Aufgabe 2 **a)** Es bezeichne a_n den zu z^n gehörenden Koeffizienten. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} &= \frac{3^n n!(2n)!}{44^{n-1}(3n)!}\cdot\frac{44^n(3n+3)!}{3^{n+1}(n+1)!(2n+2)!} = \frac{44(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{3(n+1)(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{44(3+3/n)(3+2/n)(3+1/n)}{3(1+1/n)(2+2/n)(2+1/n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{44\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 1\cdot 2\cdot 2} = \frac{44\cdot 9}{4} = 99\,.\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist also 99.

b) Wieder bezeichne a_k den Koeffizienten von x^k. Dann folgt

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2^{4-1/k}(6+(-1)^k)^3} = \begin{cases} \frac{1}{2^{4-1/k}(6+1)^3} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2^4\cdot 7^3} = \frac{1}{5488}, & k \text{ gerade},\\ \frac{1}{2^{4-1/k}(6-1)^3} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2^4\cdot 5^3} = \frac{1}{2000}, & k \text{ ungerade}.\end{cases}$$

Als Konvergenzradius ergibt sich also $r = (\limsup \sqrt[k]{|a_k|}\,)^{-1} = (\frac{1}{2000})^{-1} = 2000$.

Aufgabe 3 **a)** Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2}\cdot\frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1\,.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x=-1$ und $x=1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}\,.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}\,.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geq 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1,1)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞, d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe hat also den Konvergenzradius $1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

d) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{|2^k z^{k^2}|} = 2|z|^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1,\\ \infty, & |z| > 1.\end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^k z^{k^2}| = 2^k$. Die Reihe konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

e) Wieder wenden wir direkt das Wurzelkriterium an: Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|e^{n(1+(-1)^n \cos\frac{1}{n})} x^{2n}\right|} = \begin{cases} e^{1+\cos\frac{1}{n}} x^2 \xrightarrow{n\to\infty} e^{1+1} x^2 = e^2 x^2, & n \text{ gerade}, \\ e^{1-\cos\frac{1}{n}} x^2 \xrightarrow{n\to\infty} e^{1-1} x^2 = x^2, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Also: $\limsup \sqrt[n]{|a_n x^{2n}|} = e^2 x^2$. Die Reihe konvergiert für $e^2x^2 < 1$ und divergiert für $e^2x^2 > 1$, d. h. der Konvergenzradius ist e^{-1}. An den Randpunkten ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n \cos\frac{1}{n})} e^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n((-1)^n \cos\frac{1}{n} - 1)} .$$

Diese Reihe ist divergent, da die Reihenglieder nicht gegen 0 streben: Für gerades n gilt nämlich wegen der Reihendarstellung von $\cos x$

$$e^{n((-1)^n \cos\frac{1}{n}-1)} = e^{n(\cos\frac{1}{n}-1)} = e^{n(-\frac{1}{2!}(\frac{1}{n})^2 + \frac{1}{4!}(\frac{1}{n})^4 - + \cdots)} = e^{-\frac{1}{2!}(\frac{1}{n})^1 + \frac{1}{4!}(\frac{1}{n})^3 - + \cdots} \xrightarrow{n\to\infty} e^0 = 1 .$$

Aufgabe 5 **a)** Es gilt $a_n \le 2^n$, wie man mit vollständiger Induktion sieht:

Induktionsanfang: Die Behauptung ist für $n = 0$ und $n = 1$ richtig.

Induktionsschluss: Ist die Behauptung für $n-1$ und n bewiesen (wobei $n \ge 1$), so folgt

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \le 2^n + 2^{n-1} \le 2^n + 2^n = 2^{n+1} .$$

Folglich ergibt sich $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \le 2$ und damit gilt für den Konvergenzradius r der zu betrachtenden Potenzreihe $r = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\,)^{-1} \ge \frac{1}{2}$.

b) Für $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) - x^2 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) x^n = a_0 + (a_1 - a_0)x = 1 . \end{aligned}$$

c) Aus **b)** wissen wir

$$(1 - x - x^2) f(x) = 1, \qquad \text{also} \qquad f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} .$$

Nun hat $x^2 + x - 1$ die Nullstellen $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 + 1} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}\,)$ und es gilt

$$\frac{1}{x - x_2} - \frac{1}{x - x_1} = \frac{x - x_1 - (x - x_2)}{(x - x_2)(x - x_1)} = \frac{x_2 - x_1}{x^2 + x - 1} = \frac{-\sqrt{5}}{x^2 + x - 1} = \sqrt{5} \cdot f(x)$$

Mit diesen Zahlen x_1 und x_2 hat man also die behauptete Darstellung.

d) Allgemein gilt

$$\frac{1}{x-x_0} = -\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{1-x/x_0} = -\frac{1}{x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_0}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{x_0^{n+1}}\,.$$

Aus **c)** ergibt sich somit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{x_1^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{x_2^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}}\right)x^n\,.$$

Wegen

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}\,)} = \frac{2(-1-\sqrt{5}\,)}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

liefert dann der Identitätssatz für Potenzreihen

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Aufgabe 1 **a)** Für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$\left|\frac{nx^2}{n^3+x^3}\right| = \frac{nx^2}{n^3+x^3} \le \frac{n}{n^3+x^3} \le \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}\,.$$

Da die Reihe über $1/n^2$ konvergiert, können wir das Majorantenkriterium anwenden: Die Funktionenreihe konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise) auf $[0,1]$.

b) Setzt man $x = 0$ ein, so hat die Reihe den Wert 0. Für $x \neq 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k = x^2\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = x^2\frac{1+x^2}{1+x^2-1} = 1+x^2\,.$$

Die Funktionenreihe konvergiert somit punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1+x^2, & x \neq 0. \end{cases}$$

Da diese Funktion an der Stelle $x = 0$ unstetig ist, die durch die Partialsummen der Reihe dargestellten Funktionen aber offensichtlich auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein. (Denn sonst würde sich die Stetigkeit übertragen.)

c) Wegen $1+x+x^2 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ gilt $1+x+x^2 \ge \frac{3}{4}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist

$$|e^{-n(1+x+x^2)}| = e^{-n(1+x+x^2)} \le e^{-3n/4}\,.$$

Da die Reihe über $e^{-3n/4}$ konvergiert (geometrische Reihe), liefert das Majorantenkriterium wieder gleichmäßige und damit auch punktweise Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$.

d) Setzt man $x = 1$ ein, so ergibt sich der Wert 0. Für $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1-x)x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x(1-x)\cdot\frac{1}{1-x} = x\,.$$

Die Funktionenreihe konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ x, & x \in (-1,1) \end{cases}$$

Da diese Funktion, im Gegensaz zu den Partialsummenfunktionen, in $x = 1$ nicht stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Zusätzliche Bemerkung: Auch auf $(-1, 1)$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor, denn es gilt

$$\left|\sum_{n=1}^{N} x^n(1-x) - x\right| = \left|(1-x)x\sum_{n=0}^{N-1} x^n - x\right| = \left|(1-x)x\frac{1-x^N}{1-x} - x\right| = |x^{N+1}|\,,$$

und offenbar ist $\sup\{\,|x^{N+1}| : x \in (-1,1)\,\} = 1$.

Aufgabe 4 Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n, \quad \text{also} \quad 1 = (x^2+2x-3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n\,.$$

Nun gilt wegen $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

$$\begin{aligned}(x^2+2x-3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^{n+2} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n \\ &= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2} - 4a_n)(x+1)^n\,.\end{aligned}$$

Diese Potenzreihe soll den Wert 1 haben; wegen des Identitätssatzes für Potenzreihen liefert dies die Gleichungen

$$-4a_0 = 1, \quad -4a_1 = 0, \quad a_{n-2} - 4a_n = 0 \quad (n \geq 2)\,.$$

Es folgt: $a_0 = -\frac{1}{4}$, $a_1 = 0$ und $a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}$ für $n \geq 2$. Vollständige Induktion liefert: $a_{2k+1} = 0$ und $a_{2k} = -(\frac{1}{4})^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Wegen $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = (\frac{1}{4})^{(1+1/k)/2} \xrightarrow{k\to\infty} (\frac{1}{4})^{1/2} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = 0$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $r = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\,)^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$.

6.) <u>Definitheit</u>: Für $f=0$ ist $|f(z)|=0$ für jedes $z\in G$,
also $\|f\|_\infty = 0$

Für $f\neq 0$ gibt es ein $z_0\in G$: $|f(z_0)|\neq 0$, also
$\sup\{|f(z)| : z\in G\} \geq |f(z_0)| > 0$, d.h. $\|f\|_\infty \neq 0$.

<u>Homogenität</u>: $|\lambda f(z)| = |\lambda|\,|f(z)|$ daher gilt:

$\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(z)| : z\in G\} = \sup\{|\lambda|\cdot|f(z)| : z\in G\} = \sup |\lambda| \{|f(z)| : z\in G\}$
$= |\lambda| \cdot \sup\{|f(z)| : z\in G\} = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

<u>Dreiecksungleichung</u>: Für

$$\|f+g\|_\infty = \sup\{\underbrace{|f(z)+g(z)|}_{\leq |f(z)|+|g(z)|} : z\in G\} \leq \sup\{\underbrace{|f(z)|}_{\leq \|f\|_\infty} + \underbrace{|g(z)|}_{\leq \|g\|_\infty} : z\in G\}$$

$$\leq \sup\{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty : z\in G\} = \sup\{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$