Aufgabe 2 **a)** Offenbar gilt

$$a_{2n} = \big(1 + (-1)^{2n}\big)^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

(a_n) ist also nicht nach oben beschränkt, d. h. ∞ ist ein Häufungspunkt. Weiter gilt

$$a_{2n-1} = \big(1 + (-1)^{2n-1}\big)^{2n-1} = (1-1)^{2n-1} = 0.$$

Damit ist auch 0 ein Häufungspunkt der Folge, denn in jeder Umgebung von 0 liegen unendlich viele Folgenglieder. Weitere Häufunspunkte gibt es nicht, denn zu jedem anderen Punkt kann man eine so kleine Umgebung wählen, dass nur endlich viele (a_n) in ihr liegen. Somit ist $\liminf(a_n) = 0$ und $\limsup(a_n) = \infty$.

b) Wegen $1+1/2^n \to 1$ und $2+(n+1)/n = 2+1+1/n \to 3$ für $n \to \infty$ ergeben sich hier die drei Häufungspunkte 1, 2 und 3. Damit gilt $\liminf(a_n) = 1$ und $\limsup(a_n) = 3$.

Aufgabe 3 Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, dass die Ungleichungskette $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang: Nach Voraussetzung gilt die Behauptung für $a_1 = \frac{1}{2}a$.

Induktionsschluss: Es sei $0 < a_n < 1$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist $a_{n+1} > 0$ (dazu brauchen wir die Induktionsvoraussetzung gar nicht). Aus $0 < a_n < 1$ folgt $a_n^2 < 1$ und damit

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a + a_n^2) < \tfrac{1}{2}(a+1) < \tfrac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Nun zeigen wir mittels vollständiger Induktion, dass $a_{n+1} - a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang: Es ist $a_2 - a_1 = \frac{1}{2}(a + a_1^2) - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a_1^2 \geq 0$.

Induktionsschluss: Es sei bereits $a_{n+1} - a_n \geq 0$ bewiesen. Dann folgt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a + a_{n+1}^2) - \tfrac{1}{2}(a + a_n^2) = \tfrac{1}{2}(a_{n+1}^2 - a_n^2) = \tfrac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)$$

und nach Induktionsvoraussetzung und wegen $a_n > 0$ ist dies ≥ 0.

Da (a_n) monoton wächst und nach oben durch 1 beschränkt ist, konvergiert die Folge gegen einen gewissen Grenzwert $c \leq 1$. Diesen erhalten wir, indem wir in der Gleichung $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + a_n^2)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ machen. Dies liefert

$$c = \tfrac{1}{2}(a + c^2), \quad \text{also} \quad c^2 - 2c + a = 0, \quad \text{d. h.} \quad c_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}.$$

Da uns bereits $c \leq 1$ bekannt ist, ergibt sich $c = 1 - \sqrt{1-a}$.

Aufgabe 4 **a)** Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3} = \frac{1/n + 3/n^2 - 4/n^3}{1/n^3 + 1/n + 4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{0+0+4} = 0.$$

b) Diese Folge ist divergent, denn sie besitzt die zwei Häufungspunkte 1 und -1.

c) Wegen $(u-v)(u+v) = u^2 - v^2$, also $u - v = (u^2 - v^2)/(u+v)$, ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n &= \frac{9n^2+2n+1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{2+1/n}{\sqrt{9+2/n+1/n^2}+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

d) Der binomische Satz liefert

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} n^k = \alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_{42} n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k = \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42} - n^{42} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_{41} n^{41}$. Folglich:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_{40} n^{40} + \alpha_{41} n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}} + \frac{\alpha_1}{n^{40}} + \cdots + \frac{\alpha_{40}}{n} + \alpha_{41} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

e) Die Folge konvergiert, denn

$$a_n = \sqrt[10]{\frac{1+3n^2+n^9}{n^{40}}} - \frac{1}{n^4} = \sqrt[10]{\frac{1}{n^{40}} + \frac{3}{n^{38}} + \frac{1}{n^{31}}} - \frac{1}{n^4} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[10]{0} - 0 = 0.$$

Eigentlich hätte die Aufgabenstellung aber anders lauten sollen, nämlich:

$$a_n = n^4\left(\sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}} - 1 \right).$$

Dabei gehen wir ähnlich wie in Teil **c)** vor. Wir verwenden

$$u^m - v^m = (u-v)(u^{m-1} + u^{m-2}v + \cdots + uv^{m-2} + v^{m-1})$$

für $m = 10$. Setzen wir $b_n := \sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}}$, so ist

$$a_n = n^4(b_n - 1) = n^4 \cdot \frac{b_n^{10} - 1^{10}}{b_n^9 + b_n^8 + \cdots + 1} = \frac{n^4(3n^{-4}+n^{-9})}{b_n^9 + b_n^8 + \cdots + 1} = \frac{3+n^{-5}}{b_n^9 + b_n^8 + \cdots + 1}$$

und wegen $b_n \to 1$ folgt $a_n \to \frac{3}{10}$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 5 Die Folge ist durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gegeben. (Offenbar sind alle $a_n \geq 0$; also kann man die Wurzel ziehen.)
Die Folge ist monoton wachsend, wie wir nun mit vollständiger Induktion zeigen:
Induktionsanfang: Es gilt $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} = a_1$.

Induktionsschluss: Es sei bereits $a_n \geq a_{n-1}$ für ein gewisses $n \geq 2$ bewiesen. Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \geq \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n.$$

Als nächstes zeigen wir, dass die Folge nach oben durch 2 beschränkt ist:

Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$.

Induktionsschluss: Ist $a_n \leq 2$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, so folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Da (a_n) monoton wächst und nach oben beschränkt ist, konvergiert die Folge gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Alle a_n sind ≥ 0, also gilt dies auch für a. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in der Rekursionsformel ergibt sich für a die Gleichung $a = \sqrt{2 + a}$. Quadrieren liefert $a^2 = 2 + a$, also $a^2 - a - 2 = 0$. Diese Gleichung hat die zwei Lösungen

$$a_{1,2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}.$$

Wegen $a \geq 0$ folgt $a = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$.

Aufgabe 6 Wir wissen schon, dass $a_n \to e$ für $n \to \infty$ gilt; wir müssen also nur noch zeigen, dass $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung ist. Dies bedeutet: (a_n) wächst monoton, (b_n) fällt monoton, es gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

(a_n) wächst monoton: Zu zeigen ist $a_n \leq a_{n+1}$, also

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\iff \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \leq \frac{n+2}{n+1} \iff \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \geq \frac{n+1}{n+2}.$$

Die letzte Ungleichung gilt: Die Bernoullische Ungleichung liefert nämlich

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2},$$

und wegen $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n^2 + 2n = n(n+2)$ folgt

$$\geq 1 - \frac{n}{n(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}.$$

(b_n) fällt monoton: Wir formen die Aussage $b_n \geq b_{n+1}$ äquivalent um:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$\iff \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq \frac{n+2}{n+1} \iff \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq \frac{n+2}{n+1}.$$

Um die letzte Ungleichung zu zeigen, verwenden wir wieder die Bernoullische Ungleichung und $(n+1)^2 \geq n(n+2)$:

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq 1+\frac{n+1}{n(n+2)} \geq 1+\frac{n+1}{(n+1)^2} = 1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Die Monotonieaussagen sind damit gezeigt. Weiter gilt

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \frac{a_n}{n}.$$

Wegen $a_n \geq 0$ folgt hieraus $b_n - a_n \geq 0$, also $a_n \leq b_n$ und wegen $a_n \to e$ für $n \to \infty$ ergibt sich $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 7 **a)** Wir haben die folgende Äquivalenzenkette:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\iff (n!)^{1/n} < \big((n+1)!\big)^{1/(n+1)} \iff (n!)^{(n+1)/n} < (n+1)! \\ &\iff n! \cdot (n!)^{1/n} < (n+1)! \iff (n!)^{1/n} < n+1. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich aber unter Verwendung der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel (siehe Aufgabe 7, Übungsblatt 3):

$$(n!)^{1/n} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n} = \tfrac{1}{2}(n+1) < n+1.$$

b) Für $b_n := n!/n^n$ gilt

$$\frac{a_n}{n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{b_n}.$$

Um den gesuchten Grenzwert zu berechnen betrachten wir

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}.$$

Nach Satz der Vorlesung gilt dann auch $\sqrt[n]{b_n} \to e^{-1}$ für $n \to \infty$, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1/e.$$

Aufgabe 8 Wegen $i^4 = (-1)^2 = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$i^{4m-3} = i, \qquad i^{4m-2} = -1, \qquad i^{4m-1} = -i, \qquad i^{4m} = 1.$$

Folglich erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4n} \frac{i^k}{k} &= \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{i^{4m-3}}{4m-3} + \frac{i^{4m-2}}{4m-2} + \frac{i^{4m-1}}{4m-1} + \frac{i^{4m}}{4m}\right) \\ &= i\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-1}\right) + \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{4m} - \frac{1}{4m-2}\right) \\ &= i\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + - \cdots + \tfrac{1}{4n-3} - \tfrac{1}{4n-1}\right) + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{6} + - \cdots + \tfrac{1}{4n} - \tfrac{1}{4n-2}\right) \\ &= i\sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^{\nu} \frac{1}{2\nu}. \end{aligned}$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergieren diese Summen für $n \to \infty$. Damit wissen wir: Wenn wir mit s_N die N-te Partialsumme der zu untersuchenden Reihe bezeichnen, dann gilt: s_{4n} konvergiert für $n \to \infty$. Für $m \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$s_{4n+m} = s_{4n} + \sum_{k=4n+1}^{4n+m} \frac{i^k}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_{4n}$$

wegen $|i^k/k| = 1/k$. Also folgt: s_n konvergiert für $n \to \infty$, d. h. die Reihe ist konvergent.

1 a) Es gelte $a_n \to a$. Sei $(a_{r(j)})$ eine Teilfolge von (a_n), d.h.
$r: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ str. mon. wachsend.

z.z.: $a_{r(j)} \to a \quad (j \to \infty)$.

Klar: $r(j) \geq j \qquad (j=1 ✓ \quad j \curvearrowright j+1 \quad r(j+1) \geq 1 + r(j) \geq 1+j ✓)$

Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > N: |a_n - a| < \varepsilon$
$\to$ für alle $n > N: r(n) \geq n > N$ und damit $|a_{r(n)} - a| < \varepsilon$.

b) Sei $(a_{r(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ eine divergente Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ann.: (a_n) konv $\xrightarrow{a)}$ $(a_{r(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ konv. $\lightning$

Also ist die Ann. falsch $\to$ (a_n) divergiert

c) „$\to$" Sei H ein HP einer Folge (a_n).

z.z: es gibt eine Teilfolge $(a_{r(j)})$ von (a_n) mit $a_{r(j)} \to H \quad (j \to \infty)$.

Wir konstruieren r rekursiv:

$r(1) := 1$; Sei r definiert auf $\{1, \dots, n\}$.

Zu $\varepsilon := \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ gibt es unendlich viele $m \in \mathbb{N}$, so dass
$|a_m - H| < \varepsilon$. Insbesondere gibt es ein $m > j(n)$. Wir
setzen $r(n+1) = m$ für ein solches m (etwa für das kleinste solche m).

Damit gilt $r(n+1) > r(n)$, also r str. mon. wachsend.
und $|a_{r(n+1)} - H| < \varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, offensichtlich gilt damit $a_{r(j)} \to H \ (j \to \infty)$

---

d) „$\leftarrow$" sei $(a_{r(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ eine TF v. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_{r(j)} \to H \quad (j \to \infty)$.

z.z: H ist HP v. (a_n). Sei dazu $\varepsilon > 0$.

Wir müssen zeigen, dass $|a_m - H| < \varepsilon$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$.

$a_{r(j)} \to H$, daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j > N$
gilt $|a_{r(j)} - H| < \varepsilon$.
Damit gilt für $m \in \{r(j) : j > N\}$ $|a_m - H| < \varepsilon$, und $\{r(j) : j > N\}$ ist

eine unendliche Menge, da $\{j \in \mathbb{N} : j > N\}$ unendlich ist und r streng monoton, also injektiv.

---

9) Vgl. Blatt 7, Aufgabe 4, bzw Nullfolgenkriterium Für Reihen: $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konv $\rightarrow$ b_n konv. gegen 0 $(n\to\infty)$

Also $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. $:\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv $\longrightarrow (b_k \to 0)$ $(k\to\infty)$

$$\left|\left(\frac{z}{1-z}\right)^k\right| = \left|\frac{z}{1-z}\right|^k = \left(\frac{|z|}{|1-z|}\right)^k \overset{!}{\longrightarrow} 0$$

$\Longleftrightarrow \frac{|z|}{|1-z|} < 1$ (Ausrechnen? Besser so:

$\Longleftrightarrow |z| < |1-z| \underset{y = \mathrm{Im}\, z}{\overset{x = \mathrm{Re}\, z}{\Longleftrightarrow}} |x+iy|^2 < |1-x-iy|^2$

$\Longleftrightarrow x^2+y^2 < (1-x)^2+y^2 \overset{-y^2}{\Longleftrightarrow} x^2 < 1-2x+x^2$

$\overset{-x^2+2x}{\Longleftrightarrow} 2x < 1 \Longleftrightarrow x = \mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2}$.

Genau für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2}$ gilt $\left(\frac{z}{1-z}\right)^k \to 0$ $(k\to\infty)$, das ist nötig dafür, dass $\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{z}{1-z}\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konv.. Wir zeigen, dass es auch hinreichend ist:

Für solch ein z setzen wir $w := \left(\frac{z}{1-z}\right) \in \mathbb{C}$, $|w| < 1$

Damit gilt $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(\frac{z}{1-z}\right)^k\right| = \sum_{k=1}^{\infty}|w^k| = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}|w|^k}_{\text{dies konvergiert}}$ $\left(\sum_{k=1}^{\infty} r^k \text{ konv} \Longleftrightarrow |r| < 1\right)$,

also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{1-z}\right)^k$ absolut

$\rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{1-z}\right)^k$ konvergiert.