Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Muzzulini

WS 2007/2008

7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T) Zeigen Sie, dass

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

bijektiv ist.

Aufgabe 2 (Ü) Untersuchen Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$$

und

$$w : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ w(x) = \sqrt{x}$$

auf Stetigkeit.

Aufgabe 3 (T) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b, & x \leq 1, \\ c - x, & x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig ist und zudem $f(0) = f(2) = 0$ gilt.

Aufgabe 4 (T) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wo ist diese Funktion stetig?

Aufgabe 5 (Ü) Betrachten Sie die Funktion f, die gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \quad x \in [0, 2].$$

a) Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: Ist eine Funktion $g : [a, b] \to [a, b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $g(x_0) = x_0$.

b) Wenden Sie **a)** auf f an, um zu zeigen, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.

c) Jetzt sei ein $x_0 \in [0, 2]$ gegeben und die Folge (x_n) wird rekursiv definiert durch $x_{n+1} := f(x_n)$. Konvergiert diese Folge?

— bitte wenden —

Aufgabe 6 (T) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist $p(x) = a_{13}x^{13} + a_{12}x^{12} + \cdots + a_1x + a_0$, wobei $a_0, \ldots, a_{13} \in \mathbb{R}$, $a_{13} \neq 0$, so hat die Gleichung $p(x) = 13$ mindestens eine Lösung.

b) Gilt für die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Wenn die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

Aufgabe 7 (Ü) Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen in den angegebenen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Dabei heißt eine punktweise konvergente Funktionenfolge (f_n) mit Grenzfunktion f gleichmäßig konvergent, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0.$$

Hinweis: Im Falle gleichmäßiger Konvergenz gilt: sind alle f_n stetig, dann auch f.

a) $f_n(x) = \dfrac{x + nx^2 + nx}{1 + nx}$ auf $I_1 = [0, \infty)$ bzw. auf $I_2 = [a, \infty)$ mit einem $a > 0$

b) $f_n(x) = (1 - x)^n$ auf $I_1 = [0, 1]$ bzw. auf $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$

c) $f_n(x) = nx(1 - x)^n$ auf $I = [0, 1]$

Aufgabe 8 (Ü) Ersetzen Sie die „?” in der folgenden Aussage durch Ausdrücke, die ε, x_0, y_0 beinhalten können, so dass die Folgerung richtig wird:

Aus $y_0 \neq 0$ und $|y - y_0| <?$ und $|x - x_0| <?$ folgt

$$y \neq 0 \quad \text{und} \quad |\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}| < \varepsilon.$$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.