Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Muzzulini

WS 2007/2008

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Definition.
Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Es sei $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Funktion, also für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$r(j) < r(j+1).$$

(Folglich gibt es auch für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $j \in \mathbb{N}$, so dass $r(j) \geq k$.)
Die Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_j := a_{r(j)}$$

heißt Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 1 (Ü) Zeigen Sie

a) Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und zwar gegen den selben Grenzwert.

b) Besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Teilfolge, so divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Es gilt:
H ist ein Häufungspunkt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\longleftrightarrow$ es gibt eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen H konvergiert.

Aufgabe 2 (T) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der nachstehenden Folgen (a_n) und geben Sie $\liminf(a_n)$ und $\limsup(a_n)$ an.

a) $a_n = \big(1 + (-1)^n\big)^n$

b) $a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n, & n = 3k \\ 2, & n = 3k-1 \\ 2 + (n+1)/n, & n = 3k-2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$

Aufgabe 3 (Ü) Es sei $0 < a < 1$. Die Folge a_n wird rekursiv definiert durch

$$a_1 := \tfrac{1}{2}a, \qquad a_{n+1} := \tfrac{1}{2}(a + a_n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Die Folge (a_n) ist monoton wachsend und nach oben durch 1 beschränkt. Konvergiert die Folge? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 4 (T) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3}$

b) $a_n = (-1)^n + 1/n$

c) $a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n$

d) $a_n = \dfrac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$

e) $a_n = \dfrac{1}{n^4}\Big(\sqrt[10]{1+3n^4+n^9} - 1 \Big)$

Aufgabe 5 (Ü) Die Folge (a_n) sei gegeben durch

$$a_1 := \sqrt{2}, \quad a_2 := \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad a_3 := \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad \ldots$$

Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 6 (T) Zeigen Sie: Die durch $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ gegebenen Folgen (a_n) und (b_n) definieren eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])$ für die Zahl e.

Aufgabe 7 (T) Es sei $a_n := \sqrt[n]{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) streng monoton wachsend ist.

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$.

Aufgabe 8 (Ü) Untersuchen Sie die komplexe Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 9 (Ü) Untersuchen Sie, für welche komplexen Zahlen z die Folge

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{z}{(1-z)} \right)^k \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert.

Übungsklausur Die erste Übungsklausur zur Vorlesung HM I findet am 8. Dezember (Samstag), 8 – 10 Uhr statt. Vom 26.-30.11. werden Im Mathebau im dritten Stock neben Zimmer 312 Listen aushängen. Wer an der Klausur teilnehmen will, muss sich bis Freitag, 30.11. (13 Uhr) in die entsprechenden Listen eintragen.
ACHTUNG: Es gibt spezielle Listen für Physiker, da für Phyisker die Klausur nicht nur zur Übung stattfindet.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

— bitte wenden —