Aufgabe 1 **a)** Wir müssen nur zeigen, dass $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$ für alle $x \in X$ gilt. (Dass $\chi_A \cdot \chi_B$ Abbildung von X in $\{0,1\}$ ist, ist klar.) Sei also $x \in X$ beliebig.

Fall 1: $x \in A\cap B$. Dies bedeutet $x \in A$ und $x \in B$. Nach Definition der charakteristischen Funktionen ist dann $\chi_{A\cap B}(x) = 1$ und $\chi_A(x)\cdot\chi_B(x) = 1\cdot 1 = 1$; damit ist in diesem Falle die Gleichheit bewiesen.

Fall 2: $x \notin A\cap B$. Dann muss $x \notin A$ oder $x \notin B$ gelten. Somit ist $\chi_A(x) = 0$ oder $\chi_B(x) = 0$, d. h. das Produkt $\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$ ergibt auf jeden Fall 0. Dies stimmt überein mit $\chi_{A\cap B}(x) = 0$.

b) Nach Definition der charakteristischen Funktion gilt für jedes $x \in X$

$$\chi_{C_X(A)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in C_X(A), \\ 0, & x \in C_X(C_X(A)) = A. \end{cases} = \begin{cases} 1-1, & x \in A, \\ 1-0, & x \in C_X(A). \end{cases} = 1 - \chi_A(x).$$

Unser erstes Ergebnis lautet also: $\chi_{C_X(A)} = 1 - \chi_A$.

Mit $A\setminus B = \{\, x \mid x \in A, x \notin B \,\} = A \cap C_X(B)$ und **a)** ergibt sich $\chi_{A\setminus B} = \chi_A \cdot \chi_{C_X(B)}$, also wegen des gerade Bewiesenen $\chi_{A\setminus B} = \chi_A\cdot(1-\chi_B)$.

Bei einer beliebigen Vereinigung von Mengen muss man beachten, dass ein Element auch in beiden Mengen liegen kann; dann gäbe die Summe der charakteristischen Funktionen den Wert 2. Aus diesem Grunde ist

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\cdot\chi_B.$$

Aufgabe 2

(a) Wir bestimmen zuerst die Definitionsbereiche der Abbildungen f_i. Wir sehen, daß f_1 nicht definiert ist, wenn der Nenner verschwindet, denn $\frac{1}{0}$ ist nicht definiert. Dies geschieht für $x = 2$, also haben wir $D_1 = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.
Da f_2 ein quadratisches Polynom ist, ist der zugehörige maximale Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$, also haben wir $D_2 = \mathbb{R}$.

Zur Bestimmung der Bildmengen zerlegen wir die Abbildungen derart, dass sie sich aus einfacheren Abbildungen zusammensetzen.

(i) Die Abbildung f_1 lässt als $f_1 = s\circ t$ darstellen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ x &\mapsto \frac{1}{x}, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} t : \mathbb{R}\backslash\{2\} &\to \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ x &\mapsto x - 2. \end{aligned}$$

Die Zerlegung von f_1 in s und t ist erlaubt, da wir den Definitionbereich von t auf $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ einschränken und damit der Bildbereich $R(t) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist, worauf s definiert ist. Das Bild $R(f_1)$ berechnet sich dann als

$$f_1(D_1) = f_1(\mathbb{R}\backslash\{2\}) = s(t(\mathbb{R}\backslash\{2\})) = s(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(ii) Wir schreiben $f_2(x) = x^2+x+1$ durch quadratische Ergänzung als $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$. Damit kann f_2 als Komposition der Abbildungen u, v, w dargestellt werden, also $f_2 = u \circ v \circ w$ mit

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \frac{7}{4}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} w : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für den Bildbereich von f_2:

$$\begin{aligned} f_2(D_2) = & \quad u \circ v \circ w(\mathbb{R})) = u \circ v(\mathbb{R}) \\ = & \quad u(\{x \in \mathbb{R} :\ x \geq 0\}) = \{x \in \mathbb{R} :\ x \geq \tfrac{7}{4}\}. \end{aligned}$$

(b) (i) Wir zeigen, dass die Abbildung f_1 injektiv ist.
(D.h. für alle $x, y \in D_1 :\ x \neq y \to f_1(x) \neq f_1(y)$.)
Seien also $x, y \in D_1$ mit $x \neq y$. Wir nehmen an, dass $f(x) = f(y)$ und schliessen daraus:

$$\left(\frac{1}{x-2} = \frac{1}{y-2}\right) \to \left(1 = \frac{x-2}{y-2}\right) \to \left(x-2 = y-2\right) \to \left(x = y\right), \text{ Widerspruch!}$$

Also gilt $f_1(x) \neq f_1(y)$. Folglich ist f_1 injektiv.

(ii) Wir zeigen, dass f_2 ist nicht injektiv ist. Dazu reicht es, ein paar $x, y \in D_1$ zu finden, mit $x \neq y$ und $f_2(x) = f_2(y)$. Etwa $x = 0$ und $y = -1$ ergibt $f_2(x) = 2 = f_2(y)$.
Also ist f_2 nicht injektiv.

(c) Wir wissen aus der Vorlesung, daß für die inverse Abbildung gilt $f \circ f^{-1} = id$. Wenn jetzt f die Komposition zweier Abbildungen g und h ist, also $f = g \circ h$, dann berechnet sich die inverser Abbildung f^{-1} als $f^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$.
(Probe: $f \circ h^{-1} \circ g^{-1} = g \circ h \circ h^{-1} \circ g^{-1} = g \circ id \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id$).
Es ist $f = s \circ t$. Daher berechnen wir nun s^{-1} und t^{-1}:

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{1}{x}, & &\to & s^{-1}(x) &= \frac{1}{x}, \\ t(x) &= x - 2, & &\to & t^{-1}(x) &= x + 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Damit erhalten wir

$$f_1^{-1}(x) = (s \circ t)^{-1}(x) = t^{-1} \circ s^{-1}(x) = t^{-1}(s^{-1}(x)) = t^{-1}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + 2.$$

Aufgabe 3 Auf keinen Fall kommt $x = 1$ in Frage, denn die Division durch 0 ist nicht definiert. Ansonsten multiplizieren wir die Ungleichung mit $1 - x$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Sei zunächst $1 - x > 0$, also $x < 1$. Multiplikation mit $1 - x$ liefert

$$\begin{aligned} 2x + \frac{1}{1-x} \geq 1 \quad &\leftrightarrow \quad 2x(1-x) + 1 \geq 1 - x \quad \leftrightarrow \quad 2x - 2x^2 + 1 \geq 1 - x \\ &\leftrightarrow \quad 3x - 2x^2 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad x(3 - 2x) \geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geq 0$ und $3 - 2x \geq 0$ oder aber wenn $x \leq 0$ und $3 - 2x \leq 0$.

$x \geq 0$ und $3-2x \geq 0$ bedeutet $x \geq 0$ und $x \leq 3/2$, also $0 \leq x \leq 3/2$. Da wir im 1. Fall nur $x < 1$ betrachten, ergibt sich also $0 \leq x < 1$.

$x \leq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ bedeutet $x \leq 0$ und $x \geq 3/2$, was nicht gleichzeitig möglich ist.

2. Fall: Jetzt sei $1 - x < 0$, also $x > 1$. Dann dreht sich bei Multiplikation mit $1 - x$ das $\geq$ um und wir erhalten

$$2x + \frac{1}{1-x} \geq 1 \quad \leftrightarrow \quad 2x(1-x) + 1 \leq 1 - x \quad \leftrightarrow \quad x(3-2x) \leq 0.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ oder aber wenn $x \leq 0$ und $3 - 2x \geq 0$.

$x \geq 0$ und $3 - 2x \leq 0$ bedeutet $x \geq 0$ und $x \geq 3/2$, also $x \geq 3/2$.

$x \leq 0$ und $3 - 2x \geq 0$ bedeutet $x \leq 0$ und $x \leq 3/2$, also $x \leq 0$. Da wir im 2. Fall nur $x > 1$ betrachten, ist dies hier nicht möglich.

Insgesamt: Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $0 \leq x < 1$ oder $x \geq 3/2$.

Aufgabe 4 Zunächst zum Supremum: Da A und B beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir müssen nun zeigen, dass $A+B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A+B) = \alpha+\beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A + B$ ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.

Wählen wir ein beliebiges $x \in A + B$, so gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a + b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \leq \alpha$ und $b \leq \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \leq \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass $A + B \leq \alpha + \beta$ ist, d. h. $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke.

Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl $< \alpha + \beta$ ist obere Schranke, d. h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ existiert ein $x \in A + B$ mit $x > \Gamma$.

Sei also $\Gamma < \alpha+\beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma - b$. Daher existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d. h. es ist $a + b > \Gamma$, und wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A + B$ sein.

Nun zum Infimum. Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A + B$ nach unten beschränkt ist. Aus der Vorlesung wissen wir, wie man bei beschränkten Mengen das Infimum als ein Supremum schreiben kann:

$$\begin{aligned}\inf(A+B) &= -\sup\bigl(-(A+B)\bigr) = -\sup\bigl((-A)+(-B)\bigr) = -\bigl(\sup(-A)+\sup(-B)\bigr)\\ &= -\bigl(-\inf A + (-\inf B)\bigr) = \inf A + \inf B.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 **a)** Die Menge A ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke, so müsste

$$\forall x \in (0,42]: \quad x + \frac{1}{x} \leq \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n}$ einsetzen und erhielten: $\frac{1}{n} + n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leq \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von A. (Man kann allerdings schreiben: $\sup A = \infty$.)

Die Menge A ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geq 2x \quad \leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geq 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in A$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von A sein. Also ist $\inf A = 2$ und wegen $2 \in A$ folgt auch $\min A = 2$.

b) Offenbar gilt $x^2(1+x^2)^{-1} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $0 \in B$ (man setze $x = 0$) und damit folgt: Infimum und Minimum von B existieren, es ist $\inf B = \min B = 0$.

Die Menge B ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leq 1 \quad \leftrightarrow \quad x^2 \leq 1 + x^2$$

und die letzte Ungleichung ist natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir zeigen nun, dass 1 sogar die *kleinste* obere Schranke ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von B ist. Wir müssen also ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1+x^2), \quad \text{also} \quad (1-\Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d.h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1-\Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für hinreichend große x offenbar erfüllt.

Aufgabe 6 Da A nach unten beschränkt ist (durch 0), existiert $\alpha := \inf A$. Nach Voraussetzung ist $\alpha > 0$ und wir müssen nun zeigen, dass $\alpha^{-1} = \sup B$ gilt. Es sind also zwei Dinge zu beweisen: Zum einen, dass α^{-1} eine obere Schranke von B ist; zum anderen, dass α^{-1} sogar die *kleinste* obere Schranke ist.

Da α eine untere Schranke von A ist, gilt $\alpha \leq a$ für alle $a \in A$. Multiplikation mit $a^{-1}\alpha^{-1}$ (dies ist eine positive Zahl) liefert $a^{-1} \leq \alpha^{-1}$ für alle $a \in A$. Ist nun $x \in B$ beliebig, so gilt $x = a^{-1}$ für ein $a \in A$; es ist also $x \leq \alpha^{-1}$. Damit ist klar, dass B durch α^{-1} nach oben beschränkt ist.

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist, dass also kein $\Gamma < \alpha^{-1}$ obere Schranke von B ist. Es ist klar, dass kein $\Gamma \leq 0$ obere Schranke von B sein kann, da B nur positive Zahlen enthält. Sei also $0 < \Gamma < \alpha^{-1}$ beliebig. Dann folgt $\Gamma^{-1} > \alpha = \inf A$ und da α die *größte* untere Schranke von A ist, muss es ein $a \in A$ mit $a < \Gamma^{-1}$ geben. Dies bedeutet aber wiederum $a^{-1} > \Gamma$ und wegen $a^{-1} \in B$ ist damit Γ keine obere Schranke von B.

Aufgabe 7 Offenbar gilt $\{0\} \subset M_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und damit auch $\{0\} \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$. Ist andererseits $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$, so bedeutet dies

$$\forall j \in \mathbb{N}: \quad -\frac{1}{j} \leq x \leq \frac{1}{j}.$$

Angenommen, es wäre $x < 0$. Aus $-1/j \leq x$ folgt dann durch Multiplikation mit j/x (dies ist eine negative Zahl): $-1/x \geq j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist.

Wäre $x > 0$, so folgte aus $x \leq 1/j$ durch Multiplikation mit j/x, dass $j \leq 1/x$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Erneut ein Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nach oben nicht beschränkt ist.

Also muss $x = 0$ gelten und wir haben auch $\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j \subset \{0\}$ gezeigt.