Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Muzzulini

WS 2007/2008

9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü) Die hyperbolischen Funktionen Sinus Hyperbolicus, Kosinus Hyperbolicus, Tangens Hyperbolicus und Kotangens Hyperbolicus sind wie folgt definiert:

$$\sinh(z) = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \qquad \cosh(z) = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

$$\tanh(z) = \tfrac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \qquad \coth(z) = \tfrac{1}{\tanh(z)}$$

a) Welche dieser Funktionen sind gerade (d.h. $f(-z) = f(z)$), welche sind ungerade (d.h. $f(-z) = -f(z)$)?

b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $\sinh(z)$ und $\cosh(z)$ um $z_0 = 0$ und berechnen Sie die Konvergenzradien.

c) Weisen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ nach:

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1,$$

$$\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w),$$
$$\sinh(z + w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w).$$

Nun schränken wir die hyperbolischen Funktionen auf die reellen Zahlen ein.

d) Untersuchen Sie $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ auf Periodizität, Nullstellen, Monotonie und asymptodisches Verhalten ($x \to \pm\infty$).

e) Finden Sie für die Umkehrfunktionen von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ explizite Darstellungen auf den jeweiligen Definitionsbereichen.

f) Drücken Sie $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ aus.

Aufgabe 2 (T) Welche Funktionen werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+i)^{2n+2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^{4n}}{(2n)!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2^{2n+1}(2n+1)!} z^{2n}$

Hinweis: Formen Sie die Potenzreihen um und/oder zerlegen sie diese in mehrere Reihen, so dass Potenzreihen entstehen, von denen bekannt ist, welche Funktion sie darstellen.

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (T) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{x^2} - \cos x}{\tan x^2}$ $(a > 0)$

Aufgabe 4 (Ü) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$ **b)** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^x - e^a}{x - a}$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sinh(x) - \sinh(a)}{x - a}$

Hinweis: **a)**: Polynomdivision, für **b)** und **c)** können sie **a)**, bzw. **b)** gebrauchen.

Aufgabe 5 (Ü) **a)** Bestimmen Sie alle $x > 0$, für die $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ gilt.

b) Zeigen Sie: Die Ungleichung $|\sin(ax)| \leq a|\sin x|$ gilt für alle $a \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Gilt sie sogar für alle $a > 0$?

Aufgabe 6 (T) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle x_0 bzw. z_0. Wie groß ist der Konvergenzradius?

a) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \frac{\pi}{4}$

b) $f(z) = \dfrac{1 - z}{1 - z - 2z^2}, \quad z_0 = 2$

c) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0$

Hinweis: Benutzen Sie in **a)** und in **c)** Additionstheoreme.
Formen sie den Bruch in **b)** um zu einer Summe von zwei einfacheren Brüchen.

Aufgabe W (Ü) Der Weihnachtsmann stellt vor jedes Haus in der Hunderthäuserstrasse ein rotes Paket ab. Dann findet er es etwas langweilig, weshalb er sogleich bei jedem zweiten Haus das rote durch ein weisses Paket austauscht. Noch immer nicht zufrieden geht er erneut durch die Straße und tauscht bei jedem dritten Haus weisse Pakete durch rote und rote Pakete durch weisse. Dann bei jedem vierten, fünften,. . . , bis er schließlich noch beim hundertsten Haus das Paket ein letztes mal tauscht.

Als er anschließend in die Viertausendhäuserstrasse einbiegt, greift der Weihnachtsmann zum Handy und ruft Sie an. Er will wissen, vor welche Häuser er denn weisse, vor welche er rote Pakete legen muss, um das selbe Ergebniss zu erhalten, ohne den unheimlichen Aufwand betreiben zu müssen.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.