Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Muzzulini WS 2007/2008

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die durch $f_n(x) := x^n$ gegebene Funktion $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist. Folgern Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$x \leq y \quad \leftrightarrow \quad x^n \leq y^n$$

Aufgabe 2 (Ü) Die beiden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien monoton fallend. Was kann man dann über $g \circ f$ sagen?

Aufgabe 3 (T) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

b) Die Zahl $2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n-1}$ ist durch 42 teilbar.

Aufgabe 4 (T) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}$.

Aufgabe 5 (T) Berechnen Sie das Produkt

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1\,000\,000}\right).$$

Hinweis: Definieren Sie eine Folge $(a_n)_{n \geq 2}$, so dass a_{1000} das gesuchte Ergebnis ist. Erraten Sie eine explizite Darstellung der Folgenglieder indem Sie die Folge $(a_n - 1/2)$ betrachten.

Aufgabe 6 (T) Zeigen Sie ohne vollständige Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$$

gilt und folgern Sie daraus die für alle $n \geq 2$ gültige Ungleichungskette

$$2\sqrt{n} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

Ist $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$ eine natürliche Zahl?

— bitte wenden —

Aufgabe 7 (Ü) Seien $a_j,\ b_j \in \mathbb{R}$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie die Abschätzung

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}.$$

Aufgabe 8 (Ü) Die Zahlen a_n seien rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \qquad a_2 := \frac{1}{4}, \qquad a_n := \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{n^2} \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Versuchen Sie eine einfache Formel für a_n zu finden und beweisen Sie diese.

Aufgabe 9 (Ü) Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k.$$

Folgern Sie daraus den binomischen Satz: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Aufgabe 10 (Ü) Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil von

a) z^3

b) $1/z$

c) $z \cdot w$

d) $\overline{z}^2 + 1/w^2$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.