Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Muzzulini

WS 2007/2008

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen in den jeweiligen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$ auf $I = [0,1]$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ auf $I = \mathbb{R}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(1+x+x^2)}$ auf $I = \mathbb{R}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ auf $I = (-1,1]$

Aufgabe 2 (T) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!(2n)!}{44^{n-1}(3n)!} z^n$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^{4k-1}(6+(-1)^k)^{3k}}$

Aufgabe 3 (T) Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z-2i)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) z^n$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n \cos\frac{1}{n})} x^{2n}$

Aufgabe 4 (Ü) Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) := x^2 + 2x - 3$. Berechnen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $1/f$ darstellt. Bestimmen Sie den Konvergenzradius.

— bitte wenden —

Aufgabe 5 (T) Die Folge (a_n) der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch

$$a_0 := 1, \qquad a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Zeigen Sie: Für den Konvergenzradius r von $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt $r \geq \frac{1}{2}$.

b) Die Potenzreihe stellt also auf $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ eine Funktion f dar. Zeigen Sie:

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1\,.$$

c) Folgern Sie: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{x-x_2} - \dfrac{1}{x-x_1}\right)$ mit gewissen Zahlen x_1 und x_2.

d) Gewinnen Sie daraus eine Potenzreihenentwicklung von f und leiten Sie dann eine (nicht rekursive) Formel für a_n ab.

Aufgabe 6 (Ü) Eine einfache Aufgabe zum Schluss: Sei $G \subset \mathbb{C}$, und

$$F := \{f : G \to \mathbb{C} : \exists k \in \mathbb{R} : \forall z \in G : |f(z)| \leq k\},$$

die Menge aller komplexwertigen beschränkten Funktionen auf G. Auf der Menge F definieren wir die Supremumsnorm wie folgt:

$$||f||_\infty := sup\{|f(z)| : z \in G\}.$$

Zeigen Sie, dass $||\cdot||_\infty$ eine Norm ist, d.h. dass die Normaxiome erfüllt sind, also dass für alle $f, g \in F$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Definitheit:} \quad & ||f||_\infty > 0 \;\longleftrightarrow\; f \neq 0, \\ \text{Homogenität:} \quad & ||\lambda f||_\infty = |\lambda|\; ||f||_\infty, \\ \text{Dreiecksungleichung:} \quad & ||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty. \end{aligned}$$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

— bitte wenden —