Aufgabe 3 Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist absolut konvergent, also gilt

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n \sum_{k=0}^{n} 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n,$$

und diese Reihe (Cauchyprodukt) ist ebenfalls absolut konvergent. Folglich ergibt sich, indem man das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ bildet,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-q} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^k q^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n \sum_{k=0}^{n}(k+1)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)q^n.\end{aligned}$$

Für die gegebene Reihe erhalten wir daher

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)q^n = 2\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Aufgabe 4 **a)** Offenbar ist $a_1 = 2 > 0$. Für $n > 1$ ist $n > \sqrt{n}$ und damit

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Die Konvergenz gegen 0 ist klar wegen $1/\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_N := \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

Die erste Summe ist die N-te Partialsumme einer Reihe, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert; insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen nach oben beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante C mit

$$s_N \leq C - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe folgt hieraus $s_N \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$, d. h. die gegebene Reihe ist tatsächlich divergent.

c) Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, weil die Folge (a_n) nicht monoton ist.

d) Zunächst zum Quotientenkriterium: Für ungerades n gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1-\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Für gerades n dagegen ergibt sich

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1+\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{3}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Es gilt also $\limsup(b_{n+1}/b_n) = \infty > 1$ und $\liminf(b_{n+1}/b_n) = 0 < 1$. Das Quotientenkriterium liefert somit keine Entscheidung.

Das Wurzelkriterium kann dennoch eine Entscheidung bringen, und so ist es in diesem Falle tatsächlich. Für gerades n gilt nämlich

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2},$$

d. h. es gilt $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} \geq \frac{3}{2} > 1$, und dies impliziert die Divergenz der Reihe.

Aufgabe 5 Die Konvergenz der Folge beweisen wir mit Hilfe des Cauchykriteriums. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Voraussetzung

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq q^n \cdot |x_1 - x_0|.$$

Für $m \geq n$ gilt daher die Abschätzung

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - + \cdots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq q^{m-1} \cdot |x_1 - x_0| + \cdots + q^n \cdot |x_1 - x_0| \\ &= q^n(q^{m-n-1} + \cdots + 1) \cdot |x_1 - x_0| \leq q^n \cdot |x_1 - x_0| \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Im Falle $x_0 = x_1$ ist die Folge konstant und konvergiert daher trivialerweise. Sonst können wir wegen $q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ zu jedem vorgegebenen $\epsilon > 0$ ein N finden, so dass

$$q^n \leq \frac{(1-q)\epsilon}{|x_1 - x_0|} \quad \text{für } n \geq N.$$

Das bedeutet aber: Für $m \geq n \geq N$ ist $|x_m - x_n| \leq \epsilon$. Die Folge (x_n) ist also nach dem Cauchykriterium konvergent.

Machen wir in der obigen Abschätzung für $|x_m - x_n|$ den Grenzübergang $m \to \infty$, so folgt die behauptete Abschätzung für $|x - x_n|$.

1) Wir setzen $a_n := \binom{\alpha}{n} z^n$. Für welche $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$? $z = 0$ tut es. Sei nun $z \neq 0$.

Wir berechnen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} \cdot z^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} \cdot z^n} \right| = \left| \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}} z \right|$

$$= \left|(\alpha-n) \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot z\right| = \left|(\alpha-n)\cdot z \cdot \frac{1\cdot 2 \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot n+1}\right|$$

$$= \left|\frac{\alpha-n}{n+1} z\right| = \underbrace{\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|}_{\to 1 \ (n\to\infty)} \cdot |z| \longrightarrow |z| \quad (n \to \infty)$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert $\sum a_n$ für $|z|<1$ und divergiert $\sum a_n$ für $|z|>1$.

2) a.) Wir setzen $b_k := c_{2k+1}$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Damit gilt $b_k = 0 + c_{2k+1} = c_{2k} + c_{2k+1}$

Wir zeigen zuerst, dass gilt:

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^{2k}$ konvergiert $\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ konvergiert.

Setze $s_n := \sum_{k=0}^{n-1} b_k (z-z_0)^{2k+1}$ und $t_n := \sum_{k=0}^{n} c_k (z-z_0)^k$ (Partialsummen)

es gilt $s_n = t_{2n} = t_{2n-1}$

Mit VI: IV: $s_n = t_{2n} = t_{2n-1}$; IA: $s_0 = 0 = c_0 = \sum_{k=0}^{-1} * \checkmark$

IS $(n \to n+1)$: $s_{n+1} = s_n + b_n (z-z_0)^{2n} = s_n + c_{2n+1}(z-z_0)^{2n+1}$

$\overset{IV}{=} t_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} c_k (z-z_0)^k + c_{2n+1}(z-z_0)^{2n+1}$

$= \sum_{k=0}^{2n+1} c_k (z-z_0)^k = t_{2n+1} = t_{2(n+1)-1} \checkmark$

$\overset{c_{2n+2}=0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \quad " \quad = t_{2n+2} = t_{2(n+1)} \checkmark$

Konvegiert (s_n) gegen ein s, dann gilt $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N : |s_n - s| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ und N wie eben

$\rightarrow \forall n > 2N : \quad \left[\frac{n+1}{2}\right] \geq N$ und $|t_n - s| = |s_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} - s| < \varepsilon$,

also $t_n \rightarrow s$.

Konvegiert (t_n) gegen ein s, dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N : |t_n - s| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ und N wie eben

$\longrightarrow \forall n > N : \quad |s_n - s| = |t_{2n} - s| \overset{2n \geq N}{<} \varepsilon$, also $s_n \rightarrow t$.

Bleibt zu zeigen: (s_n) Konvegiert für $|z - z_0| < \sqrt{c}$
(s_n) div. " " $>$ "

1. Fall $z = z_0$ ✓
2. Fall $z \neq z_0$, also $|z - z_0| \neq 0$:

Quotientenkriterium $\left(s_n = \sum b_k (z - z_0)^{2k}\right)$

$$\left| \frac{b_{k+1} (z - z_0)^{2(k+1)}}{b_k (z - z_0)^{2k}} \right| = \left| \frac{c_{2k+3} \cdot (z - z_0)^2}{c_{2k+1}} \right| = \underbrace{|z - z_0|^2}_{\text{konstant}} \cdot \left| \frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}} \right|$$

Für $c = 0$ geht dies gegen $+\infty$

Für $c \neq 0$ konvegiert dies gegen $|z - z_0|^2 \cdot \frac{1}{c} \begin{cases} > 1 & \text{für } |z - z_0| > \sqrt{c} \\ < 1 & \text{" " } < \text{"} \end{cases}$

Also konvegiert (s_n), und damit (t_n), also auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

für $|z - z_0| < \sqrt{c}$

und es divegiert " " $>$ ".

---

b) Setzen wir, für festes $z \in \mathbb{C}$: $d_k := c_{k+1} \cdot (z - z_0)$, so konvegiert $\sum d_k (z - z_0)^k$ genau dann, wenn $\sum c_k (z - z_0)^k$ konvegiert

$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{d_{2k+1}}{d_{2k+3}} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{c_{2k}}{c_{2k+2}} \right|$ Damit folgt die Beh. aus Teil a)

6.) $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ Klar: $|a_n| \longrightarrow 0$ monoton.

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert daher $\sum (-1)^n |a_n| = \sum a_n$.

Nun berechnen wir das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_n$

mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \, a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \; \sqrt{k+1}}$$

NR: Für $a,b>0$ gilt: $0 \leq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \rightarrow \sqrt{a}\sqrt{b} \leq \frac{1}{2}(a+b)$

damit: $|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \; \sqrt{k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2}(n-k+1+k+1)}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2n}{n+2} \longrightarrow 2 \quad (n \to \infty)$$

Folglich ist (c_n) keine Nullfolge, also $\sum c_n$ divergent

7.) 1. Fall: $L \neq 0$

Nach dem Quotientenkriterium gilt:

$\sum a_n z^n$ konvergiert für $|z| < \frac{1}{L}$

Wir setzen $L_s := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ (Konvergiert) $|z| < \frac{1}{L_s}$

Nach dem Wurzelkriterium divergiert $\sum a_n z^n$ für $|z| > \frac{1}{L_s}$.

Folglich muss gelten $L_s = L$

(sonst ex. z: $L_s < |z| < L$ oder $L < |z| < L_s$ $\longrightarrow$ $\sum a_n z^n$ konv. und div. ⚡)

Nun betrachten wir $b_n := \frac{1}{a_n}$. Klar: $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \longrightarrow \frac{1}{L}$

Damit gilt $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{L}$, also

$$\liminf \sqrt[n]{|a_n|} = \liminf \frac{1}{\sqrt[n]{|b_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}} = \frac{1}{\frac{1}{L}} = L$$

Zusammen haben wir $\liminf \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = L$

Also $\sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow L$

---

2. Fall $L = 0$:

$\sum a_n z^n$ divergiert nach dem Quot.-krit. für $z \neq 0$.

wie oben folgt $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = L$

also gilt $0 \leq \liminf \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq 0$

Damit $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0 = L$.