Zusammenfassung HM1

Julian Baader

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Logik

1.1 Aussagen

Eine *Aussage* ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist. *Logische Verknüpfungen* von Aussagen definieren wir durch *Wahrheitstafeln*

1. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
2. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow B)]$
3. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
4. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
5. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Eine *Aussageform* A(x,y,...) ist ein Satz, der eine oder mehrere Variablen enthält und durch Einsetzen konkreter Objekte in die Variablen eine Aussage ist.

1.2 Quantoren

Allquantor $\forall x : A(x)$ bedeutet, dass die Aussage A(x) für alle x wahr ist.

Existenzquantor $\exists x : A(x)$ bedeutet, es gibt mindestens ein Objekt x, für das A(x) wahr ist.

Negation: Änderung des Quantors und Negation der Aussage

Quantoren können durch weitere Aussagen eingeschränkt werden

2 Mengen

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Objekte einer Menge heißen *Elemente*

$x \in M$, $x \notin M$ sind wiederum Logische Aussagen

$\{x : A(x)\}$ Menge aller x, für die A(x) wahr ist

2.1 Definition Mengen-Relationen

$\cup \cap \setminus = \subseteq \subset$
Sollte bekannt sein

2.2 De Morgansche Regeln

1. $Q \setminus (M \cup N) = (Q \setminus M) \cap (Q \setminus N)$
2. $Q \setminus (M \cap N) = (Q \setminus M) \cup (Q \setminus N)$

2.3 Potenzmengen

$Pot(M) := \{N : N \subseteq M\}$
Damit folgt $M \subseteq Pot(M)$ und $\emptyset \in Pot(M)$

2.4 Kartesisches Produkt

$M_1 \times M_2 \times ... \times M_n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) : \forall j \in \{1, ..., n\} : x_j \in M_j\}$

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ heißt n-Tupel.

Ist eine Menge $M_j = \emptyset$, so ist das kartesische Produkt gleich der leeren Menge.

Sind alle Mengen gleich schreibt man auch M^n.

2.5 Relationen

X und Y seien Mengen ($\neq \emptyset$) und $R \subseteq X \times Y$ Dann heißt R eine *Relation.*
Statt $(x, y) \in R$ schreibt man auch xRy

1. R heißt reflexiv $:\Leftrightarrow \forall x \in X : xRx$
2. R heißt symmetrisch $:\Leftrightarrow$ aus xRy folgt stets yRx
3. R heißt transitiv $:\Leftrightarrow$ aus xRy und yRz folgt stets xRz
4. R heißt eine Äquivalenzrelation $:\Leftrightarrow$ R erfüllt 1-3
5. R heißt antisymmetrisch $:\Leftrightarrow$ aus xRy und yRx folgt stets $x = y$
6. R heißt Ordnungsrelation $:\Leftrightarrow$ R erfüllt 1,3,5

2.5.1 Äquivalenzklasse

für $X \neq \emptyset$ und $R \subseteq X \times X$ eine Äquvialenzrelation
$[x]_R := \{y \in X : xRy\}$

3 Funktionen

Eine *Funktion oder Abbildung* $f : X \to Y$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet. Dafür schreibt man $y = f(x)$ oder $x \mapsto f(x) = y$

X heißt *Definitionsbereich* und Y *Wertebereich* von f.

$\{(x, f(x)) : x \in X\}(\subseteq X \times Y)$ heißt *Graph* von f

$f(X) := \{f(x) : x \in X\}$ heißt Bildmenge von f.

- Für $A \subseteq X : f(A) := \{f(x) : x \in A\}$
- Für $B \subseteq Y : f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ Urbild von B

3.1 Arten von Funktionen

f heißt *injektiv* $:\Leftrightarrow$ aus $x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2)$ folgt stets $x_1 = x_2$

f heißt *surjektiv* $:\Leftrightarrow f(X) = Y$

f heißt *bijektiv* $:\Leftrightarrow$ f ist injektiv und surjektiv.

3.2 Verkettung

$f : X \to Y$ *und* $g : Y \to Z$ seien Funktionen. $g \circ f : X \to Z$ ist def. durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ $(x \in X)$.

3.3 Umkehrfunktion

f sei bijektiv. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}Y \to X$ def. durch:

$\forall y \in Y$ $\exists$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Setze $f^{-1}(y) := x$.

Außerdem gilt $id_X(x) = x = f^{-1} \circ f$ und $id_Y(y) = y = f \circ f^{-1}$.

3.4 Sätze

Satz 3.1: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Satz 3.2: Jacke Hemd Regel:
$f : X \to Y$ $g : Y \to Z$ seien Bijektiv, dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Satz 3.3: Verkettung von Umkehrfunktionen

1. $f : X \to Y$ ist bijektiv $\Leftrightarrow$ es ex. eine Funktion $g : Y \to X$mit $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_Y$
2. ist$f$ bijektiv, so auch f^{-1} und $(f^{-1})^{-1} = f$

4 Reelle Zahlen

Auf den reellen Zahlen gibt es zwei Verknüpfungen Plus und Mal

4.1 Axiome der Reellen Zahlen

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c)$ Assoziativgesetz
2. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$
3. $\forall a \in \mathbb{R} \exists - a : a + (-a) = 0$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$ Kommutativgesetz
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ Assoziativgesetz
6. $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus 0 : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$
7. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus 0 \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1}) = 1$
8. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$ Kommutativgesetz
9. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = ab + ac$ Distributivgesetz
10. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \vee b \leq a$
11. aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt stets $a \leq c$ Transitivität

12. aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt stets $a = b$ Antisymmetrie
13. aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c\ \forall c \in \mathbb{R}$
14. aus $a \leq b$ und $0 \leq c$ folgt stets $ac \leq bc$
15. Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach oben beschränkt, so existiert supM.

Sei $K \neq \emptyset$ und sind $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ zwei Verknüpfungen, für die A1-9, so heißt K ein *Körper*. $\mathbb{R}$ ist also ein Körper

4.2 Ordnungsrelationen, Intervalle, Beträge

$<>\leq\geq$

$a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $(a, b); [a, b]$ und beliebige Kombinationen

- $\langle a, b\rangle := [a, b]$, falls $a < b$
- $\langle a, b\rangle := [b, a]$, falls $a > b$

4.3 Beschränktheit von Mengen

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$

M heißt *nach oben beschränkt* $:\Leftrightarrow \exists\gamma \in \mathbb{R} : x \leq \gamma \forall x \in M$

Dann heißt γ eine *obere Schranke* von M

Ist γ eine Obere Schranke von M und gilt $\gamma \leq \delta$ für jede weitere OS von M, so heißt γ das *Supremum von M* (kleinste Obere Schranke von M) und wir schreiben $\gamma = Sup(M)$

Existiert das Supremum von M und ist $sup(M) \in M$,

so heißt $sup(M) = max(M)$ Maximum von M. (größtes Element von M)

Analog für US, inf, min.

Aufgrund des 12. Axioms ist sup und inf eindeutig bestimmbar

M heißt beschränkt :⇔ M ist nach oben und nach unten Beschränkt.
$(\Leftrightarrow \exists c \geq 0 : |x| \leq c\ \forall x \in M)$
Dann gilt: $infM \leq supM$

sup$M = +\infty$:⇔ M ist nicht nach oben beschränkt.

inf $M = -\infty$:⇔ M ist nicht nach oben beschränkt.

M heißt endlich :⇔ $M = \emptyset$ oder es ex. ein $n \in \mathbb{N}$ und eine surjektive Funktion $f : \{1, 2, ...n\} \to M$.

M heißt abzählbar :⇔ es ex. eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$

Ist $M \neq \emptyset$ und endlich, so ist M abzählbar.

M heißt überabzählbar :⇔ M ist nicht abzählbar

4.4 Natürliche Zahlen

Sei $\mathscr{L}$ eine nicht leere Menge von Mengen:

$$\bigcup_{B \in \mathscr{L}} := \{x : \exists B \in \mathscr{L} : x \in B\}$$

$$\bigcap_{B \in \mathscr{L}} := \{x : \forall B \in \mathscr{L} : x \in B\}$$

4.4.1 Induktionsmengen

$A \subseteq \mathbb{R}$ heißt Induktionsmenge $:\Leftrightarrow 1 \in A$ und aus $x \in A$ folgt stets $x + 1 \in A$

$\mathscr{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} : A$ ist eine IM$\}$

$\mathbb{N} := \bigcap_{A \in \mathscr{A}}$

Definition durch Induktion
für jedes $n \in \mathbb{N}$ soll ein Term $T(n)$ definiert werden. Sei $T(1)$ def. und für $n \in \mathbb{N}$ sei $T(n+1)$ def. unter der Vorraussetzung, dass $T(1), ...T(n)$ definiert sind. Dann ist $T(n)$ für *alle* $n \in \mathbb{N}$ definiert.
Beispiele: Fakultät, (Natürliche)Potenzen, Summenzeichen ($\sum$), Produktzeichen ($\prod$)

4.4.2 Verallgemeinerte Dreiecksungleichung

Seien $a_1, a_2, ... \in \mathbb{R}$ Dann: $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

4.4.3 Erweiterung der Natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ Ganze Zahlen

$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ Rationale Zahlen.

Ganze Potenz: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Binomial Koeffizient: $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

4.5 Wurzeln

1. $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.
2. In $\mathbb{R}$ ziehen wir Wurzeln nur aus Zahlen ≥ 0
3. $\sqrt{x^2} = |x|$

4.5.1 Rationale Exponenten

1. Sei $a \geq 0$, $r \in \mathbb{Q}$ und $r > 0$.
   Dann ex. $m, n \in \mathbb{N}$ mit $r = \frac{m}{n}$

$$a^r := (\sqrt[n]{a})^m$$

2. Sei $a \neq 0$ und $r \in \mathbb{Q}$

$a^r := \frac{1}{a^{-r}}$

4.6 Sätze

Satz 4.1: Verschiedene Gleichungen und Ungleichungen
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $c \geq 0$

1. $|a| \geq 0$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
2. $|ab| = |a| \cdot |b|$
3. $a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$
4. $|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$ Dreiecksungleichung
6. $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

Satz 4.2: Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und is M nach unten beschränkt, so ex. infM

Satz 4.3: Sei $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$

1. Ist A nach oben beschränkt, so auch B und $\sup B \leq \sup A$.
   Ist A nach unten beschränkt, so auch B und $\inf B \geq \inf A$.
2. A sei nach oben beschränkt und γ sei eine OS von A. Dann: $\gamma = supA$
   $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists x \in A : x > \gamma - \epsilon$
   A sei nach unten beschränkt und γ sei eine US von A. Dann: $\gamma = infA$
   $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists x \in A : x < \gamma + \epsilon$

Satz 4.4: Eigenschaften von $\mathbb{N}$

1. $\mathbb{N} \in \mathscr{A}$ und $\mathbb{N} \subseteq A\ \forall A \in \mathscr{A}$
2. $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt
3. Ist $x \in \mathbb{R}$, so ex. ein $n \in \mathbb{N}:\ n > x$
4. Ist $\varepsilon > 0$, so ex. ein $n \in \mathbb{N}:\ \frac{1}{n} < \varepsilon$

Satz 4.5: Prinzip der vollständigen Induktion:
Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und $A \in \mathscr{A}$, so ist $A = \mathbb{N}$

Satz 4.6: Beweisverfahren durch Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussageform ($n \in \mathbb{N}$) und es gelte:

1. $A(1)$ ist wahr
2. ist $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ wahr, so ist auch $A(n+1)$ wahr

Dann ist $A(n)$ wahr für *alle* $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.7: Minimum einer Menge
Ist $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Z}$ und ist A nach unten beschränkt, so ex. $minA$

Satz 4.8: Werte zwischen zwei Reellen Zahlen ($x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y$)

1. Ist $y - x > 1$, so existiert $p \in \mathbb{Z}: \ x < p < y$
2. $\exists r \in \mathbb{Q}: \ x < r < y$.

Satz 4.9: $a, b \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}, \ q \in \mathbb{R}$ und $q \neq 1$

$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + ... + ab^{-1} + b^n) = (a-b) \sum\limits_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$

$\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Daraus folgt:

$x, y \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}$, $p = n+1$, $x = a$, $y = b$

$x^p - y^p = (x-y) \sum\limits_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k}y^k \Rightarrow |x^p - y^p| = |x-y| \sum\limits_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k}p^k \geq |x-y|y^{p-1}$

Satz 4.10: Binomischer Satz ($a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Satz 4.11: Bernoullische Ungleichung:

Sei $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$.

Dann: $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Satz 4.12:

Sei $a \in \mathbb{R}$

1. Ist $a > 1$ und $c > 1$, so ex. $n \in \mathbb{N}: \ a^n > c$
2. Ist $0 < a < 1$ und $\varepsilon > 0$, so ex. $n \in \mathbb{N}: \ a^n < \varepsilon$.

Satz 4.13: Seien $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

$$x \geq y \Leftrightarrow x^n \geq y^n$$

Satz 4.14: Wurzel

Sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Dann ex. genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$ und $b^n = a$.

Bezeichnung: $b = \sqrt[n]{a}$

Satz 4.15: Verbindung Geometrisches und Arithmetrisches Mittel.
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, ..., a_n \geq 0$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 .... a_n} \leq \frac{a_1 + ... + a_n}{n}$$

5 Komplexe Zahlen

Es war $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Auf $\mathbb{R}^2$ def. wir zwei Verknüpfungen.

A: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

M: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$\mathbb{R}^2$ ist ein Körper

$\mathrm{i} := (0, 1)$ Damit folgt $\mathrm{i}^2 = -1$

Schreibweise $x + \mathrm{i}y$ statt (x, y)

Körper der Komplexen Zahlen: $\mathbb{C} := \{x + \mathrm{i}y : \; x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathrm{Re}z := x$ und $\mathrm{Im}z := y$

$\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ (die zu z konjugierte komplexe Zahl)

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ (Betrag von z)

$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = \overline{z}z$.

für $z \neq 0$ ist $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

5.1 Polynome

$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$

Ist $a_n \neq 0$ heißt n der Grad von p.

Ist $a_n = 1$ heißt p normiert.

Falls $a_0, a_1, ...a_n \in \mathbb{R}$ heißt p reel

Ist $p(z_0) = 0$ heißt z_0 eine Nullstelle von p.

$\mathbb{C}\,[z] :=$ Menge aller Polynome mit komplexen Koeffizienten.

Beachte: Das Nullpolynom hat keinen Grad

5.2 Sätze

Satz 5.1: Regeln zu Imaginären Zahlen

1. $z = w \Leftrightarrow \mathrm{Re}z = \mathrm{Re}w$ und $\mathrm{Im}z = \mathrm{Im}w$
2. $\overline{(\overline{z})} = z$
3. $|z| = |\overline{z}|$
4. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
5. $\overline{zw} = \overline{z}\;\overline{w}$
6. $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\mathrm{Im}z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$

7. $|\text{Re}z|, |\text{Im}z| \le |z| \le |\text{Re}z| + |\text{Im}z|$
8. $|zw| = |z||w|$
9. $|\sum_{k=1}^{n} z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$
10. $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$

Satz 5.2: Polynom vom Grad $n \ge 1$

1. $p(z_0) = 0$ so gibt es eindeutig bestimmte $m \in \{1, ...n\}$ und $q \in \mathbb{C}[z]$ mit Grad $n - m$, so dass

$$p(z) = (z - z_0)^m q(z) \text{und} q(z_0) \ne 0$$

$z - z_0$ heißt Linearfaktor und m die Vielfachheit der Nullstelle z_0

2. Fundamentalsatz der Algebra

ist $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$, so gibt es $z_1, z_2, ...z_n \in \mathbb{C}$ mit:

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdot ... \cdot (z - z_n)$$

p hat also Nullstellen in $\mathbb{C}$ und zwar höchstens n.

Ist z_0 eine NS, so kommt z_0 in der Liste $z_1, z_2, ...z_n$ so oft vor, wie ihre Vfh angibt.

6 Folgen und Konvergenz

Sei $\emptyset \ne X$, $p \in \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_p := \{p, p+1, p+2, ...\}$,

$a: \ \mathbb{Z}_p \to X$ eine Funktion.

Dann heißt a eine *Folge in X*

Schreibweisen: $a_n = a(n)$; $a = (a_n)_{n \ge p} = (a_n)_{n=p}^{\infty} = (a_n) = (a_p, a_{p+1}, ...)$

Meist $p = 0$ oder $p = 1$

6.1 Konvergenz

(a_n) heißt Konvergent

$:\Leftrightarrow \exists a \in X: \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \ge n_0.$

a heißt *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n) mit den bekannten Schreibweisen.

Ist $a = 0$ so heißt (a_n) eine *Nullfolge*

Ist (a_n) nicht konvergent, so heißt (a_n) divergent.

Beachte:

- $a_n \to a \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0$

- $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$

Sei $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$

$U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a| < \varepsilon\}$ Epsilon-Umgebung von a

Sei $A(n)$ eine Aussageform

$A(n)$ ist wahr für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$:\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ A(n)$ ist wahr für alle $n \geq n_0$.

Damit folgt:

1. $a_n \to a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ gilt $a_n \in U_\varepsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N}$
2. Gilt $A(n)$ ffa n und gilt $B(n)$ ffa n, so gilt $A(n) \wedge B(n)$ ffa n

6.2 Beschränktheit

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$

M heißt beschränkt $:\Leftrightarrow \exists c \geq 0 : \ |z| \leq c \ \forall z \in M$

Sei(a_n) eine Folge in X

So heißt (a_n) beschränkt $:\Leftrightarrow \{a_n : \forall n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

6.3 Monotonie

Intuitiv

6.4 Eulersche Zahl

$$\begin{aligned} a_n &:= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ b_n &:= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ Dann : b_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n \geq a_n \end{aligned}$$

e $:= \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx 2,718...$ heißt eulersche Zahl

6.5 Teilfolgen

Sei (a_n) eine Folge und (n_k) eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < ....$

Dann heißt $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty} = (a_{n_1}, a_{n_2}, ...)$ eine Teilfolge von (a_n)

6.6 Häufungswert

α heißt Häufungswert von $(a_n) :\Leftrightarrow$ eine TF von (a_n) existiert mit $(a_{n_k}) \to \alpha$

6.7 Niedrig

n heißt *niedrig* für $(a_n) :\Leftrightarrow a_m \geq a_n \ \forall m \geq n$

6.8 Cauchyfolge

Eine Folge heißt eine *Cauchyfolge*

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ |a_n - a_m| < \varepsilon \ \forall n, m \geq n_0$

6.9 Unendlicher Grenzwert

$(a_n) \to +\infty :\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}: \ c > (a_n)$ ffa n

$(a_n) \to -\infty :\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}: \ c < (a_n)$ ffa n

6.9.1 Regeln

1. $a_n \to \pm\infty \Leftrightarrow |a_n| \to \infty$ und $\frac{1}{a_n} \to 0$
2. Ist (a_n) monoton wachsend, so ex. ein $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a_n \to a$

   Ist (a_n) monoton fallend, so ex. ein $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ mit $a_n \to a$
3. Ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, so ex eine TF mit $a_{n_k} \to +\infty$

   Ist (a_n) nicht nach unten beschränkt, so ex eine TF mit $a_{n_k} \to -\infty$

6.10 limsup liminf

(a_n) eine Folge. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \coloneqq \{a_k : k \geq\} = \{a_n, a_{n+1}, ...\}$.

Ist (a_n) nicht nach oben beschränkt:$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \coloneqq \limsup a_n \coloneqq \infty$

Ist (a_n) nicht nach unten beschränkt:$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \coloneqq \liminf a_n \coloneqq -\infty$

Ist (a_n) nach oben beschränkt, dann sind alle A_n nach oben beschränkt. Setze $b_n \coloneqq \sup A_n (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (b_n)$ ist monoton fallend, setze $\limsup \coloneqq \lim b_n$.

Ist (a_n) nach unten beschränkt, dann sind alle A_n nach unten beschränkt. Setze $b_n \coloneqq \inf A_n (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (b_n)$ ist monoton steigend, setze $\liminf \coloneqq \lim b_n$.

6.11 Übersicht Folgen

- Konstante Folge strebt gegen Konstante
- $\frac{1}{n} \to 0$
- $(-1)^n$ divergiert
- b^n
  1. $|b| > 1$ divergiert
  2. $|b| = 1$ Keine allg. Aussage möglich
  3. $|b| < 1 \to 0$

- $x \in \mathbb{R}$ so ex. eine Folge (r_n) in $\mathbb{Q}$ mit $r_n \to x$
- Ist $a \in X$ und (α_n) eine NF in $\mathbb{R}$ mit $|a_n - a| \leq \alpha_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a_n \to a$
- $(a_n) \to a \Leftrightarrow \mathrm{Re} a_n \to \mathrm{Re} a$ und $\mathrm{Im} a_n \to \mathrm{Im} a$
- $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$
- $a_n \to a$, $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
- $a_n \to a$, $c_n \to a$ und $a_n \leq b_n \leq c_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n \to a$
- $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann (gilt auch in $\mathbb{C}$):
  1. $a_n + b_n \to a + b$
  2. $\alpha a_n \to \alpha a$
  3. $a_n b_n \to ab$
  4. Ist $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

6.3
- Monotoniekriterium
  - (a_n) sei eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge. Sei $a := sup\{a_n : \; n \in \mathbb{N}\}$. Dann: $a_n \to a$

6.5
  - (a_n) sei eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge. Sei $a := inf\{a_n : \; n \in \mathbb{N}\}$. Dann: $a_n \to a$
- $a \geq 0$ und $a_n \to a \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$
- $\sqrt[n]{n} \to 1$
- Ist $c > 0$, so gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$

6.12 Sätze

Satz 6.1: (a_n) sein eine Folge

1. Ist (a_n) konvergent, so ist ihr GW eindeutig bestimmt.
2. Ist (a_n) konvergent, so ist (a_n) beschränkt.
3. Ist $a \in X$ und (α_n) eine NF in $\mathbb{R}$ mit $|a_n - a| \leq \alpha_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a_n \to a$
4. $(a_n) \to a \Leftrightarrow \mathrm{Re} a_n \to \mathrm{Re} a$ und $\mathrm{Im} a_n \to \mathrm{Im} a$
5. Ist (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a_n \to a$, so is $a \in \mathbb{R}$

Satz 6.2: (a_n), (b_n) und (c_n) seien Folgen in $\mathbb{R}$

1. $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$ (gilt auch in $\mathbb{C}$
2. $a_n \to a$, $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
3. $a_n \to a$, $c_n \to a$ und $a_n \leq b_n \leq c_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n \to a$

4. $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann (gilt auch in $\mathbb{C}$):
   (a) $a_n + b_n \to a + b$
   (b) $\alpha a_n \to \alpha a$
   (c) $a_n b_n \to ab$
   (d) Ist $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

Satz 6.3: Monotoniekriterium

(a_n) sei eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge.

Sei $a := sup\{a_n :\ n \in \mathbb{N}\}$. Dann: $a_n \to a$

(a_n) sei eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge.

Sei $a := inf\{a_n :\ n \in \mathbb{N}\}$. Dann: $a_n \to a$

Satz 6.4: α ist ein HW von (a_n)
$\Leftrightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

Satz 6.5: (a_n) Sei eine Folge

1. Sind die TF (a_{2n}) und (a_{2n+1}) konvergent und gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} := s$, so gilt $a_n \to s$
2. Ist (a_n) konvergent und (a_{n_k}) eine TF, so gilt $(a_{n_k}) \to \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

Satz 6.6: (a_n) sei eine Folge in $\mathbb{R}$, dann enthält (a_n) eine Monotone TF

Satz 6.7: Satz von Bolzano-Weierstraß

(a_n) sei eine beschränkte Folge (in $\mathbb{C}$)

Dann enthält (a_n) eine konvergente Teilfolge

(a_n) hat also Häufungswerte

Satz 6.8: Cauchykriterium

(a_n) ist Konvergent $\Leftrightarrow$ (a_n) ist eine Cauchyfolge

Satz 6.9: $H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} :\ \alpha \text{ ist ein HW von } (a_n)\}$

1. $\liminf a_n \leq \limsup a_n$
2. $\exists$ TF $(a_{n_k}$ von (a_n) mit $a_{n_k} \to \limsup a_n (k \to \infty$
3. $\exists$ TF $(a_{n_k}$ von (a_n) mit $a_{n_k} \to \liminf a_n (k \to \infty$
4. Sei $\alpha := \limsup a_n$
   (a) ist $\beta > \alpha \Rightarrow a_n < \beta$ ffa $n \in \mathbb{N}$
   (b) ist $\gamma < \alpha \Rightarrow a_n > \gamma$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

   Sei $\alpha := \liminf a_n$

   (a) ist $\beta > \alpha \Rightarrow a_n < \beta$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$
   (b) ist $\gamma < \alpha \Rightarrow a_n > \gamma$ ffa $n \in \mathbb{N}$

5. Ist (a_n) beschränkt, so ist $H(a_n)$ beschränkt und $\limsup a_n = maxH(a_n)$, $\liminf a_n = minH(a_n)$
6. Ist (a_n) Konvergent $\Rightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$
7. Sind alle $a_n \geq 0$ und $\limsup a_n = 0 \Rightarrow a_n \to 0$

Satz 6.10: $M \neq \emptyset$ und $f : M \to Pot(M)$
Dann ist f nicht surjektiv $\Rightarrow Pot(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

7 Reihen

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge. Weiter sei $s_n := a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

Dann heißt die Folge eine (unendliche) Reihe.

a_n heißt n-tes Reihenglied und s_n die n-te Teilsumme.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent $:\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent

$(a_n), (b_n)$ seien Folgen in $(0, \infty)$ und es ex. $L := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ und es sei $L > 0$

Dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konv.

Sei (a_n) eine Folge und $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} bijektiv.$
Für $n \in \mathbb{N}$ setze $b_n := a_{\phi(n)}$.
Dann heißt (b_n) bzw. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Umordnung von (a_n) bzw. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

7.1 Cauchyprodukt

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$

$n \in \mathbb{N}_0$ setze $c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt Cauchyprodukt der Reihen.

7.2 Eigenschaften von Sinus und Cosinus

1. $\sin 0 = 0$; $\cos 0 = 1$
2. $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+q}}{(2n+1)!}$; $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
3. $\forall z \in \mathbb{C}$

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
- $\sin(-z) = -\sin z$; $\cos(-z) = \cos z$

4. für $x \in \mathbb{R}$: $\sin x, \cos x \ \in \mathbb{R}$

   insbes.: $|\sin x| \leq 1$ und $|\cos x| \leq 1$

5. Aus $e^{z+w} = e^z e^w$ folgen die Additionstheoreme

   $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

   $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

6. $|\sin z| \leq |z| e^{|z|} \ \forall z \in \mathbb{C}$

   $|\frac{\sin z}{z} - 1| \leq |z| e^{|z|} \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

   $|\frac{\cos z - 1}{z}| \leq |z| e^{|z|} \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

7.3 Potenzreihen

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$

heißt Potenzreihe; z_0 heißt Entwicklungspunkt der PR.

Die PR heißt reel $:\Leftrightarrow a_0, a_1, a_2, ... \in \mathbb{R}$

Potenzreihen konvergieren immer für $z = z_0$

Beispiele:

1. Die Potenzreihen für exp, sin, cos Konvergieren absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ (mit $z_0 = 0$)

2. Geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ konv. absolut für $z \in \mathbb{C}$ und $|z| < 1$

   (mit $z_0 = 0$, $a_n = 1$)

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ (mit $z_0 = 0$ und $a_n = n^n$)

   Konvergiert nur für $z = 0 = z_0$ (folgt aus 7.6)

- Konvergenzradius siehe 7.16.
- exp, sin, cos haben jeweils den KR $R = \infty$

  Damit folgt auch: $\limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ Mit 6.9 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^p z^n$ haben den KR $R = 1$
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n z^n; R = 0$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}; R = 1$

7.4 Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Definitionen ähnlich wie Folgen, Reihen

7.4.1 Punktweise Konvergenz

(f_n) heißt auf D punktweise konvergent $:\Leftrightarrow$ für jedes $x \in D$ ist die Folge $(f_n(x))$ bzw. die Reihe der Folge konvergent.

Definiere die Grenzfunktion f $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Punktweise konvergenz von (f_n) auf D gegen f bedeutet:

ist $x \in D$ und $\varepsilon > 0$, so ex. ein $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ mit:

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0$

7.4.2 Gleichmäßige Konvergenz

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in D$

Verständnis: Fast Alle Funktionswerte liegen im Epsilonschlauch

Aus Gleichmäßiger Konvergenz folgt Punktweise, aber nicht umgekehrt

7.5 Übersicht Reihen

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \to \frac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$ (Geometrische Reihe)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div. (Harmonische Reihe)

  Die alternierende Harmonische Reihe ist nach 7.3 konvergent
- (a_n) ist keine Nullfolge $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent
- 7.1 Monotoniekriterium, Verschiebung des Startpunktes, Linearität
- 7.2 Cauchykriterium
- 7.3 Leibnizkriterium
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ konv.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ konv.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ div.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$ konv.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konv. auf $D_0 = (-1, 1)$ glm. gegen $\frac{1}{1-x}$

- Kriterium von Weierstraß: 7.19
  - $f_n(x) = \frac{x}{n}$ konv. glm gegen $f = 0$
  - $\frac{\cos(...)\sin(...)}{n^2}$ konv auf $\mathbb{R}$ glm.
  - $\frac{x}{n}$ konv. auf $D = [0,1]$ glm. gegen $f = 0$

7.6 Sätze

Satz 7.1: (a_n) und (b_n) Folgen und $s_n := a_1 + ... + a_n$

1. Monotoniekriterium: sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt

   so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

2. Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $p \in \mathbb{N}$, so ist $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$ konvergent.

   Ist $r_p := \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$, so gilt $r_p \to 0$ $(p \to \infty)$

3. Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und sind α, β Zahlen, so ist

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ konvergent und

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Satz 7.2: Cauchykriterium
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist Konvergent $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; |\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon \; \forall m > n \geq n_0$

Satz 7.3: Leibnizkriterium
(b_n) sei eine monotonfallende Nullfolge. Ist $a_n := (-1)^n b_n$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Satz 7.4: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

- $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent
- $\Rightarrow |\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Bemerkung: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut Konvergent $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} a_n$ sind absolut Konvergent

Satz 7.5: $(a_n), (b_n)$ seien Folgen.

1. Majorantenkriterium: gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konv., so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent
2. Minorantenkriterium: gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ div., so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Satz 7.6: Wurzelkriterium

(a_n) sei eine Folge und $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$

1. Ist $\alpha > 1$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
2. Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
3. Im Falle $\alpha = 1$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Satz 7.7: Quotientenkriterium

(a_n) sei eine Folge und $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Setze $q_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| (n \in \mathbb{N})$

1. Ist $q_n \geq 1$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ div.
2. Ist $\liminf q_n > 1$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
3. Ist $limsup q_n < 1$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
4. (q_n) sei konvergent und $q := \lim q_n$.
   (a) $q > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ ist divergent.
   (b) $q < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ ist absolut konv.
   (c) $q = 1$ keine allgemeine Aussage möglich.

Satz 7.8: Die Exponentialreihe

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $(z \in \mathbb{C})$ konvergiert für jedez z absolut.

Satz 7.9:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}: \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Satz 7.10: (b_n) sei eine Umordnung von (a_n)

1. Ist (a_n) konvergent, so auch (b_n) und $\lim b_n = \lim a_n$
2. Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut Konvergent*, so auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Satz 7.11: Riemannscher Umordnungssatz

(a_n) sei eine Folge und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent.

$s \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dann ex eine Umordnung von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit Reihenwert s.

Satz 7.12: Konvergenz des CauchyProdukts

Die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent.

Dann ist auch das CP absolut konvergent und:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n)$

Satz 7.13: Eigenschaften der Exponentialfunktion

$E(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für jedes z absolut konvergent.

$E: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Eigenschaften bekannt durch $E(z) = \mathrm{e}^z$

Satz 7.14: Sei $z \in \mathbb{C}$

1. $|e^z - 1| \leq |z|\mathrm{e}^{|z|}$
2. Ist $z \neq 0$: $\left|\frac{e^z - 1}{z} - 1\right| \leq |z|e^{|z|}$

Satz 7.15: für $z \in \mathbb{C}$

- $\sin z := \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$
- $\cos z := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$

Satz 7.16: Konvergenzradius

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sei eine PR und es sei:

$\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$

$$R := \begin{cases} 0 & \text{, falls} \quad \rho = \infty \\ \infty & \text{, falls} \quad \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} & \text{, falls} \quad 0 < \rho < \infty \end{cases}$$

1. Ist $R = 0$, so konv die PR nur für $z = z_0$

2. Ist $R = \infty$, so konv. die PR absolut in jedem $z \in \mathbb{C}$
3. Sei $0 < R < \infty$
   (a) die PR konv. absolut in jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$
   (b) die PR div. in jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$
   (c) für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = R$ ist keine allgemeine Aussage möglich

Satz 7.17: folgt aus 7.7

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sei eine PR mit $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

Es sei $q_n := \left|\dfrac{a_n + 1}{a_n}\right|$

Quotientenkriterium:

1. Gilt $q_n \to \infty$, so hat die PR den KR $R = 0$
2. Gilt $q_n \to 0$, so hat die PR den KR $R = \infty$
3. Ist q_n konvergent mit $\lim q_n \in (0, \infty)$, so hat die PR den KR $R = (\lim q_n)^{-1}$

Satz 7.18: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ sei eine reele PR mit KR $R > 0$

$D = (x_0 - R, x_0 + r)$ mit $D = \mathbb{R}$, falls $R = \infty$

Ist $0 < r < R$, so konv. die PR auf $[x_0 - r, x_0 + r]$ glm.

Satz 7.19: $f_n, f : D \to \mathbb{R}$ seien Funktionen

1. Ist (α_n) eine Nullfolge und gilt:

   $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in D$

   so konv. (f_n) auf D gleichmäßig gegen f.
2. Kriterium von Weierstraß:

   ist (c_n) eine Folge in $[0, \infty)$, ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent und gilt

   $|f_n(x)| \leq c_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in D$

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konv. absolut in jedem $x \in D$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konv. auf D glm. gegen $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $(x \in D)$

8 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

8.1 Stetigkeit

$x_0 \in D$: f heißt stetig in x_0
:⇔ für *jede* Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$

f heißt stetig auf D :⇔ f ist in jedem $x \in D$ stetig.

$C(D) := \{f : D \to \mathbb{R} : \text{f ist in jedem } x \in D \text{ stetig } \}$

Funktionen sind in inneren und isolierten Punkten immer stetig

8.1.1 Gleichmäßige Stetigkeit

D und g wie in 8.2

g heißt auf D glm. stetig :⇔ $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : |g(x) - (y)| < \epsilon \ \forall x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$

8.2 Grenzwerte

8.2.1 Häufungspunkt

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ dann heißt x_0 ein Häufungspunkt von D

:⇔ $\exists$ Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$

1. Ist D endlich, so hat D keine HPe
2. $D = (0, 1)$: x_0 ist HP von D ⇔ $x_0 \in [0, 1]$
3. $D = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ D hat nur einen HP $x_0 = 0$
4. $D = \mathbb{Q}$ Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ aus den Eigenschaften der Reellen Zahlen folgt:

   $\exists$ Folge (r_n) in $\mathbb{Q} \setminus \{x_0\}$ mit $r_n \to x_0$
5. x_0 ist HP von D ⇔ $\forall \delta > 0$ gilt: $U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

8.2.2 Limes

α sei ein HP von D (oder $\pm\infty$) und $f : D \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$:⇔ für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{\alpha\}$ mit $x_n \to \alpha$ gilt $f(x_n) \to \beta$

Bezeichnung: $D_\delta(\alpha) := U_\delta(\alpha) \cap (D \setminus \{\alpha\})$

Sei f_n eine Folge in $C(D)$, sei $x_0 \in D$ und auch HP von D und (f_n) konvergiere auf D glm gegen f.

- 8.3 $\Rightarrow f \in C(D)$
- 8.7 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (\lim\limits_{x \to x_0} f(x)) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))$

8.2.3 Einseitiger Grenzwert

$\lim\limits_{x\to\alpha+0}$: Rechtsseitiger Grenzwert

$\lim\limits_{x\to\alpha-0}$: Linksseitiger Grenzwert

8.3 Monotonie

Bekannte Definitionen

8.4 Agbeschlossene und Kompakte Mengen

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$

1. A heißt abgeschlossen

   :$\Leftrightarrow$ für jede konvergente Folge (x_n) in A gilt $\lim x_n \in A$

   Anschauung: Ränder gehören zur Menge

2. A heißt Kompakt

   :$\Leftrightarrow$ jede Folge in A enthält eine konvergente TF, deren GW zu A gehört

   Anschauung: Abgeschlossen und Beschränkt

   Intervall der Form $I = [a, b]$ mit $a \leq b$

8.5 Übersicht Grenzwerte von Funktionen

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^p = \infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

8.6 Sätze

Satz 8.1: folgt aus 6.2, f und g in x_0 stetig

$\alpha f + \beta g,\ f \cdot g,\ \dfrac{f}{g}\ (g(x_0) \neq 0)$ und $|f|$ sind in x_0 stetig

Satz 8.2: $\varepsilon - \delta-$Charakterisierung

Sei $x_0 \in D$, dann ist f in x_0 stetig

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$

Satz 8.3: (f_n) sei eine Folge in $C(D)$

Konvergiert (f_n) auf D gleichmäßig gegen f, so ist $f \in C(D)$

Satz 8.4: Konvergenz/Stetigkeit

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ PR mit KR $R > 0$ $D := (x_0 - R, x_0 + R)$

$f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ mit $x \in D$

Dann gilt $f \in C(D)$

Satz 8.5: Verkettung von stetigen Funktionen

Sei $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$, $h : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion

$f(D) \subset E$ und $x_0 \in D$

Ist f in x_0 stetig, so auch $h \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Satz 8.6: α sei ein HP von D, $f(x) \to \beta$, $g(x) \to \gamma$ für $x \to \alpha$

1. $\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x)| \to |\beta|$

   $\beta \neq 0$ so $\exists \delta > 0$ mit $f(x) \neq 0\ \forall x \in D_\delta(\alpha)$

   Verständnis: $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta \wedge \beta \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$ in der Nähe von α

2. Ist $a \in \mathbb{R}$, $\beta = 0$ und gibt es ein $\delta > 0$ mit $|h(x) - a| \leq f(x)\ \forall x \in D - \delta(\alpha)$

   so gilt $h(x) \to a\ (x \to \alpha)$

3. Gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in D_\delta(\alpha)$, so ist $\beta \leq \gamma$

4. Gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \forall x \in D_\delta(\alpha)$ und ist $\beta = \gamma$ so gilt $h(x) \to \beta\ (x \to \alpha$

5. Sind $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

   (a) $f(x) + g(x) \to \beta + \gamma$
   (b) $f(x) \cdot g(x) \to \beta \cdot \gamma$
   (c) Ist $\beta \neq 0$ und $\delta > 0$ wie in (1.) dann:

$$\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{\beta}$$

Satz 8.7: Sei $x_0 \in D$ ein HP von D
Dann: f stetig in $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Satz 8.8: $\alpha \in \mathbb{R}$ sei HP von $D \cap (\alpha, \infty)$ und von $D \cap (-\infty, \alpha)$

1. $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existiert

   $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \alpha+0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \alpha-0} f(x)$ existieren und $\lim\limits_{x \to \alpha+0} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha-0} f(x)$

   $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha+0} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha-0} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$

2. Ist $\alpha \in D$, so gilt: f ist in α stetig $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \alpha+0} f(x) = f(\alpha) = \lim\limits_{x \to \alpha-0} f(x)$

Satz 8.9: Zwischenwertsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C([a, b])$ und es sei :

- $y_0 \in [f(a), f(b)]$ falls $f(a) \leq f(b)$
- $y_0 \in [f(b), f(a)]$ falls $f(b) < f(a)$

Dann ex. ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$

Satz 8.10: Nullstellensatz von Bolzano (folgt aus 8.9 mit $y_0 = 0$

$a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C([a, b]) und f(a)f(b) < 0$

Dann ex. ein $x_0 \in [a, b] : \; f(x_0) = 0$

Folgerung:

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g \in C^1(J)$ und $g'(t) \neq 0 \; \forall t \in J$

$\Rightarrow g' > 0$ auf J oder $g' < 0$ auf $J \Rightarrow g$ ist auf J streng monoton.

Satz 8.11: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C(I)$, so ist $f(I)$ ein Intervall.

Satz 8.12: $\exp(x) = \mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ mit $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

Satz 8.13: $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend

ist $f \in C(I)$, so ist $f^{-1} \in C(f(I))$

Satz 8.14: Natürlicher Logarithmus mit den bekannten Regeln

Satz 8.15: Potenzen und Logarithmus

Allgemeine Potenz $a^x := e^{x \log a}$

Allgemeiner Logarithmus zur Basis a $\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$

Satz 8.16: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$

1. A ist abg. $\Leftrightarrow$ jeder HP von A gehört zu A
2. A ist kompakt $\Leftrightarrow$ A ist beschränkt und abgeschlossen

Satz 8.17: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und D kompakt, dann existieren max$D$ und min$D$

Satz 8.18: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, D kompakt und $f \in C(D)$. Dann:

1. $f(D)$ ist kompakt
2. $\exists x_1, x_2 \in D : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \forall x \in D$

Satz 8.19: Folgt aus 8.11 und 8.18

Ist $\subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f \in C(I)$

so ist $f(I)$ ein kompaktes Intervall.

Satz 8.20: Sei $f \in C([a, b])(a < b)$ und $N := \{x \in [a, b] : \ f(x) = 0\} \neq \emptyset$

so ex. $\min N$ und $\max N$

9 Trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen

9.1 Eigenschaften von Sinus, Cosinus und Tangens

- $\sin x, \cos x > 0 \ \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$; $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$; $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$; $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$
- cos ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend und $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$
- sin ist auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$
- $D := \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ $\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x} \ \forall x \in D$
- tan ist auf D stetig
- $\tan 0 = 0$, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$
- $\tan(-x) = -\tan x$, $\tan(x + \pi) = \tan x$
- tan ist auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend
- $\tan x \to \infty (x \to \frac{\pi}{2} - 0)$, $\tan x \to -\infty (x \to -\frac{\pi}{2} + 0)$
- $tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$

9.2 Polarkoordinaten

jedes Zahlenpaar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ lässt sich mithilfe der Polarkoordinaten darstellen

$z = (a, b) = a + \mathrm{i}b = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$

$r = |z|$ und $\varphi = \arg z$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ und $\frac{z}{r} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

9.3 Hyperbolische Funktionen

$\cosh x := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$

$\sinh x := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$

Eigenschaften:

- $\cosh 0 = 1$, $\sinh 0 = 0$; $\cosh, \sinh \in C(\mathrm{R})$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh -x = \cosh(x)$, $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\cosh(x) \to \infty (x \to \pm\infty)$; $\sinh(x) \to \pm\infty (x \to \pm\infty)$
- Additionstheoreme ergeben sich aus Exponentialdarstellung
- cosh ist auf $[0, \infty)$ und sinh auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend

Tangenshyperbolicus

$\tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

auf $\mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend

$\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$

9.3.1 Umkehrfunktionen

- Arsinh : $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$
- Arcosh : $[1, \infty) \to [0, \infty)$
- Artanh : $(-1, 1) \to \mathrm{R}$

9.4 Sätze

Satz 9.1: Lemma

1. für $|x| < \sqrt{12}$ gilt $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \geq \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \forall n \in \mathbb{N}$
2. für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) := 1 - \dfrac{x^2}{2!}$ und $g(x) := 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$

   Dann: $f(x) \leq \cos x \leq g(x)$ für $|x| < \sqrt{12}$
3. Sei $a := \sqrt{2}$ und $b := \sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3}}$

Dann ist $a < b \leq 2$, $\cos a \geq 0$, $\cos b \leq 0$

und es ex. ein $x_0 \in [a,b]: \;\; \cos x_0 = 0$

4. Sei $\alpha \coloneqq \min\{x \in [a,b]: \;\; \cos x = 0\}$ Dann: $\alpha > 0$

Satz 9.2: Umkehrfunktionen

1. $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$
   - streng monoton fallend und stetig
   - $\arccos(1) = 0$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$
2. $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
   - streng monoton wachsend und stetig
   - $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(0) = 0$
3. $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
   - arctan ist streng monoton wachsend und stetig
   - $\arctan 0 = 0$, $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\arctan(-x) = -\arctan x$
   - $\arctan x \to \frac{\pi}{2}(x \to \infty)$, $\arctan x \to -\frac{\pi}{2}(x \to -\infty)$
   - $\arctan(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

10 Differntialrechnung

10.1 Differentierbarkeit

f ist in x_0 differenzierbar $\Leftrightarrow f'(x_0) \coloneqq \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ in $\mathbb{R}$ existiert

f ist auf I differenzierbar $\Leftrightarrow f' : x \mapsto f'(x) \; \forall x \in I$

10.2 Minima und Maxima

lokales Maximum $:\Leftrightarrow \exists \delta > 0: \;\; f(x) \leq f(x_0) \; \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$

lokales Minimum $:\Leftrightarrow \exists \delta > 0: \;\; f(x) \geq f(x_0) \; \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$

lokales Extremum: lokales Maximum oder lokales Minimum

10.3 Innerer Punkt

$$x_0 \text{ heißt ein innerer Punkt von } D :\Leftrightarrow \exists \delta >: \;\; U_\delta(x_0) \subseteq D$$

10.4 Lipschitzstetig

$$\exists L \geq 0 : |g(x) - g(y)| \leq L \cdot |x-y| \; \forall x, y \in D$$

Auf I db Funktionen, deren Ableitung auf I beschränkt ist sind auf I Lipschitz-stetig
$f \in C^1(I)$ ist auf I Lip.-stetig

10.5 Stetig differenzierbar

$C^0(I) := C(I)$; $f^{(0)} := f$

$C^{n+1}(I) := \{f^{(n)} : I \to \mathbb{R} : \ f^{(n)}$ ist auf I db und $f^{(n+1)} \in C^n(I)\}$

Eine Funktion in C^n heißt n-mal stetig db

$C^\infty(I) := \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C^n(I)$

10.6 Taylorpolynom

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$.

Dann heißt $T_n(f;x_0)(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$

das n-te Taylorpolynom von f in x_0

Eigenschaften ($T := T_n(f;x_0)$):

1. T ist ein Polynom vom Grad $\leq n$
2. $T^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ für $j = 0, ..., n$
3. Ist p ein Polynom vom Grad $\leq n$ und gilt
   $p^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ für $j = 0, ..., n$, so ist $p = T$

10.7 Taylorreihe

Die zu f gehörende Taylorreihe in x_0 mit $f \in C^\infty(I)$ und $x_0 \in I$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

10.8 Übersicht

- Linearität und Produktregel 10.2
- Kettenregel 10.3
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\mathrm{Arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $(\mathrm{Arcosh} x)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $(\mathrm{Artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$
- Regel von de l'Hospital 10.9

10.9 Sätze

Satz 10.1: Ist f in x_0 db $\Rightarrow$ f in x_0 stetig

Satz 10.2: Ableitungsregeln

1. $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
3. Quotientenregel folgt aus Kettenregel

Satz 10.3: Kettenregel
$(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Satz 10.4: f stetig auf I und streng monoton und in x_0 db mit $f'(x_0) \neq 0$

Dann ist $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $y_0 \coloneqq f(x_0)$ db und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \ (x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Satz 10.5: f in x_0 db, lokales extremum in x_0 und x_0 ist innerer Punkt von I
$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Satz 10.6: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C([a, b])$ und f sei auf (a, b) db

Dann ex. ein $\xi \in (a.B)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$
$$\Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$$

Mit $f(b) = f(a)$ ergibt sich der Satz von Rolle $f'(\xi) = 0$

Satz 10.7: Folgerungen aus dem Mittelwertsatz 10.6

1. f ist auf I konstant $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in I$
2. $f' = g'$ auf I $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \ f = g + c$ auf I
3. Monotonie
   (a) Ist $f' \geq 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist auf I monoton wachsend
   (b) Ist $f' \leq 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist auf I monoton fallend
   (c) Ist $f' > 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist auf I streng monoton wachsend
   (d) Ist $f' < 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist auf I streng monoton fallend

Satz 10.8: Verallgemeinerter MWS

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) db

$g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$

1. $g(a) \neq g(b)$
2. $\exists \xi \in (a,b): \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Satz 10.9: Regeln von de L'Hospital

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $a < b$

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ seien db und $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b)$

$L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und es gelte: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

1. Ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$
2. Ist $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Satz 10.10: Satz von Taylor

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^n(I)$ und $f^{(n)}$ sei auf I db

Sind $x, x_0 \in I$, so ex. ein $\xi = \xi(x, x_0)$ zwischen x und x_0 mit:

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Satz 10.11: $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f \in C^n(I)4$, $x_0 \in I$ ein innerer Punkt von I

es gelte $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

1. Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) >$ bzw. < 0, so hat f in x_0 ein lokales Minimum bzw. Maximum
2. Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum

Satz 10.12: Ableitung von Potenzreihen

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ sei eine PR mit KR $R > 0$

$I = (x_0 - R, x_0 + R)$ und

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \;\; (x \in I)$$

1. Die PR $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x - x_0)^{n-1}$ hat den KR R
2. f ist auf I db und $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x - x_0)^{n-1}$ $(\forall x \in I)$

   d.h. $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n (x - x_0)^n)'$ auf I

3. Es ist $f \in C^\infty(I)$ und $\forall x \in I\ \forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

4. Es gilt: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \forall n \in \mathbb{N}_0$

Satz 10.13: Abelscher Grenzwertsatz

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sei eine PR mit KR $R = 1$, es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent

und $f(x) :- \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x \in (-1, 1]$. Dann:

$$\lim_{x \to 1-0} = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Satz 10.14: Identitätssatz für Potenzreihen

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine PR mit KR $R > 0$, es sei $I := (x_0 - R, x_0 + R)$ und

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

für $x \in I$

Weiter sei (x_m) eine Folge in $I \setminus \{x_0\}$ mit

$x_m \to x_0 (m \to \infty)$ und $f(x_m) = 0\ \forall m \in \mathbb{N}$

Dann: $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(x) = 0 \forall x \in I$

11 Integration

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt
$m := \inf f(I)$ und $M := \sup f(I)$

11.1 Zerlegung

$Z := \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ heißt eine Zerlegung von I

$:\Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < ... < x_n < b$

$\mathscr{Z}$:= Menge aller Zerlegungen von I

11.2 Integrierbar

$Z = \{x_0, ...x_n\} \in \mathscr{Z}$ Für $j = 1, ..., n$:

$I_j := [x_{j-1}, x_j]$, $|I_j| := x_j - x_{j-1}$, $m_j := \inf f(I_j)$ und $M_j := \sup f(I_j)$

Untersumme: $s_f(Z) := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j |I_j|$

Unteres Integral: $s_f := \sup\{s_f(Z) : Z \in \mathscr{Z}\}$

Obersumme: $S_f(Z) := \sum\limits_{j=1}^{n} M_j |I_j|$

Oberes Integral: $S_f := \inf\{S_f(Z) : Z \in \mathscr{Z}\}$

f heißt (Riemann-)integrierbar über $I :\Leftrightarrow s_f = S_f := \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$

$R\,[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} :\ f$ ist beschränkt und ib über $[a, b]\}$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. $Z = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathscr{Z}$

$||Z|| := \max\{|I_j| : j = 1, ..., n\}$ Feinheitsmaß von Z

Ein n-Tupel $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ heißt passend zu $Z :\Leftrightarrow \xi_j \in I_j\ (j = 1, ..., n)$

Dann heißt $\sigma_f(Z, \xi) := \sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j|$ eine Riemannsumme.

$m_j \le f(\xi_j) \le M_j \Rightarrow s_f(Z) \le \sigma_f(Z, \xi) \le S_f(Z)$

$\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0$ und $f \in R\,[a, b] \Rightarrow \int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x := -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$

11.3 Stammfunktion

$f, F : J \to \mathbb{R}$

F heißt eine Stammfunktion von f auf $J :\Leftrightarrow F$ ist auf J db und $F' = f$ auf J

$F_1' = f = F_2' \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F_1 = F_2 + c = \int f(x)\mathrm{d}x$

Achtung: Stammfunktion $\not\Leftrightarrow$ db

11.4 Integralfunktionen

Sei $f \in C(\mathbb{R})$ und $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ db und

$$G(x) := \int\limits_0^{\alpha(x)} f(t)\mathrm{d}t\ (x \in \mathbb{R})$$

11.5 Sätze

Satz 11.1: $Z_1, Z_2 \in \mathscr{Z}$

1. $s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2)$
2. Ist $Z_1 \subseteq Z_2 \Rightarrow s_f(Z_2) \geq s_f(Z_1)$ und $S_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$

Satz 11.2: $f, g \in R\,[a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $\alpha f + \beta g \in R\,[a,b]$ und $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}x = \alpha \int\limits_a^b f\mathrm{d}x + \beta \int\limits_a^b g\mathrm{d}x$
2. Aus $f \geq g$ auf $[a,b]$ folgt $\int\limits_a^b f\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g\mathrm{d}x$

Satz 11.3: Riemann-Kriterium:

$$f \in R\,[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Z \in \mathscr{Z} : S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$$

Satz 11.4: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist $f \in R\,[a,b]$

Satz 11.5: $f \in R\,[a,b]$, (Z_n) eine Folge in $\mathscr{Z}$ und zu jedem Z_n ein passendes $\xi^{(n)}$ gewählt. $||Z_n|| \to 0$

1. $s_f(Z_n) \to \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$
2. $S_f(Z_n) \to \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$
3. $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \to \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Satz 11.6: $J \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $g : J \to \mathbb{R}$

1. $a, b, c \in J$ und $a < c < b$ Dann:

   $g \in R\,[a,b] \Leftrightarrow g \in R\,[a,c]$ und $g \in R\,[c,b]$

   I.d.Fall gilt $\int\limits_a^b g\mathrm{d}x = \int\limits_a cg\mathrm{d}x + \int\limits_c^b g\mathrm{d}x$
2. Es gelte $g \in R\,[a,b]$ für jedes Intervall $[a,b] \subseteq J$

   Ist $c \in J$, so definiere $G : J \to \mathbb{R}$ durch $G(x) := \int\limits_c^x g(t)\mathrm{d}t$

   Sind $\alpha, \beta \in J$, so ist $\int\limits_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t = G(\beta) - G(\alpha)$

Satz 11.7: Seien $f, g \in R\,[a,b]$

1. $|f| \in R\,[a,b]$ und $|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x| \leq \int\limits_a^b |f|\mathrm{d}x$

2. $f \cdot g \in R\,[a,b]$

3. Ist $c > 0$ und $|f(x)| \geq c \;\forall x \in [a,b]$, so ist $\frac{1}{f} \in R\,[a,b]$

Satz 11.8:

1. Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $g \in C(D)$, so ist g auf D gleichmäßig Stetig

2. $C([a,b]) \subseteq R\,[a,b]$

Satz 11.9: Hauptsatz der Differenntial und Integralrechnung, I

Sei $f \in R\,[a,b]$ und f besitze auf $[a,b]$ die SF F. Dann:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b =: [F(x)]_a^b$$

Satz 11.10: Hauptsatz der Differential und Integralrechnung, II

Sei $f \in R\,[a,b]$ und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ def durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

1. F ist auf $[a,b]$ stetig

2. Ist f in $x_0 \in [a,b]$ stetig, so ist F in x_0 db und $F'(x_0) = f(x_0)$

3. Ist $f \in C([a,b])$, so ist $F \in C^1([a,b]$ und F ist eine SF von f auf $[a,b]$

Satz 11.11: Folgt aus 11.9 und 11.10

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C(J)$, $\xi \in J$ und $F(x) := \int_\xi^x f(t)\mathrm{d}t$

Dann ist F eine SF von f auf J

Satz 11.12: Partielle Integration

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g \in C^1(J)$

1. $\int f' \cdot g\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f \cdot g'\mathrm{d}x$ auf J

2. Ist $J = [a,b]$, so gilt:

$$\int_a^b f' \cdot g\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f \cdot g'\mathrm{d}x$$

Satz 11.13: Substitutionsregeln

$I, J \subseteq \mathbb{R}$ seien Intervalle

$f \in C(I)$, $g \in C^{-1}(J)$ und $g(J) \subseteq I$

1. auf J:
$$\int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = \int f(x)\mathrm{d}x|_{x=g(t)}$$
2. Sei $g'(t) \neq 0 \; \forall t \in J$ ($\Rightarrow$ g streng monoton) Dann gilt auf I:
$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t|_{t=g^{-1}(x)}$$
3. Sei $I = [a, b]$, $J = \langle \alpha, \beta \rangle$, $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$ Dann:
$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t$$

Merkregel:

Ist $y = y(x)$ eine db Fkt., so schreibt man für y' auch dxt

In $\int f(x)\mathrm{d}x$ substituiere $x = g(t)$, fasse also x als fkt. von t auf. Dann:

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g'(t)$, also „$\mathrm{d}x = g'(t)\mathrm{d}t$“

12 Differentialgleichungen

12.1 Differentialgleichungen 1.Ordnung

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine fkt.

DGL (D): $y' = f(x, y)$ $(x \in I;\; y \in J)$

Sind $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$ gegeben, so betrachten wir auch das AWP:

(AWP) $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Eine Lösung von (D) ist eine db Funktion $\phi : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$

Wobei gilt: $\widetilde{I}$ ist ein Intervall, $\widetilde{I} \subseteq I$, $\phi(x) \in J$
und $\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \; \forall x \in \widetilde{I}$

Eine Lösung von (AWP) ist eine Lösung $\phi : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ von (D)
mit $x_0 \in \widetilde{I}$ und $\phi(x_0) = y_0$

(AWP) heißt eindeutig lösbar
:$\Leftrightarrow$ für je zwei Lösungen $\phi_1 : \widetilde{I}_1 \to \mathbb{R}$ und $\phi_2 : \widetilde{I}_2 \to \mathbb{R}$ gilt:
$$\phi_1 = \phi_2 \text{auf} \widetilde{I}_1 \cap \widetilde{I}_2$$

Damit folgt $x_0 \in \widetilde{I}_1 \cap \widetilde{I}_2$

Ist (AWP) eindeutig löbar, so gibt es genau eine Lösung $\phi_{max} : \widetilde{I}_{max} \to \mathbb{R}$ mit:
Ist $\phi : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (AWP), so ist
$\widetilde{I} \subseteq \widetilde{I}_{max}$ und $\phi = \phi_{max}$ auf $\widetilde{I}$