Aufgabe 1 **a)** Die Aussage „$\ln x = o(x^\alpha)$ für $x \to \infty$“ bedeutet definitionsgemäß, dass $(\ln x)/x^\alpha \to 0$ für $x \to \infty$ gilt. Für $x > 1$ ergibt sich

$$0 < \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln x}{e^{\alpha \ln x}} = \frac{\ln x}{1 + \alpha \ln x + \frac{1}{2!}(\alpha \ln x)^2 + \cdots} \le \frac{\ln x}{\frac{1}{2!}(\alpha \ln x)^2} = \frac{2}{\alpha^2 \ln x} \xrightarrow{x\to\infty} 0\,.$$

b) Die Aussage ist äquivalent dazu, dass $x \sin(x^{-1})/x$ für $x \to 0$ beschränkt ist. Dies ist wegen $|\sin(x^{-1})| \le 1$ offensichtlich richtig.

c) Diese Aussage bedeutet $\sin x - x = o(x^2)$ für $x \to 0$ und dies stimmt wegen

$$\frac{\sin x - x}{x^2} = \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots) - x}{x^2} = \frac{-\frac{1}{3!}x^3 + - \cdots}{x^2} = -\frac{1}{3!}x^1 + - \cdots \xrightarrow{x\to 0} 0\,.$$

d) Dies ist äquivalent zu $\sqrt{1+x^2} - x = O(1/x)$ für $x \to \infty$, und dies trifft zu, denn

$$\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{1/x}\right| = \left|x\big(\sqrt{1+x^2}-x\big)\right| = \left|\frac{x(1+x^2-x^2)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x}\right| \le \left|\frac{x}{x}\right| = 1\,.$$

Aufgabe 2 Alle Funktionen f_n sind stetig an der Stelle 0, denn für $x \ne 0$ gilt

$$|f_n(x)| = |x^n \sin(x^{-1})| \le x^n$$

und damit folgt $f_n(x) \xrightarrow{x\to 0} 0 = f(0)$.
Die Funktion f_n ist differenzierbar in 0, wenn

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n \sin(x^{-1}) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1} \sin(x^{-1})$$

existiert. Für $n \ge 2$ existiert dieser Grenzwert (es handelt sich dann um $\lim_{x\to 0} f_{n-1}(x)$), für $n = 1$ jedoch nicht: Für die Folge $x_k = (\frac{\pi}{2} + k\pi)^{-1}$ gilt nämlich $x_k \to 0$, aber

$$\frac{f_1(x_k) - f_1(0)}{x_k - 0} = \sin(x_k^{-1}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$$

konvergiert nicht.

Aufgabe 6 **a)** Für $h > 0$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi_h \in [a-h, a+h]$, so dass gilt

$$\int_{a-h}^{a+h} \cos x^2 \; dx = ((a+h) - (a-h)) \cos \xi_h^2 = 2h \cos \xi_h^2.$$

Damit ist $\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h} \cos x^2 \; dx = 2\cos\xi_h^2$. Für $h \to 0$ konvergiert ξ_h gegen a. Damit konvergiert $\cos \xi_h^2$ gegen $\cos a^2$. Zusammen folgt

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_{a-h}^{a+h} \cos x^2 \; dx = 2\cos a^2.$$

b) Für $h > 0$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi_h \in [a+h, a+h+1]$, so dass gilt

$$\int_{a+h}^{a+h+1} \cos x^2 \; dx = ((a+h+1) - (a+h)) \cos \xi_h^2 = \cos \xi_h^2.$$

Damit ist $\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+h+1} \cos x^2 \; dx = \frac{1}{h}\cos \xi_h^2$. Nun ist $\cos \xi_h^2 \in [-1,1]$ für jeden Wert von ξ_h, folglich gilt

$$\lim_{h\to+\infty} \frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+h+1} \cos x^2 \; dx = 0.$$

c) Für $h > 0$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi_h \in [a+h, a+2h]$, so dass gilt

$$\int_{a+h}^{a+2h} \ln x \; dx = ((a+2h)-(a+h)) \ln \xi_h = h \ln \xi_h.$$

Damit ist $\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h} \ln x \; dx = \ln \xi_h$. Mit $h \to +\infty$ geht auch ξ_h gegen $+\infty$. Damit geht $\ln \xi_h$ gegen $+\infty$. Damit konvergiert der Ausdruck nicht.

d) Für $h > 0$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi_h \in [a+h, a+2h]$, so dass gilt

$$\int_{a+h}^{a+2h} \arctan x \; dx = ((a+2h)-(a+h)) \arctan \xi_h = h \arctan \xi_h.$$

Damit ist $\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h} \arctan x \; dx = \arctan \xi_h$. Mit $h \to +\infty$ geht auch ξ_h gegen $+\infty$. Damit konvergiert $\arctan \xi_h$ gegen $\pi/2$. Zusammen folgt

$$\lim_{h\to+\infty} \frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h} \arctan x \; dx = \frac{\pi}{2}.$$

e) Wir zeigen dass der Grenzwert nicht existiert. Wir wählen dafür ganzzahlige Werte von h, also $h \in \mathbb{N}$ und zerlegen das Intervall $[1, h]$ in die $h-1$ Intervalle $[n, n+1]$ für $n = 1, 2, \ldots, h-1$. Jedes dieser Intervalle hat die Länge 1.
Nach dem Mittelwertsatz für Integralrechnung existiert für jedes dieser Intervalle ein $\xi_n \in [n, n+1]$, so dass $\int_n^{n+1} 1/x \; dx = 1/\xi_n \geq 1/n+1$. Damit gilt

$$\int_1^h \frac{1}{x} \; dx = \sum_{n=1}^{h-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \; dx \geq \sum_{n=1}^{h-1} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{h} \frac{1}{n}.$$

Diese Summe divergiert gegen $+\infty$ für $h \to +\infty$. Damit divergiert auch das Integral.

f) Wir zeigen, dass der Grenzwert 0 ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$.
Wir müssen das Intervall in zwei Teile teilen, so dass wir bei beiden Teilen das Integral durch $\varepsilon/2$ abschätzen können.
Das erste Intervall soll daher die Länge $\varepsilon/2$ haben. Mit dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in [0, \varepsilon/2]$, so dass

$$\Big|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x \cos x \; dx\Big| = \big|\frac{\varepsilon}{2}\big| \; |h^\xi| \; |\cos \xi| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$ gilt $\xi \geq \varepsilon/2$. Sei nun $h > 0$ so klein, dass $h^{\varepsilon/2} < \varepsilon/2$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz für ein $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$

$$\Big|\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x \cos x \; dx\Big| \leq 1 \; |h^\xi| \; |\cos \xi| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammen können wir abschätzen

$$\Big|\int_0^1 h^x \cos x \; dx\Big| = \Big|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x \cos x \; dx + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x \cos x \; dx\Big| \leq \Big|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x \cos x \; dx\Big| + \Big|\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x \cos x \; dx\Big| < \varepsilon.$$

3.) Wir nehmen als Zerlegung $Z_n = \{x_0 = 1, x_1 = 1+\frac{1}{n}, x_2 = 1+\frac{2}{n}, \dots, x_n = 2\}$

Damit ist die Untersumme für $f(x) = \frac{1}{x}$ $(1 \le x \le 2)$.

$$\omega(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot \min f((x_{k-1}, x_k))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Entsprechend $\Omega(f, Z_n) = \dots = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$

Damit $\omega(f, Z_n) - \Omega(f, Z_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$

f ist also R-Integrierbar

und es gilt $\underline{\int_1^2 f(x)\,dx} = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \omega(f, Z_n) = \underline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{n+k}}$

(Mittlerweile wissen wir $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0} = \ln 2$)

Mit der alternative Zerlegung $\tilde{Z}_n = \{x_k = a^{\frac{k}{n}}, k \in \{0, \dots, n\}$ von $[1, a]$ erhalten wir

$$\omega(f, \tilde{Z}_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(a^{\frac{k}{n}} - a^{\frac{k-1}{n}}\right) \cdot \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} = \sum_{k=1}^{n} a^{-\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{k-1}{n}} (a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a^{-\frac{1}{n}} (a^{\frac{1}{n}} - 1) = n \cdot a^{-\frac{1}{n}} (a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$= \underbrace{a^{-\frac{1}{n}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}_{\xrightarrow{\text{Hinw}} \ln(a)} \longrightarrow \ln(a)$$

Entsprechend $\Omega(f, \tilde{Z}_n) = \qquad = \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \longrightarrow \ln(a)$

Damit ist f auf $[1, a]$ R-integrierbar mit $\int_1^a f(x)\,dx = \ln a$.

4.) Nach Satz 3 (Vorlesung) gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a q^{k-1})\, a\, q^{k-1}(q-1), \quad q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

für R-Integrierbare Fktn. f

(d. i. $\lim_{n\to\infty} \sigma(f, Z_n)$ für $Z_n = \{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}} : k = 0, \dots, n\}$) –

Für $f(x) = x^p$ ergibt dies

$$\lim \sum (a q^{k-1})^p \cdot a \cdot q^{k-1}(q-1)$$

$$= \lim (q-1) \sum a^{p+1} \cdot q^{(p+1)(k-1)}$$

$$= a^{p+1} \lim (q-1) \sum_{k=1}^{n} (q^{p+1})^{k-1}$$

$$= \dots \sum_{k=0}^{n-1} (q^{p+1})^k = a^{p+1} \lim_{n\to\infty} (q-1) \frac{1-(q^{p+1})^n}{1-q^{p+1}}$$

$$= a^{p+1} \lim_{n\to\infty} \frac{q-1}{q^{p+1}-1} \left(\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}\right)^n - 1\right)$$

$$= a^{p+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+q+\dots+q^p} \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{p+1} - 1\right)$$

$$= b^{p+1} - a^{p+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{1+\dots+q^p}_{\to p+1}} = \frac{1}{p+1}\left(b^{p+1} - a^{p+1}\right).$$

5a) Wir nehmen OBdA an, dass $x_0 > 0$. (sonst wählen wir $g(x) := f(1-x)$ $\int_0^1 g\,dx = \int_0^1 f\,dx$)

f stetig, $\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$: für alle $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap [0,1]$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

Wir setzen $\tilde{\delta} := \min\{\delta, x_0\} > 0$, damit : $x_0 - \tilde{\delta} \in [0,1]$, $0 < \tilde{\delta} \leq \delta$.

Damit können wir abschätzen:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{x_0-\tilde{\delta}} f(x)\,dx + \int_{x_0-\tilde{\delta}}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^1 f(x)\,dx$$

$$\underset{\substack{f.\int \\ (f \text{ stetig})}}{\overset{\text{MWS}}{=}} \underbrace{((x_0-\tilde{\delta})-0)}_{\geq 0} \underbrace{f(\xi_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(x_0-(x_0-\tilde{\delta}))}_{=\tilde{\delta}} f(\xi_2) + \underbrace{(1-x_0)}_{\geq 0} \underbrace{f(\xi_3)}_{\geq 0}$$

$$\geq \tilde{\delta} \cdot f(\xi_2)$$

für gewisse $\xi_1 \in [0, x_0-\tilde{\delta}]$, $\xi_2 \in [x_0-\tilde{\delta}, x_0]$, $\xi_3 \in [x_0, 1]$

Also $\int_0^1 f(x)\,dx \geq \tilde{\delta} f(\xi_2) \geq \tilde{\delta} \cdot \frac{f(x_0)}{2} > 0$.

---

b) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f-g)(x)\,dx$

$$= \int_0^{b-a} (f-g)(x+a)\,dx \qquad \left[\begin{array}{l} t := (b-a)x \\ \frac{dt}{dx} = b-a \end{array}\right]$$

$$= (b-a) \int_0^1 (f-g)(t\cdot(b-a)+a)\,dt \qquad \left[\begin{array}{l} \tilde{f}(t) := (f-g)(t(b-a)+a) \\ \tilde{f} \geq 0,\ \tilde{f} > 0 \end{array}\right]$$

$$= \underbrace{(b-a)}_{>0} \underbrace{\int_0^1 \tilde{f}(t)\,dt}_{\overset{a)}{>} 0} > 0.$$