Aufgabe 1 **a)** Den ersten Teil der Behauptung liefert die folgende Wahrheitstafel:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	W	W	F	W
W	F	W	W	W	F	W	W
W	F	F	F	F	F	F	F
F	W	W	W	F	F	F	F
F	W	F	W	F	F	F	F
F	F	W	W	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Den zweiten Teil zeigen wir mit der gleichen Methode wie eben: Wir verwenden $D = \neg\neg D$, aus der Übung die $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$ und $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ und das im ersten Teil von **a)** schon Bewiesene.

$$\begin{aligned} A \vee (B \wedge C) &= \neg\neg\big(A \vee (B \wedge C)\big) = \neg\big(\neg A \wedge \neg(B \wedge C)\big) = \neg\big(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)\big) \\ &\overset{\textbf{a)}}{=} \neg\big((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C)\big) = \neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg C) \\ &= (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: „Das Wetter ist schön und ich bin dick oder glücklich“ ist genau dann wahr, wenn „Das Wetter ist schön und ich bin dick“ oder „Das Wetter ist schön und ich bin glücklich“ wahr ist. Und: „Das Wetter ist schön oder ich bin dick und glücklich“ ist genau dann wahr, wenn „Das Wetter ist schön oder ich bin dick“ und „Das Wetter ist schön oder ich bin glücklich“ wahr ist.

b) Wir stellen eine Wahrheitstafel auf (die Tafel für $\leftrightarrow$ ist aus der Vorlesung bekannt):

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$(A \wedge B) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)$
W	W	W	W	F	F	F	W
W	F	F	F	F	W	F	F
F	W	F	F	W	F	F	F
F	F	W	F	W	W	W	W

Aufgabe 2 **a)** Es sei A die Aussage „Petra ist Kaiserin von China“ und B die Aussage „Morgen stürzt der Mathebau ein“. Dann müssen wir $A \to B$ verneinen. Es gilt:

$$\neg(A \to B) = \neg\big((\neg A) \vee B\big) = \big(\neg(\neg A) \wedge (\neg B)\big) = A \wedge (\neg B)$$

Somit lautet die Negation des Satzes: „Petra ist Kaiserin von China und der Mathebau stürzt morgen nicht ein“.

b) Ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ die Menge aller Bankangestellten, und A_i die Aussage „b_i besitzt einen Aktenkoffer“, so lässt sich der gegebene Satz schreiben als $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$. Dessen Verneinung lautet aber $(\neg A_1) \vee \cdots \vee (\neg A_n)$.

Das bedeutet: Wenn nicht alle Bankangestellten einen Aktenkoffer besitzen, muss es mindestens einen „Ausnahmebankangestellten“ ohne Aktenkoffer geben. Somit lautet die Negation: „Es gibt einen Bankangestellten, der keinen Aktenkoffer besitzt“.

Schreibweise: Ist $A(x)$ die Aussage „x besitzt einen Aktenkoffer“ und B die Menge aller Bankangestellten, so schreibt man für den gegebenen Satz auch $\forall x \in B : A(x)$. Und für den Satz, den wir als Negation angegeben haben, schreibt man $\exists x \in B : \neg A(x)$.

Zusatzüberlegung: Die Verneinung von $\exists x \in B : A(x)$ wäre $\forall x \in B : \neg A(x)$.

c) Sei P die Menge der Professoren, S die Menge der Studenten und $U(x, y)$ stehe für die Aussage „x findet y unsympathisch“. Dann müssen wir die Aussage

$$\exists x \in P : \forall y \in S : U(x, y)$$

verneinen. In **b)** hatten wir uns überlegt, wie man Aussagen mit $\forall$ bzw. $\exists$ negiert. Wir erhalten

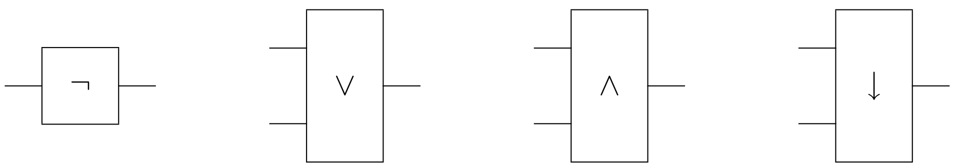
$$\begin{aligned}\neg\Big(\exists x \in P : \forall y \in S : U(x, y)\Big) &= \forall x \in P : \neg\Big(\forall y \in S : U(x, y)\Big)\\ &= \forall x \in P : \exists y \in S : \neg U(x, y)\end{aligned}$$

Die negierte Aussage lautet daher „Jeder Professor findet mindestens einen Studenten nicht unsympathisch“.

Aufgabe 4 **a)** Das Anliegen von Spannung wird mit „wahr“ identifiziert, deren Fehlen mit „falsch“. Dann gilt: Ein $\neg$-Gatter mit Eingang A liefert an seinem Ausgang $\neg A$. Ein $\vee$-Gatter mit den Eingängen A und B liefert an seinem Ausgang $A \vee B$.

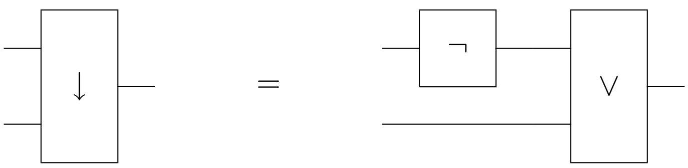
Damit ergibt sich: Ein $\wedge$-Gatter ist ein Bauteil mit zwei Eingängen und einem Ausgang; am Ausgang liegt genau dann Spannung an, wenn an beiden Eingängen Spannung anliegt. Ein $\rightarrow$-Gatter ist ein Bauteil mit zwei Eingängen A und B und einem Ausgang; am Ausgang liegt genau dann Spannung an, wenn am Eingang B Spannung anliegt oder an A keine Spannung anliegt. Wie man schon aus dieser Beschreibung sieht, sind also bei einem $\rightarrow$-Gatter die Eingänge nicht „gleichberechtigt“.

Wir verwenden folgende Symbole für die Gatter:

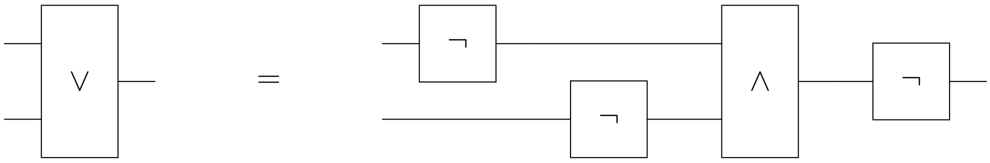


Links sind dabei jeweils die Eingänge und rechts der Ausgang. Beim $\rightarrow$-Gatter ist zu beachten, dass der obere Eingang der Eingang A sein soll (daher auch die Pfeilrichtung).

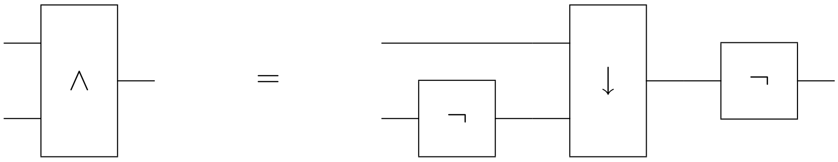
b) Definitionsgemäß gilt $A \rightarrow B = (\neg A) \vee B$. Also:



c) Es gilt $A \vee B = \neg\neg(A \vee B) \overset{\textbf{1a)}}{=} \neg\big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)$. Wir haben somit folgenden Bauplan:



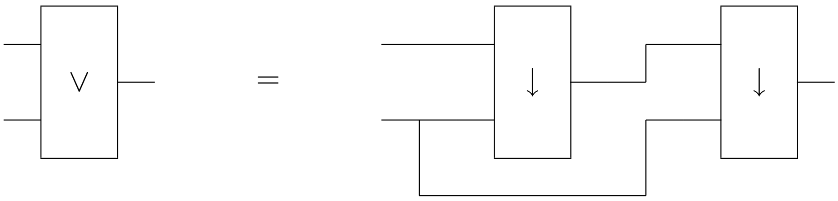
d) Wie in **c)** sieht man: $A \wedge B = \neg\big((\neg A) \vee (\neg B)\big)$. Wegen $(\neg A) \vee (\neg B) = A \to (\neg B)$ erhalten wir: $A \wedge B = \neg\big(A \to (\neg B)\big)$. Auch diese „Bauanleitung“ zeichnen wir auf:



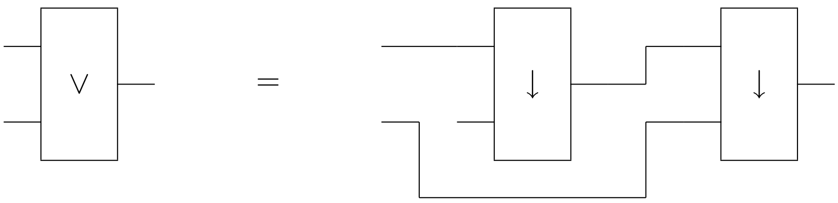
e) Hier kann man etwas herumprobieren; oder man verwendet die folgende Umformung. Im ersten Schritt wird hier benutzt, dass $\neg B \vee B$ stets wahr ist (siehe Vorlesung) und dass daher $D \wedge (\neg B \vee B) = D$ für jede Aussage D gilt.

$$\begin{aligned} A \vee B &= (A \vee B) \wedge (\neg B \vee B) \overset{\textbf{1a)}}{=} (A \wedge \neg B) \vee B \\ &= \neg(\neg A \vee B) \vee B = \neg(A \to B) \vee B = (A \to B) \to B \end{aligned}$$

Dies liefert das folgende Schema:



Bemerkung: Eine andere Möglichkeit sieht wie folgt aus:



Hier wird also der untere Eingang des linken $\to$-Gatters nirgends angeschlossen, so dass er stets ohne Spannung bleibt. Auf diese Weise wirkt das linke $\to$-Gatter dann wie ein $\neg$-Gatter auf seinen oberen Eingang – symbolisch geschrieben: $\neg A = (A \to \text{falsch})$. Die Richtigkeit des Bauplans ergibt sich dann aus der Gleichheit $A \vee B = (\neg A) \to B$.

Aufgabe 3 **a)** Die drei Tatsachen lassen sich so ausdrücken und umformen:

- $(\neg C) \to (\neg B) \overset{\text{Vorl.}}{=} B \to C$
- $\big(B \wedge (\neg C)\big) \vee \big((\neg B) \wedge C\big) \overset{\textbf{1b)}}{=} B \leftrightarrow (\neg C)$
- $(A \wedge C) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg C)\big) \overset{\textbf{1b)}}{=} A \leftrightarrow C$

b) Wir betrachten die folgende Wahrheitstafel:

A	B	C	$B \to C$	$\neg C$	$B \leftrightarrow (\neg C)$	$A \leftrightarrow C$
W	W	W	W	F	F	W
W	W	F	F	W	W	F
W	F	W	W	F	W	W
W	F	F	W	W	F	F
F	W	W	W	F	F	F
F	W	F	F	W	W	W
F	F	W	W	F	W	F
F	F	F	W	W	F	W

Nur in der dritten Zeile liefern alle drei Ausdrücke den Wert „wahr"; also lautet die Lösung: Anton und Chris kommen, Berta nicht.

c) Wir nehmen an, Berta käme. Aufgrund der zweiten Tatsache kommt dann Chris nicht und damit dürfte aufgrund der ersten Tatsache auch Berta nicht kommen – ein Widerspruch zu unserer Annahme. Diese ist also falsch und in Wirklichkeit kommt Berta nicht. Damit muss aber laut zweiter Tatsache Chris erscheinen und wegen der dritten Tatsache kommt dann auch Anton. Nochmaliges Überprüfen ergibt: Dann sind alle drei Forderungen erfüllt.

Aufgabe 5 **a)** $S_1 \cap P$

b) $(S_1 \cup S_3) \setminus E$

c) $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$

$C_S(G \cup P)$ ist das Komplement von $G \cup P$ bezogen auf S, also die Menge aller Karlsruher Studierender, die weder Geodäsie noch Physik studieren.

Aufgabe 6 **a)**

a) (i) „bijektiv" bedeutet: „injektiv" und „surjektiv". Nach Voraussetzung sind also f und g injektiv und surjektiv.

Zuerst zeigen wir, dass h injektiv ist, dass also für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: Aus $x_1 \neq x_2$ folgt $h(x_1) \neq h(x_2)$. Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gegeben. Wegen der Injektivität von f ist dann $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wegen der Injektivität von g folgt daraus aber $g\big(f(x_1)\big) \neq g\big(f(x_2)\big)$ und nach Definition der Komposition bedeutet dies gerade $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Jetzt müssen wir nur noch die Surjektivität von h zeigen; diese folgt aus der Surjektivität von f und g. Zu zeigen ist $R(h) = Z$, also: Zu jedem $z \in Z$ existiert ein $x \in X$ mit $h(x) = z$. Sei also $z \in Z$ beliebig. Da g surjektiv ist, gibt es dazu ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es zu diesem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ und es folgt: $h(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = z$.

(ii) Sei $y \in Y$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Wir definieren zunächst $z := g(y)$. Da h surjektiv ist, existiert zu diesem $z \in Z$ ein $x \in X$ mit $z = h(x) = g\big(f(x)\big)$. Damit wissen wir $g\big(f(x)\big) = z = g(y)$ und wegen der Injektivität von g folgt $f(x) = y$.

b) Da indirekte Beweise gefordert sind, müssen wir z. B. bei **(i)** zeigen: Falls g *nicht* surjektiv ist, ist auch h *nicht* surjektiv.

(i) Ist g *nicht* surjektiv, so bedeutet dies $R(g) \neq Z$, also: Es gibt ein $z \in Z$, so dass für alle $y \in Y$ gilt: $g(y) \neq z$. Insbesondere gilt dann aber $h(x) = g\big(f(x)\big) \neq z$ für alle $x \in X$, d. h. h ist nicht surjektiv.

(ii) Ist f *nicht* injektiv, so bedeutet dies: Es gibt $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Dann folgt aber $h(x_1) = g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) = h(x_2)$; also ist h nicht injektiv.

c) (i) Wir nehmen an, f wäre injektiv. Da h nicht injektiv ist, gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $h(x_1) = h(x_2)$, d. h. $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$. Da f injektiv ist, gilt $y_1 := f(x_1) \neq f(x_2) =: y_2$. Trotzdem haben wir $g(y_1) = g(y_2)$ gezeigt, im Widerspruch zur vorausgesetzten Injektivität von g.

(ii) Angenommen, g wäre nicht injektiv. Dann gibt es also $y_1, y_2 \in Y$ mit $y_1 \neq y_2$ und $g(y_1) = g(y_2)$. Da f surjektiv ist, gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Da f eine Funktion ist, folgt $x_1 \neq x_2$ aus $y_1 \neq y_2$. Wir erhalten $h(x_1) = g\big(f(x_1)\big) = g(y_1) = g(y_2) = g\big(f(x_2)\big) = h(x_2)$. Somit ist h nicht injektiv, im Widerspruch zur Voraussetzung.

d) Wir betrachten stets $f(x) := x$ und $g(x) := x^2$ und ändern nur die Definitionsbereiche bzw. die Menge, *in* die abgebildet wird. Es ergibt sich $h(x) = x^2$.

(i) Für $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ injektiv, g jedoch nicht.

(ii) Für f und g wie in **(i)** ist h surjektiv, f jedoch nicht.