Aufgabe 1 **a)** Wegen $y^2 - x^2 = (|y| - |x|)(|y| + |x|)$ ist $|y| > |x|$ äquivalent zu $y^2 > x^2$. Folglich haben wir

$$|2x| > |6 - 2x| \iff (2x)^2 > (6 - 2x)^2 \iff 4x^2 > 36 - 24x + 4x^2 \iff 24x > 36.$$

Die Ungleichung ist also genau für $x > 36/24 = 3/2$ erfüllt.

b) Wir quadrieren wieder beide Seiten der Gleichung, denn diese sind ≥ 0.

$$|x - 2| \cdot |x + 2| = 2 \iff \big((x - 2)(x + 2)\big)^2 = 4 \iff (x^2 - 4)^2 = 4.$$

Die letzte Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $x^2 - 4 = 2$ oder $x^2 - 4 = -2$, d. h. für $x^2 = 6$ oder $x^2 = 2$. Die gegebene Gleichung hat somit die vier Lösungen $x_1 = \sqrt{6}$, $x_2 = -\sqrt{6}$, $x_3 = \sqrt{2}$ und $x_4 = -\sqrt{2}$.

c) Für $x < 0$ ist die Ungleichung offenbar erfüllt, denn dann steht links eine negative, rechts aber eine positive Zahl. Für $x = 0$ steht auf beiden Seiten 0, die Ungleichung ist dann also nicht erfüllt. Untersuchen wir noch den Fall $x > 0$; dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{3x}{1 + |x|} < 4x^2 &\iff \frac{3}{1 + x} < 4x \iff 3 < 4x + 4x^2 \\ &\iff 3 < (2x + 1)^2 - 1 \iff (2x + 1)^2 > 4 \iff |2x + 1| > 2. \end{aligned}$$

Dies ist erfüllt für $2x + 1 < -2$ oder $2x + 1 > 2$, also $x < -\frac{3}{2}$ oder $x > \frac{1}{2}$. Im Fall $x > 0$ ist die Ungleichung also genau für $x > \frac{1}{2}$ erfüllt.

Insgesamt: Die Ungleichung ist erfüllt für $x < 0$ oder $x > \frac{1}{2}$.

d) Es gilt

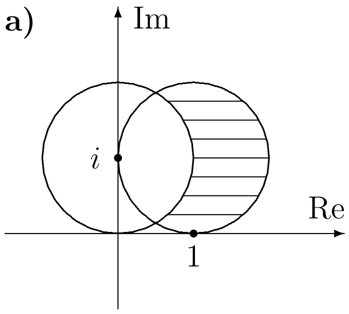
$$\big|7 - |x - 5|\big| \leq 3 \iff -3 \leq 7 - |x - 5| \leq 3 \iff 10 \geq |x - 5| \geq 4.$$

Im Falle $x \geq 5$ geht dies über in $10 \geq x - 5 \geq 4$, also $15 \geq x \geq 9$ und im Falle $x < 5$ ergibt sich $10 \geq 5 - x \geq 4$, also $-5 \leq x \leq 1$.

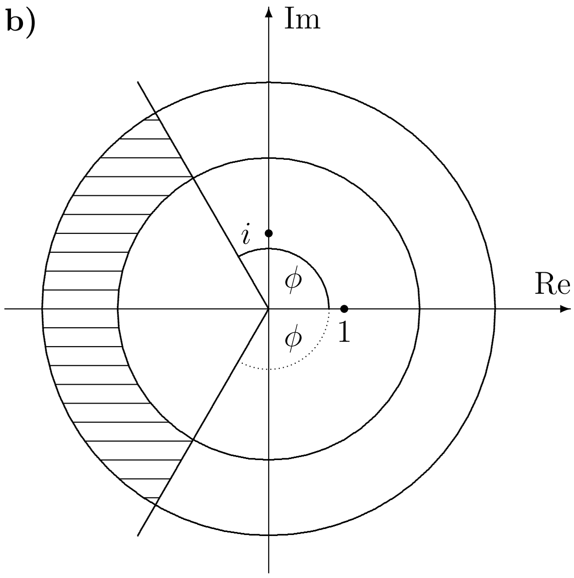
Insgesamt: Die Ungleichung ist erfüllt für $x \in [-5, 1] \cup [9, 15]$.

Aufgabe 2 **a)** Durch $1 \leq |z - i|$ wird das Äußere einer Kreisscheibe mit Radius 1 um den Punkt i in der komplexen Zahlenebene beschrieben; durch $|z - i - 1| \leq 1$ eine Kreisscheibe mit Radius 1 um $i + 1$ (die Kreislinie gehört jeweils dazu). Die Menge A ist daher der in der Skizze schraffierte Bereich; der Rand gehört dazu.

a)



b)



b) Durch $2 < |z| < 3$ wird ein Kreisring um den Punkt 0 mit innerem Radius 2 und äußerem Radius 3 beschrieben. Durch die Bedingung für $\arg z$ wird daraus ein Sektor ausgeschnitten (siehe Skizze; $\phi = \frac{2}{3}\pi$); der Rand gehört diesmal nicht dazu.

Aufgabe 3 **a)** Es gilt $z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2$. Die Gleichung ist also genau dann erfüllt, wenn $(z-1)^2 = -2$. Dies bedeutet $z - 1 = i\sqrt{2}$ oder $z - 1 = -i\sqrt{2}$, also hat die Gleichung die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ und $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

b) Für jede Lösung muss $|\overline{z}| = |z^3|$, also $|z| = |z|^3$ gelten. Folglich ist $|z| = 0$ oder $|z| = 1$. Offenbar ist 0 eine Lösung; es bleibt noch der Fall $|z| = 1$. Ein solches z können wir darstellen als $z = \cos\phi + i\sin\phi$ (mit $\phi \in [0, 2\pi)$) und die Gleichung geht über in

$$\cos\phi - i\sin\phi = (\cos\phi + i\sin\phi)^3.$$

Wegen $(\cos\phi + i\sin\phi)^3 = \cos(3\phi) + i\sin(3\phi)$ (siehe Vorlesung) sowie $-\sin\phi = \sin(-\phi)$ und $\cos\phi = \cos(-\phi)$ bedeutet dies

$$\cos(-\phi) + i\sin(-\phi) = \cos(3\phi) + i\sin(3\phi).$$

Dies gilt genau dann, wenn $-\phi = 3\phi + 2k\pi$ mit einem gewissen $k \in \mathbb{Z}$, also: $\phi = -\frac{1}{2}k\pi$. Wegen $\phi \in [0, 2\pi)$ haben wir vier Lösungen: $\phi \in \{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$. Diese Argumente liefern die komplexen Zahlen 1, i, -1 und $-i$. (Dies sind gerade die vierten Einheitswurzeln, denn für $|z| = 1$ geht $\overline{z} = z^3$ durch Multiplikation mit z über in $1 = z^4$.)

Insgesamt: Die Lösungsmenge der Gleichung ist somit $\{0, 1, i, -1, -i\}$.

c) Laut Vorlesung hat die Gleichung $z^5 = a$ (für $a \neq 0$) genau fünf Lösungen:

$$z_k = \sqrt[5]{|a|}\,(\cos\phi_k + i\sin\phi_k), \quad \text{wobei} \quad \phi_k = \frac{\arg a}{5} + 2\frac{k}{5}\pi, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Es ist $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ und $\arg(1-i) = \frac{7}{4}\pi$. Die fünf Lösungen haben also alle Betrag $\sqrt[10]{2}$ und die Argumente

$$\phi_k = \frac{7}{20}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi, \qquad k = 0,1,2,3,4,$$

d. h. $\phi_0 = \frac{7}{20}\pi$, $\phi_1 = \frac{15}{20}\pi = \frac{3}{4}\pi$, $\phi_2 = \frac{23}{20}\pi$, $\phi_3 = \frac{31}{20}\pi$ und $\phi_4 = \frac{39}{20}\pi$. Damit haben wir alle Lösungen angegeben; es war nicht verlangt, Real- und Imaginärteil zu berechnen. (Bei z_1 geht das recht einfach: $z_1 = (-1+i)/\sqrt[5]{4}$.)

d) Zunächst formen wir die rechte Seite um:

$$\frac{6i-10}{4+i} \cdot \frac{4-i}{4-i} = \frac{(6i-10)(4-i)}{16-i^2} = \frac{24i-6i^2-40+10i}{17} = \frac{-34+34i}{17} = -2+2i$$

Genau wie eben erhalten wir die drei Lösungen

$$z_k = \sqrt[3]{|-2+2i|}\,(\cos\phi_k + i\sin\phi_k), \quad \text{mit} \quad \phi_k = \frac{\arg(-2+2i)}{3} + 2\frac{k}{3}\pi, \qquad k = 0,1,2.$$

Die Lösungen haben also wegen $|-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8}$ den Betrag $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$ und wegen $\arg(-2+2i) = \frac{3}{4}\pi$ die Argumente

$$\phi_k = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi, \qquad k = 0,1,2,$$

also $\phi_0 = \frac{1}{4}\pi$, $\phi_1 = \frac{11}{12}\pi$, $\phi_2 = \frac{19}{12}\pi$. (Es ergibt sich also $z_1 = 1+i$.)

Aufgabe 4 Aufgrund des Hinweises machen wir den Ansatz $z = x(1+i)$ mit $x \in \mathbb{R}$. Es ergibt sich

$$x^3(1+i)^3 - (3-i)x^2(1+i)^2 - ix(1+i) + 1 + 3i = 0.$$

Wegen $(1+i)^2 = 2i$ und $(1+i)^3 = -2+2i$ führt dies zu der Gleichung

$$x^3(-2+2i) + x^2(-2-6i) + x(1-i) + 1 + 3i = 0$$

und die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil liefert die zwei Gleichungen

$$-2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x^3 - 6x^2 - x + 3 = 0.$$

Addieren dieser Gleichungen liefert $-8x^2 + 4 = 0$, also $x^2 = \frac{1}{2}$, d. h. $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Durch Einsetzen überzeugt man sich, dass dies tatsächlich Lösungen beider Gleichungen sind. Damit haben wir zwei Lösungen unserer ursprünglichen Gleichung gefunden:

$$z_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) \quad \text{und} \quad z_2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+i).$$

Es gilt $(z-z_1)(z-z_2) = (z-z_1)(z+z_1) = z^2 - z_1^2 = z^2 - i$. Für $z \neq z_1$ und $z \neq z_2$ dividieren wir die Gleichng daher durch $z^2 - i$ (Polynomdivision) und erhalten

$$0 = \frac{z^3 - (3-i)z^2 - iz + 1 + 3i}{z^2 - i} = z - (3-i).$$

Die dritte Lösung ist somit $z_3 = 3 - i$.

Aufgabe 5 Aus der Vorlesung wissen wir, dass gilt:

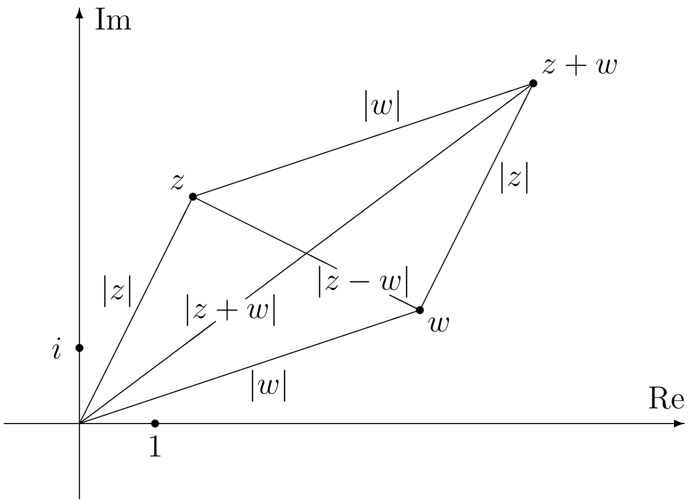
$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = |z|^2 + 2\Re z\overline{w} + |w|^2.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$|z-w|^2 = |z|^2 + 2\Re z\overline{(-w)} + |-w|^2 = |z|^2 - 2\Re z\overline{w} + |w|^2.$$

Addiert man diese Gleichungen, so folgt die Behauptung.

Geometrische Bedeutung: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalenlängen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen.



Aufgabe 8 Etwa folgende Folgen erfüllen das verlangte:

a) $a_n = (-1)^n$,

b) $(b_n) = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, \ldots,$

c) $c_n = (-1)^n n$,

d) $d_n = 2007 + \frac{(-1)^n}{n}$,

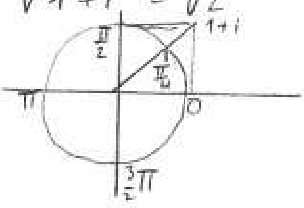
e) $e_n = 0$ für gerade n, $e_n = n$ für ungerade n.

6 a.) Polardarstellung von $1+i$:

$1+i = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ für ein $\varphi \in [0, 2\pi)$

$r = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Wir suchen φ:



wir sehen: $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Also $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Damit gilt: $(1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\left(\cos 10\frac{\pi}{4} + i\sin 10\frac{\pi}{4}\right)$

$$= 2^5\left(\underbrace{\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)}_{=\cos\frac{\pi}{2}=0} + i\underbrace{\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)}_{=\sin\frac{\pi}{2}=1}\right) = 32i$$

Somit gilt: $\mathrm{Re}\left((1+i)^{10}\right) = 0$, $\mathrm{Im}\left((1+i)^{10}\right) = 32$

b) Es gilt $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Damit erhalten wir formell:

$$\sum_{k=0}^{4m}\left(\frac{i}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{4m}\frac{i^k}{2^k} = \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{i}{2}\right)^{4j}\left(1+\left(\frac{i}{2}\right)^2+\left(\frac{i}{2}\right)^3+\left(\frac{i}{2}\right)^4\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{m}\frac{1^j}{2^{4j}}\left(1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}i\right) = \left(\frac{3}{4}+\frac{3}{8}i\right)\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{16}\right)^j$$

$$\overset{\text{geom. Summe}}{=} \left(\frac{3}{4}+\frac{3}{8}i\right)\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{16}} = (\dots)\frac{\frac{16^{m+1}-1}{16^{m+1}}}{\frac{15}{16}} = (\dots)\underbrace{\frac{15\left(16^{m+1}-1\right)}{16^{m+2}}}_{=:f(m)}$$

Damit gilt für $n = 4m+r$ mit $r \in \{0,1,2,3\}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{4m}\left(\frac{i}{2}\right)^k - \underbrace{\left(\frac{i}{2}\right)^0}_{=1} + \underbrace{\sum_{k=4m+1}^{4m+r}\left(\frac{i}{2}\right)^k}_{=:g(m,r)}$$

$$= \left(\frac{3}{4}+\frac{3}{8}i\right)\cdot f(m) - 1 + g(m,r)$$

$$g(m,r) = \sum_{k=4m+1}^{4m+r}\left(\frac{i}{2}\right)^k \overset{j:=k-4m}{=} \sum_{j=1}^{r}\underbrace{\left(\frac{i}{2}\right)^{4m}}_{=2^{-4m}}\cdot\left(\frac{i}{2}\right)^j = \frac{1}{2^{4m}}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{i}{2}\right)^j$$

$$= \frac{1}{2^{4m}}\cdot\begin{cases} 0 & \text{für } r=0 \\ \frac{i}{2} & \text{für } r=1 \\ \frac{i}{2}-\frac{1}{4} & \text{für } r=2 \\ \frac{i}{2}-\frac{1}{4}-\frac{i}{8} = -\frac{1}{4}+\frac{3}{8}i & \text{für } r=3 \end{cases}$$

Realteil und Imaginärteil sind nun leicht ablesbar.

7.) a.) d_n ist die Differenz von $a_{n+1} - a_n$, also gilt: $a_2 = a_1 + d_1$,
$a_3 = a_2 + d_2 = a_1 + d_1 + d_2$, ...
Allgemein gilt: $a_n = a_1 + d_1 + \ldots + d_{n-1} = a_1 + \sum_{j=1}^{n-1} d_j$.

b.) Es gilt $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Wir zeigen: $d_n \to 0$ $(n \to \infty)$, d.h. für $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für jedes $n > N$: $|d - 0| = |d| < \varepsilon$. Sei also $\varepsilon > 0$.
$a_n \to a$ bedeutet, dass für jedes $\delta > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: |a_n - a| < \delta$.
Wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ und wählen uns ein entsprechendes $N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$ $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Damit gilt für jedes $n > N$: $|d_n| = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < 2\delta = \varepsilon$.
Folglich konvergiert (d_n) gegen 0.

c) Für $a_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}$ gilt $d_n = \frac{1}{n+1} \to 0$, aber a_n ist unbeschränkt, also nicht konvergent.

d.) Wir setzen $a_0 = 0$, $d_n = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{für gerades } n \\ 0 & \text{für ungerades } n \end{cases}$. Damit gilt $a_{2n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}$, also konvergiert (a_n) nicht.

e.) $|d_n| \to 0$ monoton, $d_n \begin{cases} \geq 0 & \text{für geraden} \\ \leq 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} d_n$ konvergiert. Beweis: Leibniz Kriterium.

9.) a.) Vermutung: (a_n) ist monoton wachsend und beschränkt (also konvergent)

$a_{n+1} \to a$, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \to \sqrt{1+a}$. Folglich gilt: $a = \sqrt{1+a}$, also $a^2 = 1 + a$.

damit $a^2 - a - 1 = 0 \xrightarrow{pq\text{-Formel}} a^{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Wir zeigen mit VI: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $a_{n+1} \geq a_n)$ (IV)

IA $(n=1)$: $a_1 = 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ✓, $a_2 = \sqrt{1+1} > 1 = a_1$ ✓

IS $(n \to n+1)$: $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \overset{IV}{<} \sqrt{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ✓

noch zu zeigen $a_{n+1+1} \geq a_{n+1}$. Es reicht zu zeigen $a_{n+2}^2 \geq a_{n+1}$; wir zeigen: $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 > 0$:

$a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = (\sqrt{a_{n+1} + 1})^2 - a_{n+1}^2 = -a_{n+1}^2 + a_{n+1} + 1$

$-x^2 + x + 1$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen in $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ (s.o.); $a_{n+1} \in (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$

$\Rightarrow a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = -a_{n+1}^2 + a_{n+1} + 1 > 0$ ✓

9 a) Folglich wissen wir: (a_n) wächst monoton und ist beschränkt.

Für den Grenzwert muß gelten $a = \sqrt{1+a}$ (o. Bew.). Folglich konvergiert (a_n) gegen $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) Wir zeigen wie bei a), daß $\underset{(b_{2n})}{b_{2n-1}}$ mon. $\underset{(\text{fällt})}{\text{wächst}}$ und durch seinen Grenzwert beschränkt ist. Für diesen gilt

$$b = 1 + \frac{1}{b} \longrightarrow b^2 = b+1 \longrightarrow b^2 - b - 1 = 0 \overset{a)}{\underset{b>0}{\Longrightarrow}} b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Wir zeigen mit V.I: $b_{2n-1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < b_{2n}$ (IV)

IA $(n=1)$: $b_{2n-1} = b_1 = 1 \overset{\checkmark}{<} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overset{\checkmark}{<} \frac{1+\sqrt{9}}{2} = \frac{4}{2} = 2 = 1 + \frac{1}{b_1} = b_2$ ✓

IS $(n \curvearrowright n+1)$:

$$b_{2(n+1)-1} = b_{2n+1} = 1 + \frac{1}{b_{2n}} \overset{IV}{<} 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+2\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \frac{(1+\sqrt{5})^2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \checkmark$$

$$b_{2n} = 1 + \frac{1}{b_{2n-1}} \overset{IV}{>} 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \overset{s.o.}{=} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \checkmark$$

Damit konvergiert (b_{2n}) und (b_{2n-1}). Ohne Beweis:

$b_{2n} \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b_{2n-1} \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

damit konvergiert auch $b_n \longrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(n \to \infty)$