Aufgabe 2 **a)** Die Reihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n .$$

Die erste Reihe ergibt $e^z - 1$, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 0 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{2(e^z - 1 - z)}{z} .$$

Insgesamt folgt: Die Potenzreihe stellt eine Funktion f dar, die gegeben ist durch

$$f(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f(z) = e^z - 1 - \frac{2(e^z - 1 - z)}{z} = \frac{(z-2)e^z + z + 2}{z} \quad (z \neq 0) .$$

b) Hier ergibt sich wegen der Potenzreihenentwicklung der Sinus-Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+i)^{2n+2} = (z+i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+i)^{2n+1} = (z+i)\sin(z+i) .$$

c) Wir erhalten $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^{4n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((z-3)^2)^{2n}}{(2n)!} = \cosh((z-3)^2) .$

d) Hier müssen wir wieder etwas länger umformen:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2^{2n+1}(2n+1)!} z^{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+\frac{1}{2}}{(2n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)-\frac{1}{2}}{(2n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\end{aligned}$$

Die erste Reihe ergibt $\cosh(\frac{1}{2}z) - 1$, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 0 und sonst

$$\frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1} = z^{-1}\big(\sinh(\tfrac{1}{2}z) - \tfrac{1}{2}z\big) = z^{-1}\sinh(\tfrac{1}{2}z) - \tfrac{1}{2} .$$

Die Potenzreihe stellt also eine Funktion f dar, die gegeben ist durch

$$f(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f(z) = \cosh(\tfrac{1}{2}z) - z^{-1}\sinh(\tfrac{1}{2}z) - \tfrac{1}{2} \quad (z \neq 0) .$$

Aufgabe 3 **a)** Wir verwenden die Potenzreihen der vorkommenden Funktionen.

$$\frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)} = \frac{(x + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots) - (x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots)}{x((1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots) - 1)} = \frac{\frac{2}{3!}x^3 + \cdots}{\frac{1}{2!}x^3 + \ldots} \xrightarrow{x \to 0} \frac{2 \cdot 2!}{3!} = \frac{2}{3} .$$

(Beim Grenzübergang kürzt man mit x^3 und verwendet die Stetigkeit von Potenzreihen.)

b) Auch hier kommen wieder Potenzreihen zum Einsatz:

$$\begin{aligned}\frac{a^{x^2} - \cos x}{\tan x^2} &= \frac{(\cos x^2)(e^{x^2 \ln a} - \cos x)}{\sin x^2} \\ &= \frac{(\cos x^2)\big((1 + (x^2 \ln a) + \frac{1}{2!}(x^2 \ln a)^2 + \cdots) - (1 - \frac{1}{2!}x^2 + - \cdots)\big)}{x^2 - \frac{1}{3!}(x^2)^3 + - \cdots} \\ &= \frac{(\cos x^2)(x^2(\ln a + \frac{1}{2}) + \cdots)}{x^2 - \frac{1}{3!}(x^2)^3 + - \cdots} \xrightarrow{x \to 0} \ln a + \tfrac{1}{2} .\end{aligned}$$

Aufgabe 4 **a)** Polynomdivision ergibt

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-1} \xrightarrow{x \to a} na^{n-1} \ (x \to a).$$

b) Mit $e^x - e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x^n - a^n)$ und Teil **a)** ergibt sich

$$\frac{e^x - e^a}{x - a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{x^n - a^n}{x - a} \xrightarrow{x \to a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} na^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} a^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n = e^a$$

Begründung für die Vertauschung von Summand und Limes: Für $|x| < |a+1|$ gilt

$$\Big| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{x^n - a^n}{x - a} \Big| = \Big| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-1} \Big| \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n}{n!} (|a|+1)^n \xrightarrow{m \to \infty} 0.$$

$$\Big| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} na^{n-1} \Big| \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} n|a|^{n-1} \xrightarrow{m \to \infty} 0.$$

Damit kann man, für belibiges $\varepsilon > 0$, erst die Summenreste mit $\varepsilon/2 > 0$ abschätzen (unabhängig von $x \in (a-1, a+1)$) und anschließend die Differenz der endlichen Summe mit $x \to a$ und erneut $\varepsilon/2 > 0$ abschätzen.

c) Mit Teil **b)** ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(x) - \sinh(a)}{x - a} &= \frac{1}{2} \frac{e^x - e^{-x} - (e^a - e^{-a})}{x - a} \\ &= \frac{1}{2} \Big(\frac{e^x - e^a}{x - a} + \frac{(e^{-x} - e^{-a})}{(-x) - (-a)} \Big) \xrightarrow{x \to a} \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) = \cosh(a) \end{aligned}$$

Aufgabe 5 **a)** Äquivalent zu der gegebenen Gleichung ist

$$\ln(x^{\sqrt{x}}) = \ln(\sqrt{x}\,)^x, \qquad \text{also} \qquad \sqrt{x} \ln x = x \ln \sqrt{x}, \qquad \text{d. h.} \qquad \sqrt{x} \ln x = \tfrac{1}{2} x \ln x\,.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $\ln x = 0$ (also $x = 1$), oder wenn $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$. Letzteres bedeutet $x = \frac{1}{4}x^2$ und damit $x(1 - \frac{1}{4}x) = 0$, also $x = 4$. (Man beachte $x > 0$.) Es gibt somit genau zwei Lösungen: $x = 1$ oder $x = 4$.

b) Wir zeigen die Behauptung mittels vollständiger Induktion. Für $a = 1$ ist die Abschätzung trivial, der Induktionsanfang ist also gemacht. Nun sei die Behauptung für ein gewisses $a \in \mathbb{N}$ bewiesen. Dann folgt wegen des Additionstheorems

$$\begin{aligned} |\sin((a+1)x)| &= |\sin(ax)\cos(x) + \cos(ax)\sin(x)| \leq |\sin(ax)| \cdot |\cos x| + |\cos(ax)| \cdot |\sin x| \\ &\leq |\sin(ax)| + |\sin x| \leq a|\sin x| + |\sin x| = (a+1)|\sin x|\,. \end{aligned}$$

Für beliebiges $a > 0$ gilt die Behauptung jedoch nicht. So wird etwa die Abschätzung

$$|\sin(\tfrac{1}{2}x)| \leq \tfrac{1}{2}|\sin x|$$

für $x = \pi$ falsch, denn dann ergibt sich links 1, rechts jedoch 0.

Aufgabe 6 **a)** Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um den Punkt 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(\tfrac{\pi}{4} + z - \tfrac{\pi}{4}) = \sin(\tfrac{\pi}{4})\cos(z - \tfrac{\pi}{4}) + \cos(\tfrac{\pi}{4})\sin(z - \tfrac{\pi}{4}) \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(z - \tfrac{\pi}{4})^{2k} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z - \tfrac{\pi}{4})^{2k+1} \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \frac{\pi}{4})^n$ gilt also:

$$a_{2k} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

b) Es gilt $1 - z - 2z^2 = (1+z)(1-2z)$. Daher machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a(1-2z) + b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a + b + (-2a+b)z}{1-z-2z^2}\,,$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a + b = 1$ und $-2a + b = -1$. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z} = \frac{2/9}{1+(z-2)/3} + \frac{-1/9}{1+2(z-2)/3} \\ &= \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n \end{aligned}$$

für $\frac{1}{3}|z-2| < 1$ und $\frac{2}{3}|z-1| < 1$. Für die Koeffizienten in $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ ergibt sich also $a_n = \frac{2}{9}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{9}(-\frac{2}{3})^n = (-\frac{1}{3})^{n+2}(2 - 2^n)$. Der Konvergenzradius ist $\frac{3}{2}$.

c) $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$, also

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k} = 1 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}4^k x^{2k}\,.$$

Für $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt also $a_0 = 1$, $a_{2k-1} = 0$ und $a_{2k} = \frac{1}{2}(-1)^k 4^k/(2k)!$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Der Konvergenzradius ist offenbar ∞.

Aufgabe W Hierfür gibt es nur eine Lösung in der Übung, oder vielleicht beim Weihnachtsmann.

1.) a.) $\sinh(-z) = \frac{1}{2}(e^{-z} - e^{+z}) = -\frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) = -\sinh(z)$ (ungerade)

$\cosh(-z) = \frac{1}{2}(e^{-z} - e^{z}) = \cosh(z)$ (gerade)

$\tanh(-z) = \frac{\sinh(-z)}{\cosh(-z)} = \frac{-\sinh(z)}{\cosh(z)} = -\tanh(z)$ (ungerade)

$\coth(-z) = \frac{1}{\tanh(-z)} = \frac{1}{-\tanh(z)} = -\coth(z)$ (ungerade)

b.) $e^{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$, $e^{-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1^k}{k!}\right) z^k$

Also: $\cosh z = \frac{1}{2}\left(\sum \frac{1}{k!} z^k + \sum \frac{(-1)^k}{k!} z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 + (-1)^k\right)}_{= \begin{cases} 0 & k \text{ ungerade} \\ 2 & k \text{ gerade} \end{cases}}\right) z^k$

$$\underset{=\!=\!=}{\overset{k=2l}{}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \cdot z^{2l}$$

$\sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - (-1)^k\right)}_{= \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ 2 & k \text{ ungerade} \end{cases}} z^k \overset{k=2l+1}{=\!=\!=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} z^{2l+1}$

Der Konvergenzradius von einer Summe zweier Potenzreihen ist mindestens so groß wie das Minimum der KR'en der beiden PR'en, also ∞.

c.) • $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = \left(\frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})\right)^2 =$

$= \frac{1}{4}\left((e^{2z} + 2e^{0} + e^{-2z}) - (e^{2z} - 2e^{0} + e^{-2z})\right) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot e^{0} = 1.$

• $\cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w) = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) \cdot \frac{1}{2}(e^{w} + e^{-w}) + \frac{1}{4}(e^{z} - e^{-z})(e^{w} - e^{-w})$

$= \frac{1}{4}\left(e^{z+w} + e^{-z+w} + e^{z-w} + e^{-z-w} + e^{z+w} - e^{-z+w} - e^{z-w} + e^{-z-w}\right) = \frac{1}{2}(e^{z+w} + e^{-z-w}) = \cosh(z+w)$

• $\sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w) \overset{s.o.}{=} \frac{1}{4}\left(e^{z+w} + e^{z+w} + 0 - e^{-z-w} - e^{-z-w}\right) = \sinh(z+w)$

---

d.) • Wir untersuchen zuerst das asymptotische Verhalten für $x \in \mathbb{R}$, $x \to \pm\infty$:

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \longrightarrow \begin{cases} +\infty & x \to +\infty \quad (e^{x} \to +\infty,\ e^{-x} \to 0) \\ -\infty & x \to -\infty \quad (e^{x} \to 0,\ e^{-x} \to +\infty) \end{cases}$

$\cosh(x) \longrightarrow \infty$ ($x \to \infty$ oder $x \to -\infty$)

· Damit kann weder cosh noch sinh periodisch sein.

· Nullstellen: $\underline{\sinh(x)=0} \Longleftrightarrow e^x-e^{-x}=0 \Longleftrightarrow e^x=e^{-x}$

$\overset{\cdot e^x}{\Longleftrightarrow} e^{2x}=1 \Longleftrightarrow \underline{x=0}$

$\cosh(x) = \frac{1}{2}(\underbrace{e^x}_{>0}+\underbrace{e^{-x}}_{>0})>0$, also hat cosh keine reelle Nullstelle.

· Monotonie: $e^x \nearrow$, $e^{-x} \searrow$, $-e^{-x} \nearrow$ jeweils streng

$\Rightarrow$ · Sinh ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ als Summe streng monoton wachsender Funktionen.

cosh Ψ ist str. mon. $\begin{cases} \nearrow \text{ auf } [0,\infty) \\ \searrow \text{ auf } (-\infty,0] \end{cases}$: Sei $x_2>x_1$

$\underline{\cosh(x_2)-\cosh(x_1)} = \frac{\cosh^2(x_2)-\cosh^2(x_1)}{\cosh(x_2)+\cosh(x_1)}$

$\overset{c)}{=} \frac{1+\sinh^2(x_2)-(1+\sinh^2(x_1))}{\cosh(x_2)+\cosh(x_1)} = \underbrace{\sinh(x_2)+\sinh(x_1)}_{\substack{<0 \text{ für } 0\geq x_2>x_1 \\ >0 \text{ für } 0\leq x_1<x_2}} \underbrace{\frac{\overbrace{\sinh(x_2)-\sinh(x_1)}^{>0}}{\underbrace{\cosh(x_2)-\cosh(x_2)}_{>0}}}_{>0}$

Also $\cosh(x_2)-\cosh(x_1) \begin{cases} <0 & \text{für } x_1<x_2\leq 0 \\ >0 & \text{für } 0\leq x_1<x_2 \end{cases}$.

---

e.) sei $x\in\sinh(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ gesucht $y\in\mathbb{R}$: $\sinh y = x$

$\Longleftrightarrow 2x=e^y-e^{-y} \Longleftrightarrow e^{2y}-2xe^y-1=0 \Longleftrightarrow (e^y)^2-2xe^y-1=0$

$\Longleftrightarrow e^y = x\pm\sqrt{x^2+1}>0 \Longleftrightarrow e^y=x+\sqrt{x^2+1} \Longleftrightarrow y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

Also $y=(\sinh)^{-1}(x) =: \operatorname{ar}\sinh(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

Sei $x\in\cosh(\mathbb{R})=[1,\infty)$ gesucht $y\in[0,\infty)$: $\cosh y = x$

$\overset{s.o.}{\Longleftrightarrow} (e^y)^2-2xe^y+1=0 \Longleftrightarrow e^y = x\pm\sqrt{x^2-1}>0 \Longleftrightarrow y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

Also $y=\operatorname{ar}\cosh(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, $x>0$

F.) $\cos z = \sum(-1)^\ell \frac{1}{(2\ell)!}z^{2\ell} = \sum\frac{1}{(2\ell)!}(iz)^{2\ell} = \cosh(iz)$; $\sin z = \sum(-1)^\ell\frac{1}{(2\ell+1)!}z^{2\ell+1} = \sum\frac{1}{(2\ell+1)!}(iz)^{2\ell+1}\frac{1}{i}$

$=(-i)\sinh(iz)$