Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Muzzulini

WS 2007/2008

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T) Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Für jedes $\alpha > 0$ gilt: $\ln x = o(x^\alpha)$ für $x \to \infty$

b) $x\sin(x^{-1}) = O(x)$ für $x \to 0$

c) $\sin x = x + o(x^2)$ für $x \to 0$

d) $\sqrt{1+x^2} = x + O(1/x)$ für $x \to \infty$

Hinweis zu a): Verwenden Sie die Definition von x^α und schätzen sie diese ab.
zu c): Potenzreihenentwicklung des Sinus.

Aufgabe 2 (T) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, welche dieser Funktionen an der Stelle 0 stetig sind und welche dort differenzierbar sind.

Aufgabe 3 (Ü) Hier ist unser Ziel, zu zeigen, dass $\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n+l}$ gegen $\ln 2$ konvergiert ($n \to \infty$). Zeigen Sie dazu zuerst mit geeigneten Zerlegungen von $[1,2]$, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n+l} = \int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$

(Das ist nicht schwer! Nehmen Sie für jedes n die einfachste Zerlegung die Ihnen einfällt und setzen Sie die Definition der Untersumme ein.) Nun müssen Sie noch zeigen, dass die rechte Seite gleich $\ln 2$ ist. Zeigen Sie dazu allgemein dass für $a > 1$ gilt

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = \ln a.$$

Hierzu dürfen Sie ohne Beweis folgende Gleichung benutzen: $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$. Dies ist anspruchsvoller. Wählen Sie als Zerlegungspunkte von $[1,a]$ am besten $\xi_k = a^{k/n}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 4 (Ü) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $0 < a < b$. Berechnen Sie mittels Riemannscher Summen

$$\int_a^b x^p dx$$

mit Hilfe der Zerlegungen $Z_n = \{x_k^{(n)} = aq^k : \quad k = 0, 1, \ldots, n\}$ mit $q = (b/a)^{1/n}$ und $\xi_k = x_{k-1}^{(n)}$, $k = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 5 (Ü)

a) Sei $f \in C[0,1]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ und $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_0^1 f(x)\ dx > 0.$$

b) Sei $a < b$ und $f, g \in C[a,b]$ mit $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(x_0) > g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_a^b f(x)\ dx > \int_a^b g(x)\ dx.$$

Aufgabe 6 (T) Untersuchen Sie folgende Ausdrücke auf Konvergenz und berechnen Sie, im Falle der Konvergenz, den Grenzwert.

a) $$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_{a-h}^{a+h} \cos x^2\ dx$$

b) $$\lim_{h \to +\infty} \frac{1}{h} \int_{a+h}^{a+h+1} \cos x^2\ dx$$

c) $$\lim_{h \to +\infty} \frac{1}{h} \int_{a+h}^{a+2h} \ln x\ dx$$

d) $$\lim_{h \to +\infty} \frac{1}{h} \int_{a+h}^{a+2h} \arctan x\ dx$$

e) $$\lim_{h \to +\infty} \int_1^h \frac{1}{x}\ dx$$

f) $$\lim_{h \to 0^+} \int_0^1 h^x \cos x\ dx$$

Hinweis: Mittelwertsatz der Integralrechnung.
Zu e) und f): Benutzen Sie folgendes: für $a < b < c$ und eine auf $[a,c]$ integrierbare Funktion f gilt $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.