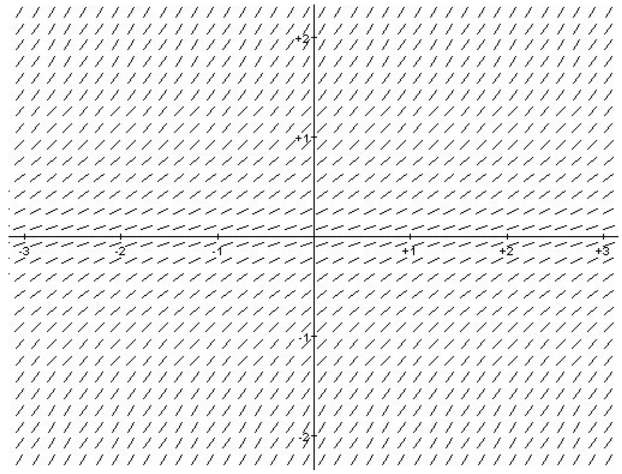
Folglich nehmen wir $\tilde{I} = (x_0 - 2\sqrt{y_0}, \infty)$ und erhalten als eindeutige Lösung auf diesem Intervall

$$\phi(x) = G^{-1}(x - x_0 + 2\sqrt{y_0}) = \frac{(x - x_0 + 2\sqrt{y_0})^2}{4}, \quad x > x_0 - 2\sqrt{y_0}.$$

Für $x \leq c := x_0 - 2\sqrt{y_0}$ können wir die Lösung fortsetzen durch $\phi(x) = 0$ oder durch $\phi(x) = -\frac{(x-c)^2}{4}$ oder für ein gewähltes $b < c$ durch

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [b, c] \\ -\frac{(x-b)^2}{4} & , x < b \end{cases}.$$

Das Anfangswertproblem $y' = \sqrt{|y|}$, $y(x_0) = y_0$ hat also Lösungen auf $\mathbb{R}$. Diese sind nur auf $[x_0 - 2\sqrt{y_0}, \infty)$ eindeutig, nicht jedoch auf $\mathbb{R}$. Sie verzweigen sich im Punkt $(x_0 - 2\sqrt{y_0}, 0)$. Insbesondere sehen wir, dass das Anfangswertproblem mit $y(x_0) = y_0$ auf keinem Intervall $\tilde{I}$ eindeutig lösbar ist.



Richtungsfeld von $y' = \sqrt{|y|}$.

2) $y' = (1-y)y$ (logistisches Wachstum): Es ist klar, dass $y(x) = 0$ und $y(x) = 1$ Lösungen sind. Wir betrachten die Anfangsbedingung $y(0) = y_0 \in (0,1)$. Ist ϕ eine Lösung des Anfangswertproblems auf dem Intervall $[0,a)$, wobei $a > 0$ so gewählt ist, dass $\phi(t) \in (0,1)$ für alle $t \in [0,a)$ ist, so gilt für alle $t \in [0,a)$:

$$\frac{\phi'(t)}{(1-\phi(t))\phi(t)} = 1.$$

Wir integrieren dies über $[0,x]$ und erhalten für $x \in [0,a)$:

$$x = \int_0^x \frac{\phi'(t)}{(1-\phi(t))\phi(t)}\,dt = \int_0^x \frac{\phi'(t)}{1-\phi(t)} + \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}\,dt.$$

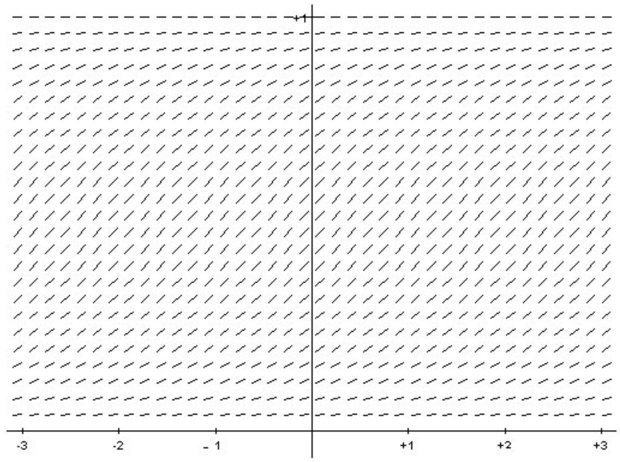
Nach dem Hauptsatz ist das Integral

$$= \Big[-\log(1-\phi(t)) + \log\phi(t)\Big]_0^x = \log\frac{\phi(x)}{1-\phi(x)} - \underbrace{\log\frac{y_0}{1-y_0}}_{=:d}.$$

Wir erhalten somit für jedes $x \in [0,a)$:

$$\frac{\phi(x)}{1-\phi(x)} = e^{x+d}, \quad \text{dh} \quad \phi(x) = 1-(e^{x+d}+1)^{-1} = 1-(\frac{y_0}{1-y_0}e^x+1)^{-1}.$$

Umgekehrt prüft man nach, dass dadurch tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems gegeben ist. Wir sehen nun, dass wir a beliebig groß machen können, so dass die Lösung auf $[0,\infty)$ existiert.



Richtungsfeld von $y' = (1-y)y$.

3) $y' = e^y \sin x$ (zunächst ohne Anfangswerte). Hier ist $I = J = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ und $g(y) = e^y \neq 0$ für alle y, also $\tilde{J} = \mathbb{R}$ in jedem Fall. Trennung der Veränderlichen führt auf

$$-e^{-y} = \int e^{-y}\,dy = \int \sin x\,dx = -\cos x - C,$$

dh $e^{-y} = \cos x + C$ und

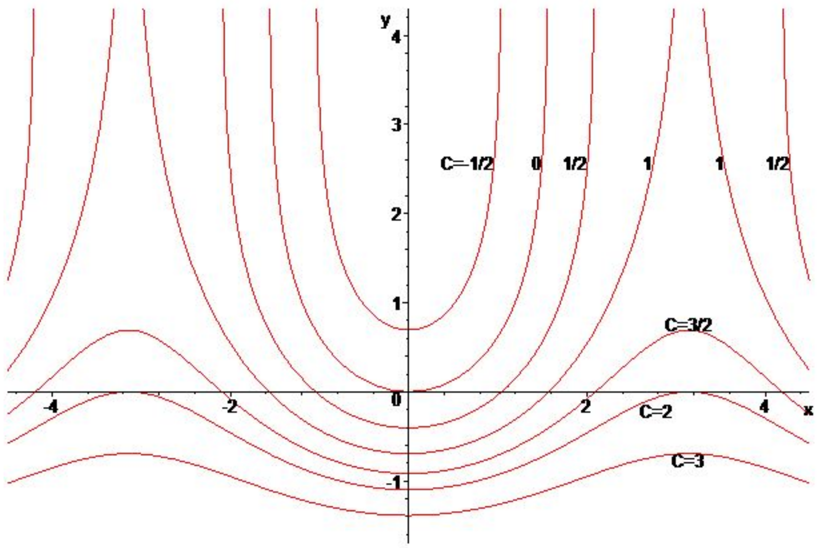
$$y(x) = -\log(\cos x + C), \quad \text{wobei } \cos x + C > 0.$$

Berücksichtigen wir den Anfangswert $y(x_0) = y_0$ und setzen $F(x) = -\cos x$, $G(y) = -e^{-y}$, so ist $G(\tilde{J}) = G(\mathbb{R}) = (-\infty, 0)$ und $G^{-1} : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $s \mapsto -\log(-s)$. Wir erhalten

$$y(x) = -\log(\cos x - \cos x_0 + e^{-y_0}), \quad x \in \tilde{I},$$

wobei $\tilde{I}$ ein Intervall ist mit $x_0 \in \tilde{I}$ und $-\cos x + \cos x_0 - e^{y_0} \in G(\mathbb{R})$, also mit $\cos x - \cos x_0 + e^{-y_0} > 0$ für alle $x \in \tilde{I}$. Durch Vergleich sehen wir $C = e^{-y_0} - \cos x_0$, also insbesondere $C > -1$.

Für $C > 1$ kann man $\tilde{I} = \mathbb{R}$ setzen. Für $C \in (-1, 1]$ hingegen ist das Existenzintervall der Lösung beschränkt. Für $x_0 = 0$ ist etwa $C \leq 1$ genau dann, wenn $y_0 \geq -\log 2$. Für $y_0 \geq -\log 2$ ist dann das maximale Existenzintervall gegeben durch $\tilde{I} = \{x \in (-\pi, \pi) : |x| < \arccos(1 - e^{-y_0})\}$.



$$y(x) = -\log(\cos x + C) \text{ für } C + \cos x > 0.$$

Ende Di 17.01.12

12.5. Zur linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_1, a_0, b \in C(I)$, sowie $x_0 \in I$.

Satz: Für alle $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &= b(x), \quad x \in I, \\ y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1, \end{aligned} \tag{L2}$$

genau eine Lösung $\phi : I \to \mathbb{R}$, dh ϕ ist auf I zweimal differenzierbar und genügt der Differentialgleichung und den Anfangswertbedigungen in (L2).

Wir zeigen Eindeutigkeit allgemein, Existenz für $b(x) = 0$ nur für den Fall, dass $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Für konstante a_0, a_1 diskutieren wir die inhomogene Gleichung. Außerdem beschränken wir uns auf $I = [x_0, b]$.

(i): Sind $\phi_1, \phi_2 : I \to \mathbb{R}$ Lösungen der *inhomogenen Gleichung*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{L2-inhom}$$

so ist $z := \phi_1 - \phi_2 : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der zugehörigen *homogenen Gleichung*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{L2-hom}$$

Gilt $\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0)$, $\phi_1'(x_0) = \phi_2'(x_0)$, so ist $z(x_0) = 0$ und $z'(x_0) = 0$.

(ii) Wir nehmen nun $x_0 = 0$ und $I = [0, b]$ an. Ist $z : I \to \mathbb{R}$ Lösung von (L2-hom) mit $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$ und setzen wir $w(t) := z(t)^2 + z'(t)^2$, $t \in I$, so gilt $w(0) = 0$, $w \geq 0$ und

$$\begin{aligned} w'(t) &= 2z(t)z'(t) + 2z'(t)z''(t) \\ &\leq w(t) - 2a_1(t)z'(t)^2 - 2a_0(t)z(t)z'(t) \\ &\leq Lw(t), \quad t \in I, \end{aligned}$$

wobei $L := 1 + 2\max\{|a_1(t)| : t \in I\} + \max\{|a_0(t)| : t \in I\} \in \mathbb{R}$ (da $a_1, a_0 \in C(I)$, vgl. 8.15). Nach 12.2 ist $w = 0$ auf I, also $z = 0$ auf I. Im Falle $y_0 = y_1 = 0$, $b(x) = 0$ ist das Anfangswertproblem (L2) also eindeutig lösbar durch die Nullfunktion. Im allgemeinen Fall ist (L2) im Falle der Existenz von Lösungen eindeutig lösbar.

(iii) Wie bei 12.3 gilt auch hier: Kennt man irgendeine Lösung ϕ_P von (L2-inhom), so erhält man *alle* Lösungen von (L2-inhom) als $\phi = \phi_P + z$, wobei z alle Lösungen von (L2-hom) durchläuft.

(iv) Lösungen von (L2-hom) erhält man durch den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$, der auf die Gleichung

$$\underbrace{\lambda^2 + a_1\lambda + a_0}_{:=p(\lambda)} = 0$$

führt mit den Lösungen $\lambda_{1/2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$, den Nullstellen des *charakteristischen Polynoms p*.

Die allgemeine Lösung z von (L2-hom) hat die Form

$$z(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind und ϕ_1, ϕ_2 die folgenden Lösungen von (L2-hom):

$$\begin{array}{rl} \phi_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad \phi_2(x) = e^{\lambda_2 x}, & \text{falls } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ verschieden}, \\ \phi_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad \phi_2(x) = xe^{\lambda_1 x}, & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}, \\ \phi_1(x) = e^{\sigma x}\cos(\omega x), \quad \phi_2(x) = e^{\sigma x}\sin(\omega x), & \text{falls } \lambda_{1/2} = \sigma \pm i\omega \text{ mit } \omega \neq 0. \end{array}$$

Zunächst rechne man nach, dass z eine Lösung von (L2-hom) ist. Da sich zu gegebenen $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so bestimmen lassen, dass $z(x_0) = y_0$, $z'(x_0) = y_1$ gilt (am einfachsten ist dies für $x_0 = 0$ zu sehen), sind dies *alle* Lösungen von (L2-hom) (mehr kann es nach (ii) nicht geben).

(v) Sind ψ_1, ψ_2 Lösungen von (L2-inhom) für rechte Seiten $b_1(x)$ bzw. $b_2(x)$ und sind $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so ist $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ eine Lösung von (L2-inhom) für die rechte Seite $c_1b_1(x) + c_2b_2(x)$.

Für rechte Seiten $b(x)$ der Form $b(x) = q_m(x)e^{\alpha x}\left\{\begin{array}{l}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{array}\right.$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und q_m ein Polynom vom Grad $m \in \mathbb{N}_0$ ist, führt der **Ansatz**

$$y_P(x) = \Big[r_m(x)\cos(\beta x) + \tilde{r}_m(x)\sin(\beta x)\Big]e^{\alpha x}x^\nu$$

zum Ziel, wobei r_m und $\tilde{r}_m$ Polynome vom Grad $\leq m$ sind und $\alpha+i\beta$ eine ν-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms p ist (beachte, das die Spezialfälle $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $m = 0$, $\nu = 0$ möglich sind).

Beispiel $a_1 = 0$, $a_0 = 1$: Hier ist $p(\lambda) = \lambda^2+1$, also $\lambda_{1/2} = \pm i$. Die Lösung der homogenen Gleichung $y'' + y = 0$ ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten jetzt in $y'' + y = b(x)$ die **rechte Seite** $b(x) = \cos(\beta x)$ mit $\beta \geq 0$.

Fallunterscheidung: $\beta \neq 1$: Dann ist $i\beta$ *keine* Nullstelle von p (dh $\nu = 0$) und wir machen den Ansatz

$$y_P(x) = \gamma \cos(\beta x) + \delta \sin(\beta x).$$

Dann ist

$$y_p'(x) = -\gamma\beta \sin(\beta x) + \delta\beta \cos(\beta x), \qquad y_P''(x) = -\gamma\beta^2 \cos(\beta x) - \delta\beta^2 \sin(\beta x),$$

und

$$y_P'' + y_P = \gamma(1-\beta^2)\cos(\beta x) + \delta(1-\beta^2)\sin(\beta x) \stackrel{!}{=} \cos(\beta x)$$

führt auf $\delta = 0$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1}$ (beachte $\beta^2 \neq 1$). Wir erhalten die Lösung

$$y_P(x) = (1-\beta^2)\cos(\beta x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (1-\beta^2)^{-1}\cos(\beta x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ist also für jede Wahl der Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beschränkt.

Fall $\beta = 1$: Hier ist $i\beta$ *einfache* Nullstelle des charakteristischen Polynoms p (dh $\nu = 1$). Der Ansatz

$$y_P(x) = \gamma x \cos x + \delta x \sin x$$

gibt

$$y_P'(x) = (\gamma + \delta x)\cos x + (\delta - \gamma x)\sin x, \qquad y_P''(x) = (2\delta - \gamma x)\cos x + (-2\gamma - \delta x)\sin x,$$

und

$$y_P'' + y_P = 2\delta \cos x - 2\gamma \sin x \stackrel{!}{=} \cos x$$

führt auf $\delta = 1/2$, $\gamma = 0$. Wir erhalten die Lösung

$$y_P(x) = \frac{x}{2}\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2}\sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

ist also für jede Wahl der Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ **unbeschränkt**: Die periodische Anregung mit der Eigenfrequenz $\omega = 1$ des ungestörten Systems führt zur *Resonanzkatastrophe*. Ende Do 19.01.12

Bemerkung: Zur Lösung von (L2) im Fall konstanter $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ kann man die Differentialgleichung schreiben als

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right) \underbrace{\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right) y}_{:=v} = b(x).$$

Löse nun zunächst

$$v' = \lambda_1 v + b(x), \quad v(x_0) = y_1 - \lambda_2 y_0,$$

nach 12.3 und anschließend

$$y' = \lambda_2 y + v(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

nach 12.3. Dies geht jedenfalls für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Für $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ beachte man:

Man kann Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ differenzieren und integrieren, indem man dies jeweils einzeln für Real- und Imaginärteil von f macht. So gilt z.B.

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$
$$\int e^{\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Die Aussagen aus 12.3 gelten sinngemäß auch für komplexwertige Funktionen, so dass diese "Faktorisierungsmethode" prinzipiell auch für konjugiert komplexe $\lambda_{1/2}$ anwendbar ist.

13 Integration (Fortsetzung)

Wir erinnern an den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz aus 7.16 und 8.8: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *auf* $[a,b]$ *gleichmäßig konvergent* gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, falls es eine Nullfolge (a_n) so gibt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\forall x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| \le a_n.$$

13.1. Konvergenzsatz für Integrale: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \in R[a,b]$, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann gilt $f \in R[a,b]$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \left[= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\right].$$

Bei gleichmäßiger Konvergenz kann man also Limes und Integral vertauschen.

Beweis. Wir verwenden 11.4. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} =: \delta$$

und eine Zerlegung Z mit $S_{f_n}(Z) - s_{f_n}(Z) < \varepsilon/3$. Sind I_j, M_j und m_j wie in 11.1, so haben wir für jedes j (vgl. Beweis von 11.9):

$$M_j - m_j = \sup\{|f(x) - f(\tilde{x})| : x, \tilde{x} \in I_j\}.$$

Wegen

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\tilde{x})| + |f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| \le 2\delta + |f_n(x) - f_n(\tilde{x})|$$

erhalten wir

$$S_f(Z) - s_f(Z) \le 2\delta(b-a) + S_{f_n}(Z) - s_{f_n}(Z) = \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

so dass $f \in R[a,b]$ aus 11.4 folgt. Wegen 11.14(2) haben wir

$$\Big| \int_a^b f_n\,dx - \int_a^b f\,dx \Big| \le \int_a^b \underbrace{|f_n - f|}_{\le a_n}\,dx \le (b-a)a_n,$$

woraus Konvergenz der Integrale folgt. $\square$

Beispiele: (1) Sei $b > 0$ und $f_n(x) := e^{-x^2/n}$ für $x \in [-b, b]$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert (f_n) auf $[-b, b]$ punktweise gegen $f : [-b, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. Für jedes $x \in [-b, b]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt dabei

$$|f_n(x) - f(x)| = 1 - e^{x^2/n} \leq 1 - e^{-b^2/n} =: a_n.$$

Wegen $a_n \to 0$ konvergiert (f_n) auf $[-b, b]$ gleichmäßig gegen f, also

$$\int_{-b}^{b} e^{-x^2/n}\,dx \longrightarrow \int_{-b}^{b} 1\,dx = 2b \quad (n \to \infty).$$

(2) Sei $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & , x \in [0, 1/n] \\ n^2(2/n - x) & , x \in (1/n, 2/n] \\ 0 & , x \in (2/n, 2] \end{cases} .$$

Dann gilt $\int_0^2 f_n(x)\,dx = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und für jedes $x \in [0, 2]$ konvergiert die Folge $(f_n(x))$ gegen 0. Setzt man $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, so konvergiert die Folge (f_n) auf $[0, 2]$ *punktweise* gegen f. Die Folge der Integrale $(\int_0^2 f_n(x)\,dx)$ konvergiert jedoch *nicht* gegen $\int_0^2 f(x)\,dx = 0$. Insbesondere konvergiert (f_n) also auf $[0, 2]$ nicht *gleichmäßig* gegen f (das kann man natürlich auch direkt einsehen). Dieses Beispiel zeigt, dass Satz 13.1 ohne Gleichmäßigkeit der Konvergenz im allgemeinen falsch ist.

(3) Sei $f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(nx)$. Dann gilt

$$(f_n(\pi/2)) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots),$$

insbesondere ist (f_n) auf $[0, \pi]$ nicht punktweise konvergent. Trotzdem gilt

$$\int_0^{\pi} f_n(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{1}{n}\Big[-\cos(nx)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{n}(1 - (-1)^n) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Aus Konvergenz der Integrale kann also nicht auf punktweise Konvergenz der Integranden geschlossen werden.

13.2. Anwendung (Integration von Potenzreihen): Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$ und $I := (x_0 - R, x_0 + R)$, sowie

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Dann ist durch

$$F : I \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$$

eine Stammfunktion von f auf I gegeben.

Beachte, dass die Aussage äquivalent zu Satz 10.16 ist, den wir im Beweis aber nicht verwenden! Die Aussage von 10.16 ist damit gezeigt.

Beweis. Nur für $x_0 = 0$ (sonst verschieben!): Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in I$ setze $f_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Für jedes Intervall $[a,b] \subseteq I$ konvergiert die Folge $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ nach 7.16 auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f, so dass nach 13.1 gilt:

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b f_N\,dx.$$

Ist $x \in I$, so können wir dies anwenden auf $[0,x]$ bzw. $[x,0]$ und erhalten

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,dt = F(x).$$

Die Aussage gilt also nach dem Hauptsatz. $\square$

13.3. Anwendung (Vertauschen von Limes und Differentiation): Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n \in C^1[a,b]$ und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derart, dass (f_n') auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen g konvergiert und dass (f_n) auf $[a,b]$ punktweise gegen f konvergiert. Dann gilt $f \in C^1[a,b]$ und $f' = g$ auf $[a,b]$.

Beweis. Zunächst ist $g \in C[a,b] \subseteq R[a,b]$ nach 8.8 und 11.9(2). Für jedes $x \in [a,b]$ gilt nach 13.1:

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt \;\longrightarrow\; \int_a^x g(t)\,dt$$

Andererseits steht links nach dem Hauptsatz $f_n(x) - f_n(a)$ und nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_n(a) = f(x) - f(a).$$

Also ist

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g\,dt, \quad x \in [a,b],$$

und nach dem Hauptsatz ist $f \in C^1[a,b]$ mit $f' = g$ auf $[a,b]$. $\square$

Ende Mo 23.01.12

Die folgenden Vereinbarungen sollen für den Rest des Kapitels gelten:

> Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so sei f über jedes Intervall $[a,b] \subseteq I$ integrierbar.
>
> Es seien stets $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < \beta$ und $\alpha < b$.

13.4. Konvergenz uneigentlicher Integrale: Sei $f : [a, \beta) \to \mathbb{R}$ (bzw. $(\alpha, b] \to \mathbb{R}$) eine Funktion. Das *uneigentliche Integral* $\int_a^\beta f(x)\,dx$ (bzw. $\int_\alpha^b f(x)\,dx$) heißt *konvergent*, falls der Limes $\lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\,dx$ (bzw. $\lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\,dx$) existiert und reell ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^\beta f(x)\,dx := \lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\,dx \quad \Big(\text{bzw.} \quad \int_\alpha^b f(x)\,dx := \lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\,dx\Big).$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral heißt *divergent*.

Beispiele: (1) Sei $\gamma > 0$. Dann gilt für jedes $r > 1$:

$$\int_1^r \frac{1}{x^\gamma}\,dx = \begin{cases} \log r & ,\gamma = 1 \\ \frac{r^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} & ,\gamma \neq 1 \end{cases},$$

also ist $\int_1^\infty x^{-\gamma}\,dx$ konvergent genau dann, wenn $\gamma > 1$ ist. In diesem Fall ist das Integral $= 1/(\gamma - 1)$.

(2) Für $r > 0$ gilt

$$\int_0^r \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan r \to \frac{\pi}{2} \quad (r \to \infty).$$

Also ist $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konvergent und $= \pi/2$.

(3) Sei $\gamma > 0$. Dann gilt für $r \in (0, 1)$:

$$\int_r^1 \frac{1}{x^\gamma}\,dx = \begin{cases} -\log r & ,\gamma = 1 \\ \frac{1-r^{1-\gamma}}{1-\gamma} & ,\gamma \neq 1 \end{cases},$$

also ist $\int_0^1 x^{-\gamma}\,dx$ konvergent genau dann, wenn $\gamma < 1$ ist. In diesem Fall ist das Integral $= 1/(1 - \gamma)$.

(4) Analog zu (2): $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ist konvergent und $= \pi/2$.

Definition: Sei $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das *uneigentliche Integral* $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ heißt *konvergent*, falls es ein $c \in (\alpha, \beta)$ so gibt, dass die uneigentlichen Integrale $\int_\alpha^c f(x)\,dx$ und $\int_c^\beta f(x)\,dx$ **beide** konvergent sind. In diesem Fall setzt man

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := \int_\alpha^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx,$$

und die Definition ist unabhängig von $c \in (\alpha, \beta)$.

Das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ heißt *divergent*, falls $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ nicht konvergent ist.

Beispiele: (5) Sei $\gamma > 0$. Nach den Beispielen (1) und (3) ist $\int_0^\infty x^{-\gamma}\,dx$ divergent.

(6) Nach den Beispielen (2) und (4) ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konvergent und $= \pi$.

Bemerkung: Wir betrachten im folgenden nur den Fall von Funktionen $f : [a, \beta) \to \mathbb{R}$. Entsprechendes gilt jeweils auch für Funktionen $f : (\alpha, b] \to \mathbb{R}$ bzw. $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$.

13.5. Satz (Cauchykriterium): $\int_a^\beta f(x)\,dx$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c = c(\varepsilon) \in (a, \beta)$ gibt mit

$$\forall u, v \in (c, \beta) : \left| \int_u^v f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

(ohne Beweis)

Beispiel: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ist konvergent.

Zunächst beachten wir $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0+$, weshalb das Integral bei 0 nicht uneigentlich ist. Für $v > u > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Big| \int_u^v \frac{\sin x}{x}\,dx \Big| &= \Big| \int_u^v \underbrace{\frac{1}{x}}_{g} \underbrace{\sin x}_{f'}\,dx \Big| \\
&= \Big| \Big[-\frac{\cos x}{x} \Big]_u^v - \int_u^v \frac{\cos x}{x^2}\,dx \Big| \\
&\le \frac{|\cos u|}{u} + \frac{|\cos v|}{v} + \int_u^v \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \\
&\le \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \Big[-\frac{1}{x} \Big]_u^v = \frac{2}{u}.
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Für $v > u > 2/\varepsilon$ gilt dann $| \int_u^v \frac{\sin x}{x}\,dx| \le 2/u < \varepsilon$.

13.6. Absolute Konvergenz uneigentlicher Integrale: $\int_a^\beta f(x)\,dx$ heißt *absolut konvergent*, falls $\int_a^\beta |f(x)|\,dx$ konvergent ist.

Beispiel: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ist **nicht** absolut konvergent. Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt nämlich

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \underbrace{\int_0^\pi |\sin x|\,dx}_{=2} \frac{1}{(k+1)\pi} = \frac{2}{(k+1)\pi},$$

also für $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)\pi} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Mithilfe von 13.5 kann man zeigen (ähnlich wie bei Reihen, vgl. 7.3 und 7.4):

13.7. Satz: (1) Ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ konvergent und

$$\left|\int_a^\beta f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\beta |f(x)|\,dx.$$

(2) **Majorantenkriterium:**
Ist $|f| \leq g$ auf $[a,\beta)$ und $\int_a^\beta g(x)\,dx$ konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ absolut konvergent.

(3) **Minorantenkriterium:**
Ist $f \geq g \geq 0$ auf $[a,\beta)$ und $\int_a^\beta g(x)\,dx$ divergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ divergent.

Beispiele: (1) $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,dx$; setze $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}$ und $g(x) := x^{-3/2}$. Dann gilt $|f(x)| = f(x) \leq g(x)$ für jedes $x \geq 1$. Da $\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx$ konvergiert, konvergiert auch $\int_1^\infty f(x)\,dx$ und es gilt:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \leq \int_1^\infty g(x)\,dx = 2.$$

(2) $\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{x^2+7x}}_{=:f(x)}\,dx$; setze $g(x) = 1/x$. Dann gilt $f(x)/g(x) = \frac{x^2}{x^2+7x} \to 1$ $(x \to \infty)$ und wir finden $c \geq 1$ mit $f/g \geq 1/2$ auf $[c,\infty)$, dh es gilt $f(x) \geq g(x)/2 = (2x)^{-1}$ für alle $x \geq c$ (man kann hier $c = 7$ nehmen, wie man direkt einsieht). Da $\int_c^\infty (2x)^{-1}\,dx$ divergiert, divergiert auch $\int_c^\infty f(x)\,dx$, und somit divergiert auch $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Warnung: Sind $\int_a^\beta f\,dx$ und $\int_a^\beta g\,dx$ konvergent, so muss $\int_a^\beta fg\,dx$ **nicht** konvergieren! Ende Di 24.01.12

14 Grundzüge der linearen Algebra

14.1. Verknüpfungen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$: Sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen (dh $x_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$) und $\mathbb{C}^n$ ist die Menge aller n-Tupel $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ komplexer Zahlen (dh $z_j \in \mathbb{C}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$).

Wir schreiben im folgenden oft $\mathbb{K}$ für den *Skalarkörper*, wobei $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ steht. Also

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{K} \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Wir erklären Verknüpfungen

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

durch

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \end{aligned}$$

dh also durch *komponentenweise* Addition bzw. komponentenweise Multiplikation mit α. Der Punkt $\cdot$ für die Multiplikation mit Skalaren wird gewöhnlich weggelassen.

Für die **Anschauung** besonders wichtig sind $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

Beispiele im $\mathbb{R}^2$: $(1, 1) + (0, 1) = (1, 2)$, $2 \cdot (1, -1) = (2, -2)$.

14.2. Vektorraumaxiome: Setzen wir $V = \mathbb{K}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, so haben die in 14.1 definierten Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ die folgenden Eigenschaften:

$(V1)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in V$ (Assoziativität),
$(V2)$ $x + y = y + x$ für alle $x, y \in V$ (Kommutativität),
$(V3)$ es gibt eine $0 \in V$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in V$ (Existenz der Null),
$(V4)$ für jedes $x \in V$ gibt es ein $-x \in V$ mit $x + (-x) = 0$ (Existenz des Negativen),
$(V5)$ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in V$ (Assoziativität der Multiplikationen),
$(V6)$ $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ und $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$ (Distributivität),
$(V7)$ $1x = x$ für alle $x \in V$ (Kompatibilität).

Definition: Ist $V \neq 0$ eine Menge mit Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, für welche die Eigenschaften $(V1)$–$(V7)$ gelten, so heißt V ein *Vektorraum über* $\mathbb{K}$ oder ein $\mathbb{K}$-*Vektorraum* ($\mathbb{K}$-*VR*). Die Elemente eines Vektorraumes heißen *Vektoren.*

Beispiele: $\mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathbb{C}^n$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, aber auch: $\mathbb{C}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, insbesondere ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Allgemein: jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum ist auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

14.3. Wichtiges Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein n-Tupel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ können wir auch auffassen als Abbildung (Funktion)

$$x : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{K} \text{ mittels } x(j) := x_j \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Allgemeiner sei nun $M \neq \emptyset$ eine Menge und

$$\mathbb{K}^M := \text{ Menge aller Abbildungen } x : M \to \mathbb{K}.$$

Setzt man für $x, y \in \mathbb{K}^M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} x + y : M \to \mathbb{K}, &\qquad m \mapsto x(m) + y(m), \\ \alpha \cdot x : M \to \mathbb{K}, &\qquad m \mapsto \alpha x(m), \end{aligned}$$

so ist $\mathbb{K}^M$ bzgl. dieser Verknüpfungen $+ : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^M \to \mathbb{K}^M$ und $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^M \to \mathbb{K}^M$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beispiele: (1) $M = \mathbb{N}$: $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist die Menge aller Folgen in $\mathbb{K}$, dh

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \ldots) : \; x_j \in \mathbb{K} \text{ für jedes } j \in \mathbb{N}\}$$

ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Verknüpfungen sind hier

$$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots), \quad \alpha(x_1, x_2, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots).$$

(2) $M = [a, b]$ mit $a < b$ reell: Die Menge $\mathbb{K}^{[a,b]}$ aller Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $f, g \in \mathbb{K}^{[a,b]}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ sind $f + g$ und αf *punktweise* erklärt (wie sonst ja auch schon!).

Bemerkung: Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so gilt für alle $x \in V$: $0 \cdot x = 0$ und $-x = (-1) \cdot x$.

Beweis: Es ist $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = (0 \cdot x) + (0 \cdot x)$, also

$$0 \overset{(V4)}{=} 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x) \overset{(V1)}{=} 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x)) \overset{(V4)}{=} 0 \cdot x + 0 \overset{(V3)}{=} 0 \cdot x.$$

Weiter ist

$$x + (-1) \cdot x \overset{(V7)}{=} 1 \cdot x + (-1) \cdot x \overset{(V6)}{=} (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x \overset{(s.o.)}{=} 0,$$

also $(-1) \cdot x = -x$.

14.4. Untervektorräume: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition: Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum* oder *linearer Teilaum* von V, falls U bzgl. der Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ von V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

Satz: Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist Untervektorraum von V genau dann, wenn

(i) $U \neq \emptyset$ ist und

(ii) für alle $x, y \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt: $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$,

dh genau dann, wenn U nichtleer ist und *abgeschlossen* unter den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$.

Bemerkung: Die Bedingung (i) kann man ersetzen durch $0 \in U$.

Beispiele: (1) $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K} \times \{0\} \times \{0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^3$.

(2) Sind $x, y \in \mathbb{K}^n$, so ist $\{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

(3) $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ist **kein** Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$, nicht abgeschlossen unter $+$.

(4) $C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ ist **kein** Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$. C ist zwar abgeschlossen unter $+$, aber $-x \notin C$ für $x \in C \setminus \{0\}$.

(5) Ist $M \neq \emptyset$ ein Menge, so ist $B(M) := \{f \in \mathbb{R}^M : f \text{ ist beschränkt}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^M$. Für $f : M \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Supremumsnorm* $\|f\|_\infty$ von f durch

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(m)| : m \in M\} \in [0, \infty].$$

Dann gilt $B(M) = \{f \in \mathbb{R}^M : \|f\|_\infty < \infty\}$. Nun gehört die Nullfunktion zu $B(M)$, und für $f, g \in B(M)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $m \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} |(f+g)(m)| &= |f(m) + g(m)| \leq |f(m)| + |g(m)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ |\alpha f(m)| &= |\alpha||f(m)| \leq |\alpha|\|f\|_\infty, \end{aligned}$$

also $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty$ und $\|\alpha f\|_\infty \leq |\alpha|\|f\|_\infty < \infty$. Somit ist $f + g, \alpha f \in B(M)$.
Allgemein gilt für alle $f, g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \quad \|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$$

("=" hat man bei der zweiten Eigenschaft, weil ja auch $\|f\|_\infty \leq |\alpha|^{-1}\|\alpha f\|_\infty$ gilt).

(6) Ist $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, so sind $C[a, b]$, $C^1[a, b]$ und $R[a, b]$ Untervektorräume von $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

(7) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sind $a_0, a_1 \in C(I)$, so ist

$$\mathscr{L}_0 := \{\phi : I \to \mathbb{R} : \phi \text{ ist Lösung von } y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \text{ auf } I\}$$

ein Untervektorraum von $C^2(I)$. $C^2(I)$ wiederum ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^I$.

Bemerkung: Sind U_1, U_2 Untervektorräume des Vektorraumes V, so sind auch $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ Untervektorräume von V.

Beispiel: $C_b(\mathbb{R}) := C(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Ende Do 16.01.12

14.5. Affine Teilräume: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ heißt *affiner Teil-* oder *Unterraum* von V, falls es einen Untervektorraum U von V und ein $w_0 \in V$ gibt mit

$$W = w_0 + U = \{w_0 + u : u \in U\}.$$

Bemerkung: (1) Ist $W = w_0 + U$ ein affiner Teilraum, so folgt

$$U = \{w - w_0 : w \in W\} = \{w_1 - w_2 : w_1, w_2 \in W\}.$$

Ist umgekehrt $W \subseteq V$ nicht-leer und

$$U := \{w_1 - w_2 : w_1, w_2 \in W\}$$

ein Untervektorraum von V, so ist W ein affiner Teilraum von V und $W = w + U$, wobei man $w \in W$ beliebig wählen kann.

(2) Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V, so wird durch

$$v_1 \sim_U v_2 \;:\Longleftrightarrow\; v_1 - v_2 \in U$$

eine Äquivalenzrelation $\sim_U$ in V definiert (vgl. 2.9). Für jedes $v \in V$ ist die Äquivalenzklasse $[v]_{\sim_U}$ von v bzgl. $\sim_U$ ein affiner Teilraum von V und es gilt $[v]_{\sim_U} = v + U$.

Beispiele: (1) Ist im $\mathbb{R}^2$ der Untervektorraum U eine Gerade durch den Nullpunkt, so sind die Äquivalenzklassen von $\sim_U$ genau die zu U parallelen Geraden in $\mathbb{R}^2$.

(2) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sind $a_0, a_1, b \in C(I)$, so ist die Lösungsmenge $\mathscr{L}$ der Differentialgleichung $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ ein affiner Teilraum von $C^2(I)$, nämlich $\mathscr{L} = y_P + \mathscr{L}_0$, wobei y_P irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist und $\mathscr{L}_0$ die Lösungsmenge der homogenen Gleichung (vgl. Beispiel (7) in 14.4).

14.6. Der lineare Aufspann: Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Vektoren aus V, so heißt jeder Vektor der Form

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad \text{mit } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

eine *Linearkombination* (*LK*) der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Satz: Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subseteq V$, so ist

$$\operatorname{lin}(M) := \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j : n \in \mathbb{N}_0, \alpha_j \in \mathbb{K}, v_j \in M \Big\}$$

ein Untervektorraum von V, genannt der *lineare Aufspann von M* (oder *der von M erzeugte Untervektorraum*) (erinnert sei an die Konvention $\sum_{j=1}^{0} \alpha_j v_j = 0$).

Bemerkung: (1) $\text{lin}(M)$ besteht aus allen Linearkombinationen von Vektoren aus M (und ev. Null, denn $\text{lin}(\emptyset) = \{0\}$).

(2) Offenbar ist $\text{lin}(M)$ der *kleinste* Untervektorraum von V, der M enthält. Insbesondere ist U ein Untervektorraum von V genau dann, wenn $\text{lin}(U) = U$ gilt.

Beispiele: (1) In $V = \mathbb{R}^2$ gilt $\text{lin}(\{(1,0)\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$.

(2) In $V = \mathbb{R}^2$ gilt $\text{lin}(\{(1,0),(0,1)\}) = \mathbb{R}^2 = \text{lin}(\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$.

(3) Für K aus Beispiel 14.4(3) gilt $\text{lin}(K) = \mathbb{R}^2$.

(4) Für C aus Beispiel 14.4(4) gilt $\text{lin}(C) = \mathbb{R}^2$.

(5) Sei $\mathscr{L}_0 := \{\phi \in C^2(I) : \phi'' + \phi = 0\}$. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist $\lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$. Nach 12.5 gilt also

$$\mathscr{L}_0 = \text{lin}\{\sin, \cos\}.$$

14.7. Lineare Unabhängigkeit: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition: Eine Teilmenge $M \subseteq V$ heißt *linear unabhängig*, falls für jedes $v \in M$ gilt, dass $\text{lin}(M \setminus \{v\}) \neq \text{lin}(M)$, das heißt also, falls man keinen Vektor aus M entfernen kann, ohne den linearen Aufspann zu verkleinern. Ist M nicht linear unabhängig, so heißt M *linear abhängig*.

Bemerkung: Eine Teilmenge $M \subseteq V$ ist linear abhängig genau dann, wenn es einen Vektor $v_0 \in M$ gibt, der Linearkombination von Vektoren aus $M \setminus \{v_0\}$ ist.

Definition: Man nennt n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ *linear unabhängig*, falls für alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Man sagt dazu, dass man den Nullvektor nur als *triviale Linearkombination* der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ erhalten kann.

Sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig, so heißen sie *linear abhängig*.

Beispiele: (1) $M = \emptyset$ ist linear unabhängig.

(2) $M = \{v\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn $v \neq 0$ gilt.

(3) In $\mathbb{R}^2$ sind $(1,0),(0,1)$ linear unabhängig, aber $(1,0),(0,1),(1,1)$ sind linear abhängig.

(4) In $\mathbb{K}^n$ sind die *Einheitsvektoren* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ linear unabhängig. Hierbei ist Ende Mo 30.01.12

$$e_j := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \ldots, 0) \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Mithilfe des *Kroneckersymbols* $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases}$ ist also $e_j = (\delta_{jk})_{k=1}^n$.

(5) In $C^2(\mathbb{R})$ sind $\sin, \cos$ linear unabhängig.

14.8. Zeilenumformungen: Seien n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aus dem $\mathbb{K}^m$ gegeben, deren lineare Unabhängigkeit wir untersuchen wollen. Dabei sei $v_j = (v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jm})$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Wir schreiben die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ als **Zeilen** in eine Matrix A, dh

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nm} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist eine $n \times m$-Matrix mit n Zeilen und m Spalten. Wir schreiben dafür $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$.

Die Matrix A bringen wir in eine Form, an der wir die lineare Unabhängigkeit der Zeilen ablesen können, mittels der folgenden *Zeilenumformungen* für eine gegebene $n \times m$-Matrix B mit Zeilen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{K}^m$:

(Z1) Ersetze eine Zeile w_j durch αw_j, wobei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;

(Z2) Ersetze eine Zeile w_j durch $w_j + \beta w_k$, wobei $\beta \in \mathbb{K}$ und $k \neq j$;

(Z3) Vertausche die Zeilen w_j und w_k, wobei $j \neq k$.

Bemerkung: Die Zeilen von B sind genau dann linear unabhängig, wenn die Zeilen der umgeformten Matrix linear unabhängig sind.

Satz: Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ kann man durch endlich viele Zeilenumformungen in eine Matrix $C \in \mathbb{K}^{n \times m}$ überführen, die in *Zeilenstufenform* (*ZSF*) ist. Dabei heißt

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

in *Zeilenstufenform*, falls es ein $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq m$ gibt mit

für $j = 1, 2, \ldots, r$ gilt $c_{jk} = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, k_j - 1$ und $\gamma_j := c_{jk_j} \neq 0$;

für $j = r + 1, \ldots, n$ gilt $c_{jk} = 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, m$.

Man braucht dafür sogar nur Umformungen der Art (Z2) und (Z3).

Beispiel mit $n = 5$ und $m = 8$ und $r = 4$, hierbei seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \neq 0$ und $*$ ist ein beliebiger Eintrag:

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_4 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folgerung: Die n Zeilen der Matrix A sind genau dann linear unabhängig, wenn für eine zugehörige Matrix in Zeilenstufenform $r = n$ gilt. Dies kann wegen $r \leq m$ höchstens dann sein, wenn $n \leq m$ ist.

Beispiel: Wir untersuchen die Vektoren $v_1 = (1, 3, -2, 4)$, $v_2 = (-1, -1, 5, -9)$, $v_3 = (2, 0, -13, 23)$, $v_4 = (1, 5, 1, -2) \in \mathbb{R}^4$ und erhalten nacheinander die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & -9 \\ 2 & 0 & -13 & 23 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -6 & -9 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 sind nicht linear unabhängig.

Bemerkung: Man sieht aber auch, dass Zeilenumformungen den linearen Aufspann der Zeilen einer Matrix nicht ändern. Ein Blick auf die dritte Matrix zeigt, dass v_3 eine Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_4 ist (es wurden bis dahin nur Umformungen der Art (Z2) vorgenommen, dh es wurden keine Zeilen vertauscht!): es gilt also

$$\text{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{lin}(v_1, v_2, v_4).$$

Außerdem sieht man, dass v_1, v_2, v_4 linear unabhängig sind.

14.9. Zeilennormalform: Eine Matrix, die in Zeilenstufenform ist, kann man durch Zeilenumformungen auf *Zeilennormalform* (*ZNF*) bringen. Dabei heißt $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ in *Zeilennormalform*, falls zusätzlich (mit den Bezeichnungen von 14.8) gilt:

> für $j = 1, 2, \ldots, r$ gilt: $\gamma_j = c_{jk_j} = 1$ und $c_{lk_j} = 0$ für $l = 1, 2, \ldots, j - 1$ (dh oberhalb von c_{jk_j} stehen nur Nullen).

Beispiel mit $n = 5$ und $m = 8$, $r = 4$ aus 14.8:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Für die konkrete Matrix im Beispiel in 14.8 formen wir weiter um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13/2 & 23/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14.10. Basen und Dimension: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition: Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt *Basis von V*, falls B linear unabhängig ist und $\mathrm{lin}(B) = V$ gilt. V heißt *endlich-dimensional*, falls V eine endliche Basis hat, und V heißt *unendlich-dimensional*, wenn es keine endliche Basis von V gibt.

Satz und Definition: Ist V endlich-dimensional, so enthalten je zwei Basen von V die gleiche Anzahl von Elementen. Diese Zahl heißt die *Dimension von V*, geschrieben $\dim V$.

Beispiel: Es gilt $\dim \mathbb{K}^n = n$ und eine Basis ist gegeben durch die *Einheitsvektoren* $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Bemerkung: V ist unendlich-dimensional genau dann, wenn V eine unendliche linear unabhängige Teilmenge enthält. Eine unendliche Teilmenge M von V ist linear unabhängig genau dann, wenn je endlich viele verschiedene Vektoren aus M linear unabhängig sind.

Beispiel: Die Menge $P[a,b]$ der Polynomfunktionen $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist ein unendlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum: Da Summen und Produkte von Polynomen wieder Polynome sind, ist $P[a,b]$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[a,b]}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei p_k gegeben durch $p_k(x) := x^k$. Dann ist $\{p_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig, denn für $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_m p_m = 0 \quad \text{auf } I$$

folgt $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, da nur das Nullpolynom unendlich viele Nullstellen hat (vgl. 5.4).

Ende Di 31.01.12

Bemerkung: $B \subseteq V$ ist Basis von V genau dann, wenn es zu jedem Vektor $v \in V$ eine eindeutig bestimmte endliche Teilmenge $E \subseteq B$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $\alpha : E \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gibt mit $v = \sum_{b \in E} \alpha(b) b$ (dh v lässt sich *auf genau eine Weise* als Linearkombination von Vektoren aus B schreiben). Insbesondere gilt:

Ist $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eine Basis von V, so gibt es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j,$$

die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ heißen *Koordinaten* von v bzgl. der Basis $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Beweis: Existenz folgt aus $v \in V = \text{lin}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Sind $\alpha_j, \tilde{\alpha}_j \in \mathbb{K}$ für $j = 1, \ldots, n$ mit $\sum_{j=1}^n \alpha_j b_j = v = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j b_j$, so folgt

$$0 = v - v = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \tilde{\alpha}_j) b_j$$

und weiter $\alpha_j = \tilde{\alpha}_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$, da $b_1, b_2, \ldots, b_n$ linear unabhängig sind.

Satz: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Dann ist die Dimension $\dim \text{lin}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ des linearen Aufspanns von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ gerade die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren unter den $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Beispiel: Im $\mathbb{R}^3$ sei $\vec{v}_1 := (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 := (1, 0, 0)$ und $\vec{v}_3 := (0, 1, 0)$. Dann sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear unabhängig, aber $\vec{v}_3 \in \text{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ist Basis von $\text{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \text{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Es ist $\dim \text{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = 2$. Auch $\vec{v}_1, \vec{v}_3$ bzw. $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind hier Basen von $\text{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Warnung: Für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist es für die Dimensionsbestimmung wichtig, ob man ihn als $\mathbb{C}$-Vektorraum oder als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet, dh ob man Linearkombinationen mit komplexen oder nur mit reellen Koeffizienten zulässt. So gilt $\mathbb{C}\text{-}\dim \mathbb{C} = 1$, aber $\mathbb{R}\text{-}\dim \mathbb{C} = 2$ (wie schon an der Veranschaulichung von $\mathbb{C}$ als komplexe Zahlen*ebene* zu sehen ist). Eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$ ist gegeben durch $1, i$.

Ebenso ist die Dimension von $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum $= n$ und eine Basis ist $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Die Dimension von $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist hingegen $= 2n$ und eine Basis ist z.B. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, i\vec{e}_1, i\vec{e}_2, \ldots, i\vec{e}_n$.

14.11. Lineare Gleichungssysteme: Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Wir schreiben ein *lineares Gleichungssystem (LGS)*

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots & + a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots & + a_{2m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \ldots & + a_{nm}x_m & = b_n \end{array}$$

mit gegebenen $a_{jk}, b_j \in \mathbb{K}$ und gesuchten $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{K}$ in Matrixschreibweise als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder als $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben und $\vec{x} \in \mathbb{K}^m$ gesucht ist. Hierbei verwenden wir das *Matrix-Vektor-Produkt*:

Für $A = (a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m} \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{x} = (x_k)_{k=1}^m \in \mathbb{K}^m$ ist

$$A\vec{x} = \Big(\sum_{k=1}^m a_{jk}x_k\Big)_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n.$$

Beachte: Wir schreiben Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, die wir bisher als m-Tupel geschrieben haben, ab jetzt ggf. als **Spaltenvektoren**! Dies ist die übliche Konvention.

Beispiel: Sei $l \in \{1, 2, \dots, m\}$. Für den l-ten Einheitsvektor $\vec{e_l} = (\delta_{lk})_{k=1}^m \in \mathbb{K}^m$ erhalten wir

$$A\vec{e_l} = \Big(\sum_{k=1}^m a_{jk}\delta_{kl}\Big)_{j=1}^n = (a_{jl})_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n,$$

dh $A\vec{e_l}$ **ist die l-te Spalte der Matrix** A. Für $n = m = 3$ und $l = 2$ ist etwa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}.$$

14.12. Eigenschaften des Matrix-Vektor-Produktes:

Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^m$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \qquad (A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}, \qquad A(\alpha\vec{x}) = \alpha(A\vec{x}) = (\alpha A)\vec{x},$$

wobei für $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ die Matrizen $A + B, \alpha A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ gegeben sind durch

$$A + B = (a_{jk} + b_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}, \qquad \alpha A = (\alpha a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m},$$

dh an jeder Stelle (j, k) werden die Einträge addiert bzw. mit α multipliziert.

Satz: Mit diesen Verknüpfungen ist $\mathbb{K}^{n\times m}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n \cdot m$. Eine Basis ist gegeben durch die Matrizen

$$B_{pq} := (\delta_{jp}\delta_{kq})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}, \qquad p = 1, \dots, n,\ q = 1, \dots, m.$$

Die Matrix B_{pq} hat gerade an der Stelle (p, q) eine Eins und sonst Nullen.

14.13. Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems: Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Wir setzen

$$\mathrm{Kern}\, A := \{\vec{x} \in \mathbb{K}^m : A\vec{x} = \vec{0}\} \subset \mathbb{K}^m \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}\, A := \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{K}^m\} \subseteq \mathbb{K}^n.$$

Kern A ist die Lösungsmenge der *homogenen Gleichung* $A\vec{x} = \vec{0}$. Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ heißt *inhomogen* und $\vec{b}$ heißt *Inhomogenität* der Gleichung.

Satz: (1) Kern A ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^m$ und Bild A ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

(2) Bild A ist der lineare Aufspann der Spalten von A.

(3) Sind $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^m$ mit $A\vec{x} = \vec{b} = A\vec{y}$, so ist $\vec{x} - \vec{y} \in$ Kern A. Ist $\vec{z} \in$ Kern A, so ist $A(\vec{x} + \vec{z}) = b$. Insbesondere ist die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung, wenn sie nicht-leer ist, ein affinier Teilraum von $\mathbb{K}^m$.

Beweis. (2) Für jeden Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ gilt

$$\vec{x} = \sum_{l=1}^{m} x_l \vec{e}_l, \quad \text{also} \quad A\vec{x} = A(\sum_{l=1}^{m} x_l \vec{e}_l) = \sum_{l=1}^{m} x_l (\underbrace{A\vec{e}_l}_{l\text{-te Spalte von } A})$$

(vgl. Beispiel aus 14.11). (1) und (3) folgen aus 14.12. □

Folgerung: (1) Wir erhalten die Gesamtheit der Lösungen der inhomogenen Gleichung (falls es überhaupt welche gibt), indem wir zu einer **speziellen** Lösung der inhomogenen Gleichung alle Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung addieren.

(2) Es gilt

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ ist lösbar} \iff \vec{b} \in \text{Bild}\, A \iff \vec{b} \text{ ist LK der Spalten von } A.$$

Ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar, so ist die Lösung eindeutig genau dann, wenn Kern $A = \{0\}$ gilt.

Beispiele: (1) $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann hat $A\vec{x} = \vec{b}$ keine Lösung.

(2) Sei A wie eben und $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar und die Menge aller Lösungen ist der affine Teilraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{K} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\operatorname{lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \text{Kern } A} .$$

(3) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $\vec{x} := \left(\begin{smallmatrix} -1/2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ die eindeutige Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.

Bemerkung: Ein lineares Gleichungssystem kann also keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.

Ende Do 02.02.12

14.14. Lösungsalgorithmus: Seien $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Zur Lösung erweitern wir die Matrix A um $\vec{b}$ als $(m+1)$-te Spalte, betrachten also $(A \,|\, \vec{b}) \in \mathbb{K}^{n \times (m+1)}$. Für

$A = (a_{jk})$ und $\vec{b} = (b_j)$ ist

$$(A \,|\, \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

Wir werden Zeilenumformungen verwenden (vgl. 14.8).

Beobachtung: Geht die Matrix $(\tilde{B} \,|\, \tilde{\vec{c}})$ aus der Matrix $(B \,|\, \vec{c})$ durch eine Zeilenumformung hervor, so gilt

$$\{\vec{x} \in \mathbb{K}^m : \tilde{B}\vec{x} = \tilde{\vec{c}}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^m : B\vec{x} = \vec{c}\},$$

dh die Lösungsmenge der entsprechenden linearen Gleichungssysteme ändert sich nicht.

Allgemein gilt: Geht $\tilde{B}$ aus B durch eine Zeilenumformung hervor und ist die k-te Spalte von B Linearkombination anderer Spalten von B, so ist die k-te Spalte von $\tilde{B}$ Linearkombination der entsprechenden Spalten von $\tilde{B}$ und zwar *mit denselben Koeffizienten.*

Algorithmus (Eliminationsverfahren nach Gauß):

(1) Matrix A um $\vec{b}$ als letzte Spalte erweitern.
(2) Die erweiterte Matrix $(A \,|\, \vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf ZNF (oder ZSF) bringen.
(3) Lösbarkeit und Lösung ablesen.

Zu Schritt (2) vergleiche 14.8 und 14.9.

Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösbarkeit: Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist **nicht lösbar** genau dann, wenn eine ZSF von $(A \,|\, \vec{b})$ die Form $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n \times (m+1)}$ hat und es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $c_{jk} = 0$ für $k = 1, \dots, m$ und $c_{j,m+1} \neq 0$.

Mit den Bezeichnungen aus 14.8 ist dies genau dann der Fall, wenn $k_r = m + 1$ gilt.

Beispiel: siehe Beispiel 14.13(1). Dort ist $n = m = 2$, $r = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$.

Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösung: Man bringe die Matrix auf Zeilennormalform. Wir zeigen am Beispiel, wie man im Falle der Lösbarkeit die Lösungen ablesen kann. Dazu nehmen wir an, dass die berechnete Zeilennormalform von $(A \,|\, \vec{b})$ die folgende Gestalt hat (hier ist $n = 4$, $m = 5$):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Man nehme die Variablen zu den Spalten, die "hinter" den Stufen stehen (im Beispiel die dritte und die fünfte Spalte), als *freie Parameter* (im Beispiel also etwa $s = x_3$ und $t = x_5$). Schreibt man die Gleichungen wieder aus, so erhält man

$$x_1 = c_1 - s\alpha_1 - t\beta_1, \quad x_2 = c_2 - s\alpha_2 - t\beta_2, \quad x_4 = c_3 - t\beta_3.$$

Also ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ 0 \\ -\beta_3 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{K} \right\}.$$

Hier gilt $\operatorname{Kern} A = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ 0 \\ -\beta_3 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ und $\dim(\operatorname{Kern} A) = 2$. Die Lösungsmenge ist eine Ebene durch den Punkt $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zum selben Ergebnis gelangt man mit dem (-1)**-Ergänzungstrick:**

> Ausgehend von der Zeilennormalform lasse man zunächst die Nullzeilen weg. Dann ergänze man unter den Zeilen mit "längeren" Stufen eine Zeile mit -1 und sonst Nullen, so dass auf der Diagonalen nur ± 1 steht. Im Beispiel
>
> $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_3 & c_3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 & c_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$
>
> Dann nimmt man für jede (-1)-Spalte einen freien Parameter und kann die Lösungsmenge hinschreiben: letzte Spalte plus jeweils freier Parameter mal entsprechender Spalte, also
>
> $$\left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \\ \beta_3 \\ -1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{K} \right\}.$$

Man vergleiche dies mit der Darstellung oben.

Bemerkung: Enthält die ZNF links Nullspalten, so ergänze man für diese die (-1)-Zeilen *oben*. Im Beispiel 14.12(2) also

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (0\,1\,|\,1) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

mit der abgelesenen Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{K} \right\}.$$