Aufgabe 1 Die strenge Monotonie zeigen wir mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Trivialerweise ist f_1 streng monoton wachsend.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, es sei gezeigt, dass für ein gewisses n die Funktion f_n streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}_+$ ist (Induktionsvoraussetzung), und müssen dies nun auch für f_{n+1} zeigen. Dazu seien $x, y \in \mathbb{R}_+$ mit $x < y$. Da f_n streng monoton wächst, folgt dann $x^n < y^n$. Somit gilt

$$x^n < y^n \quad \xrightarrow{\cdot x} \quad x^{n+1} < xy^n \qquad \text{und} \qquad x < y \quad \xrightarrow{\cdot y^n} \quad xy^n < y^{n+1}.$$

Insgesamt ergibt sich $x^{n+1} < xy^n < y^{n+1}$, d. h. f_{n+1} wächst streng monoton.

Nun noch zur Folgerung: f_n ist streng monoton wachsend, also ist $(x^n - y^n)(x - y) > 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ mit $x \neq y$ (siehe Vorlesung). Somit gilt $x > y$ genau dann, wenn $x^n > y^n$. Folglich haben wir die Äquivalenz

$$x \leq y \quad \leftrightarrow \quad \neg(x > y) \quad \leftrightarrow \quad \neg(x^n > y^n) \quad \leftrightarrow \quad x^n \leq y^n.$$

Bemerkung: Man kann auch die Gleichung $x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$ verwenden, um die Behauptungen zu zeigen.

Aufgabe 2 Die Funktion $h := g \circ f$ ist dann monoton wachsend. Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ folgt nämlich, da f monoton fällt, $f(x) \geq f(y)$. Daraus folgt, weil g monoton fällt, $g\big(f(x)\big) \leq g\big(f(y)\big)$, also $h(x) \leq h(y)$.

Aufgabe 3 **a)** Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig, denn auf beiden Seiten der Gleichung ergibt sich $\frac{1}{2}$.

Induktionsschluss: Für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ sei die Behauptung gezeigt (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \overset{\text{IV}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n+(1+j)} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n+1)+j} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n+1)+j} + \frac{2-1}{2n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+j}.
\end{aligned}$$

b) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ergibt sich die Zahl $2^5 + 2 \cdot 5^1 = 42$, und diese ist trivialerweise durch 42 teilbar.

Induktionsschluss: Wir setzen voraus (IV), dass für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ die Teilbarkeit bewiesen ist, dass also ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n-1} = 42 \cdot k$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
2^{2(n+1)+3} + 2 \cdot 5^{2(n+1)-1} &= 2^{2n+5} + 2 \cdot 5^{2n+1} = 4 \cdot 2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n+1} \\
&= 4 \cdot (2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n-1}) - 4 \cdot 2 \cdot 5^{2n-1} + 2 \cdot 5^{2n+1} \\
&\overset{\text{IV}}{=} 4 \cdot 42 \cdot k + 5^{2n-1}(-8 + 2 \cdot 5^2) = 4 \cdot 42 \cdot k + 42 \cdot 5^{2n-1},
\end{aligned}$$

womit auch die Induktionsbehauptung bewiesen ist.

Aufgabe 4 Wir verwenden wieder vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ hat die Summe genau einen Summanden und ergibt 1; dies ist natürlich größer als $\frac{1}{2}$.

Induktionsschluss: Ist die Ungleichung für ein n bewiesen (IV), so folgt

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{\text{IV}}{>} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{2^{n+1} - 1 - 2^n + 1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2}.$$

(Bei der Abschätzung wurde außer IV noch benutzt, dass $2^{n+1} > k$ also $1/k > 1/2^{n+1}$ für alle $k = 2^n, \ldots, 2^{n+1} - 1$ gilt.)

Aufgabe 5 Definieren wir für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ die Zahlen

$$a_n := \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right),$$

so besteht die Aufgabe darin, a_{1000} zu berechnen. Es gilt

$$a_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \qquad a_3 = a_2 \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{3},$$

$$a_4 = a_3 \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8}, \qquad a_5 = a_4 \cdot \frac{24}{25} = \frac{3}{5}.$$

Die Zahlen liegen alle in der Nähe von $\frac{1}{2}$, also betrachten wir $a_n - \frac{1}{2}$. Wir erhalten

$$a_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad a_3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \qquad a_4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \qquad a_5 - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

Wir vermuten, dass $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{n+1}{2n}$ gilt und zeigen dies mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 2$ haben wir die Formel gerade schon überprüft.

Induktionsschluss: Ist die Formel für ein gewisses n richtig (IV), so folgt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \overset{\text{IV}}{=} \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{2n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Das Produkt hat also den Wert $a_{1000} = \frac{1001}{2000} = 0{,}5005$.

Aufgabe 6 Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} &= \left(2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}\right) \cdot \frac{2\sqrt{k+1} + 2\sqrt{k}}{2\sqrt{k+1} + 2\sqrt{k}} = \frac{(2\sqrt{k+1}\,)^2 - (2\sqrt{k}\,)^2}{2\sqrt{k+1} + 2\sqrt{k}} \\ &= \frac{4(k+1) - 4k}{2\sqrt{k+1} + 2\sqrt{k}} = \frac{4}{2\sqrt{k+1} + 2\sqrt{k}} < \frac{4}{2\sqrt{k} + 2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

(Hinmweis: Der Trick, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ bzw. $1/(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$ mit $(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})/(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})$ zu erweitern, ist häufig nützlich. Damit bekommt man die Wurzeln aus dem Nenner in den Zähler oder umgekehrt.)

Ebenso ergibt sich

$$2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1} = \frac{4k - 4(k-1)}{2\sqrt{k} + 2\sqrt{k-1}} = \frac{4}{2\sqrt{k} + 2\sqrt{k-1}} > \frac{4}{2\sqrt{k} + 2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Mit der ersten Abschätzung folgt nun für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n} \left(2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}\right).$$

Hier haben wir eine Summe der Bauart $S = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)$ vor uns. Eine solche *Teleskopsumme* lässt sich leicht berechnen:

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=2}^{n+1} a_j - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=2}^{n} a_j + a_{n+1} - a_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k = a_{n+1} - a_1.$$

Also erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1} > 2\sqrt{n} - 2.$$

Mit der zweiten Abschätzung folgt für $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}\right) = 1 + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{1} = 2\sqrt{n} - 1.$$

(Wir brauchen $n \geq 2$, weil für $n = 1$ die Summe $\sum_{k=2}^{n}$ ganz wegfällt.)

Wir wissen nun, dass die Summe, die sich für $n = 10000$ ergibt, zwischen $2\sqrt{10000} - 2 = 198$ und $2\sqrt{10000} - 1 = 199$ liegt und somit keine natürliche Zahl sein kann.

Aufgabe 7 Beide Seiten der zu zeigenden Ungleichung sind nicht negativ. Daher können wir auf beiden Seiten quadrieren und erhalten eine äquivalente Aussage. Wir können Abschätzen

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)^2 &= \sum_{j=1}^{n}(a_j^2 + 2a_jb_j + b_j^2) = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n} a_jb_j. \\ &\overset{Vorl.}{\leq} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j^2 + 2\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2} = \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}\right)^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 8 Wir beginnen damit, einige a_n zu berechnen:

$$a_3 = \frac{(3-1)^2(3-2)^2}{3^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{9}, \qquad a_4 = \frac{3^2 2^2}{4^2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Es scheint $a_n = 1/n^2$ zu gelten. Wir bestätigen dies mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ und $n = 2$ stimmt dies offenbar.

Induktionsschluss: Für $1, \ldots, n$ sei die Behauptung gezeigt, wobei $n \geq 2$. (Man beachte: Als Induktionsvoraussetzung reicht hier nicht, dass die Formel nur für n gilt, sondern auch für $n - 1$.) Dann folgt

$$a_{n+1} = \frac{n^2(n-1)^2}{(n+1)^2} \cdot a_n \cdot a_{n-1} = \frac{n^2(n-1)^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Aufgabe 9 Wir erbringen den Beweis mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ steht links $(1 + t)$ und rechts

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} t^k = \binom{1}{0} t^0 + \binom{1}{1} t^1 = 1 + t,$$

denn $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ und $t^0 = 1$ (auch $0^0 = 1$). Für $n = 1$ ist die Formel also richtig.

Induktionsschritt: Nun sei die Gleichung für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ bewiesen (Induktionsvoraussetzung, IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}
(1+t)^{n+1} &= (1+t)(1+t)^n \overset{\text{IV}}{=} (1+t) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} t^j = \binom{n}{0} t^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} t^k + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} t^j + \binom{n}{n} t^{n+1} \\
&= t^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] t^k + t^{n+1}
\end{aligned}$$

und mit der aus der Vorlesung bekannten Gleichung $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ erhalten wir

$$= \binom{n+1}{0} t^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} t^k + \binom{n+1}{n+1} t^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} t^k,$$

womit die Induktionsbehauptung bewiesen ist.

Daraus können wir nun den binomischen Satz folgern: Für $x \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \big(x(1 + y/x)\big)^n = x^n (1 + y/x)^n = x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y/x)^k \\
&= x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.
\end{aligned}$$

Ist dagegen $x = 0$, so gilt

$$(x+y)^n = y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

weil in dieser Summe alle Summanden außer dem letzten 0 ergeben.

Aufgabe 10 **a)** $z^3 = (3-i)^3 = (3-i)(9-6i+i^2) = (3-i)(8-6i) = 24-18i-8i+6i^2 = 18-26i$. Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26.

b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $1/z = 1/z \cdot \bar{z}/\bar{z} = \bar{z}/(z\bar{z})$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2-i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$.

c) Es ergibt sich $z \cdot w = (3-i)(-1+2i) = -3+6i+i-2i^2 = -1+7i$. Also hat $z \cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7.

d) Es ist $\bar{z}^2 = \left(\overline{3-i}\right)^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9-16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

$\bar{z}^2 + 1/w^2 = (8+6i) + (-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $7\frac{22}{25}$ und Imaginärteil $6\frac{4}{25}$.