Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Muzzulini WS 2007/2008

12. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass $n(x) := x^2 + cx + d$ keine reelle Nullstelle hat (insbesondere ist $d > 0$). Wir setzen

$$f(x) := \frac{ax + b}{n(x)}.$$

Wir wollen eine Stammfunktion von f erhalten, ohne den Nenner in komplexwertige Linearfaktoren zu zerteilen.

a) Finden Sie eine Funktionen g derart, dass $f = \frac{g+l}{n}$ und $g = k \cdot n'$ für konstanten $k, l \in \mathbb{R}$.

b) Finden Sie eine Stammfunkiton von $\frac{g}{n}$. (Hinweis: Hier ist der Zähler g im wesentlichen die Ableitung des Nenners n. In einem solchen Fall bietet sich in etwa der Logarithmus des Nenners an.)

c) Nun müssen wir noch eine Stammfunktion von $\frac{1}{n}$ finden. Schreiben Sie dazu den Nenner um in die Form $n(x) = (x + p)^2 + m$ für konstanten $p, m \in \mathbb{R}$ (wieder ist klar: $m > 0$). Substituieren Sie nun $y := \frac{(x+p)}{\sqrt{m}}$. Der Rest dürfte klar sein. (Hinweis: eine Stammfunktion von $g(y) = \frac{1}{y^2+1}$ ist uns bekannt.)

Aufgabe 2 (T) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a)

$$\int^x \frac{t^5 + 5t^4 + t^3 - 13t^2 - t + 9}{t^3 + 2t^2 - t - 2}\, dt$$

b)

$$\int^y \frac{1}{\sqrt{2t-1} - \sqrt[3]{2t-1}}\, dt$$

c)

$$\int^x \frac{3e^{3s} + 2e^{2s} + 6e^s - 10}{2e^{3s} + 4e^{2s} + 10e^s}\, ds$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung (Sie können dabei ggf. wie in Aufgabe **2** vorgehen), Substitution (bei Teil **b**: substituieren sie am besten $x = x(t)$ so, dass gilt $\sqrt{2t-1} = x^n$ und $\sqrt[3]{2t-1} = x^m$ für ganze Zahlen n und m.

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (T) Bestimmen Sie sämtliche Stammfunktionen von

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Hinweis: Substituieren Sie $x = \sinh y - 1$. Bedenken Sie, was $\sinh^2 x + \cosh^2 x$ ergibt.

Aufgabe 4 (Ü)

a) Gesucht ist eine zweimal differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y'' = -\omega^2 y, \qquad y(0) = y_0, \qquad y'(0) = 0,$$

wobei ω und y_0 gegebene reelle Zahlen sind. Bestimmen Sie eine solche Funktion, indem Sie den Ansatz machen, y lasse sich als Potenzreihe darstellen.

b) Sei f in einer Umgebung von 0 beliebig oft differenzierbar. Weiter gelte, dass sich f als Potenzreihe darstellen läßt. D.h. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Berechnen Sie die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$.

c) Wir definieren

$$\begin{aligned} f(x) &:= e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \text{für } x \neq 0 \\ f(0) &:= 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass jede Ableitung von f von der Form ist $\frac{p(x)}{q(x)} f(x)$ für Polyonme p und q.
Benutzen Sie anschließend Aufgabenteil **b**, um zu zeigen, dass sich f nicht als Potenzreihe darstellen läßt.

Hinweis: Auch falls es noch nicht in der Vorlesung gezeigt wurde, dürfen Sie dabei benutzen, dass für eine differnzierbare Funktion f, die sich als Potenzreihe darstellen läßt, also $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, folgendes gilt:
Auch f' läßt sich als Potenzreihe darstellen, sie können dabei komponentenweise differenzieren. Also gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Dieses Wissen können sie nun natürlich auch wieder auf f' anwenden.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.