Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Muzzulini

WS 2007/2008

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \neq 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

konvergent?
(Erinnerung: $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$)

Aufgabe 2 (Ü) sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$

a) mit $c_{2k} = 0$, $c_{2k+1} \neq 0$ für fast alle k. Es existiere

$$c := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{2k+1}}{c_{2k+3}}\right|.$$

Zeigen Sie: Es liegt Konvergenz vor für alle z mit $|z-z_0| < \sqrt{c}$ und Divergenz für alle z mit $|z-z_0| > \sqrt{c}$.

b) mit $c_{2k} \neq 0$, $c_{2k+1} = 0$ für fast alle k. Es existiere

$$c := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{2k}}{c_{2k+2}}\right|.$$

Dann liegt Konvergenz (Divergenz) vor für alle z mit $|z-z_0| < \sqrt{c}$ $\quad(|z-z_0| > \sqrt{c})$.

Aufgabe 3 (T) Berechnen Sie für $q \in (0,1)$ den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)q^n.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit sich selbst. Dies liefert eine Reihe, deren Wert Sie kennen. Bilden Sie dann das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Aufgabe 4 (T) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{und} \qquad b_n := \frac{\left(1 + \frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}.$$

a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

— bitte wenden —

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

d) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Und was liefert das Wurzelkriterium?

Aufgabe 5 (T) Es sei $q \in (0,1)$. Für die Zahlen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ gelte

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q \cdot |x_n - x_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Die Folge (x_n) konvergiert, und für ihren Grenzwert x gilt

$$|x - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Aufgabe 6 (Ü) Sei

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergiert, aber nicht das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst.

Bemerkung: Dies ist ein Beispiel dafür, dass das Cauchyprodukt zweier konvergenter Reihen nicht konvergieren muss, wenn beide Reihen nicht absolut konvergieren.

Aufgabe 7 (Ü) Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

(für eine reelle Zahl $L \geq 0$). Zeigen Sie, dass daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

— bitte wenden —