Aufgabe 2 **a)** Zunächst führen wir eine Polynomdivision durch: Diese liefert

$$f(t) := \frac{t^5 + 5t^4 + t^3 - 13t^2 - t + 9}{t^3 + 2t^2 - t - 2} = t^2 + 3t - 4 + \frac{t+1}{t^3 + 2t^2 - t - 2}\,.$$

Dann zerlegen wir den Nenner in Linearfaktoren:

$$t^3 + 2t^2 - t - 2 = (t-1)(t^2 + 3t + 2) = (t-1)(t+1)(t+2)$$

Folglich gilt

$$f(t) = t^2 + 3t - 4 + \frac{t+1}{(t-1)(t+1)(t+2)} = t^2 + 3t - 4 + \frac{1}{(t-1)(t+2)}\,.$$

Für den verbleibenden Bruch machen wir nun den Ansatz

$$\frac{1}{(t-1)(t+2)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+2}\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $t-1$ und setzen dann $t = 1$ ein, so folgt $\frac{1}{3} = a$; Multiplizieren mit $t+2$ und Einsetzen von $t = -2$ liefert $-\frac{1}{3} = b$. Also haben wir

$$f(t) = t^2 + 3t - 4 + \frac{1/3}{t-1} - \frac{1/3}{t+2}$$

und erhalten daraus

$$\int^x f(t)\,dt = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 4x + \tfrac{1}{3}\ln|x-1| - \tfrac{1}{3}\ln|x+2| = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 4x + \tfrac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{|x+2|}\,.$$

b) Hier substituieren wir zunächst $x = \sqrt[6]{2t-1}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int^y \frac{1}{\sqrt{2t-1} - \sqrt[3]{2t-1}}\,dt &= \int^{\sqrt[6]{2y-1}} \frac{1}{x^3 - x^2} \cdot 3x^5\,dx = \int^{\sqrt[6]{2y-1}} \frac{3x^3}{x-1}\,dx \\
&= 3\int^{\sqrt[6]{2y-1}} \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + 3x + 3\ln|x-1|\,\Big|_{x=\sqrt[6]{2y-1}} \\
&= \sqrt{2y-1} + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{2y-1} + 3\sqrt[6]{2y-1} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2y-1} - 1\right|\,.
\end{aligned}$$

c) Die Substitution $t = e^s$ (also $s = \ln t$, $ds = t^{-1}\,dt$) führt auf

$$\int^x \frac{3e^{3s} + 2e^{2s} + 6e^s - 10}{2e^{3s} + 4e^{2s} + 10e^s}\,ds = \int^{e^x} \frac{3t^3 + 2t^2 + 6t - 10}{2t^3 + 4t^2 + 10t}\,\frac{dt}{t} = \int^{e^x} \frac{3t^3 + 2t^2 + 6t - 10}{2t^2(t^2 + 2t + 5)}\,dt$$

Wegen $t^2 + 2t + 5 = (t+1+2i)(t+1-2i)$ gilt: Der Nenner dieses Bruchs hat 0 als doppelte Nullstelle und $-1+2i$ sowie $-1-2i$ als einfache. Wir machen daher den Ansatz

$$\frac{3t^3 + 2t^2 + 6t - 10}{t^2(t+1-2i)(t+1+2i)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t+1-2i} + \frac{d}{t+1+2i}\,.$$

Fassen wir die beiden letzten Brüche zusammen, so bedeutet dies

$$\frac{3t^3+2t^2+6t-10}{t^2(t^2+2t+5)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+2t+5}$$

mit gewissen Konstanten C und D. Multiplikation mit $t^2(t^2+2t+5)$ führt auf

$$3t^3+2t^2+6t-10 = at(t^2+2t+5) + b(t^2+2t+5) + (Ct+D)t^2$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ergibt

$$(a+C)t^3 + (2a+b+D)t^2 + (5a+2b)t + 5b$$

und Vergleich mit der linken liefert $b=-2$, $a=2$, $C=1$, $D=0$. Nun berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int^{e^x} \left(\frac{2}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{t}{t^2+2t+5}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int^{e^x} \left(\frac{2}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{2t+2}{2(t^2+2t+5)} - \frac{1}{t^2+2t+5}\right) dt \\
&= \ln|t| + t^{-1} + \tfrac{1}{4}\ln(t^2+2t+5)\Big|_{t=e^x} - \frac{1}{8}\int^{e^x} \frac{1}{1+(\frac{t+1}{2})^2}\, dt \\
&= x + e^{-x} + \tfrac{1}{4}\ln(e^{2x}+2e^x+5) - \tfrac{1}{4}\operatorname{Arctan}\left(\frac{e^x+1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Die Substitution $x = \sinh y - 1$, $dx = \cosh y\, dy$ führt wegen der Identität $1+\sinh^2 y = \cosh^2 y$ auf

$$\int^t \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx = \int^t \frac{1}{x+\sqrt{1+(x+1)^2}}\, dx = \int^{\operatorname{arsinh}(t+1)} \frac{\cosh y}{\sinh y - 1 + \cosh y}\, dy$$

Betrachten wir den Nenner:

$$\sinh y - 1 + \cosh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} - 1 + \frac{e^y+e^{-y}}{2} = e^y - 1$$

Also haben wir

$$\int^t \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx = \frac{1}{2}\int^{\operatorname{arsinh}(t+1)} \frac{e^y+e^{-y}}{e^y-1}\, dy\,;$$

wir substituieren $u = e^y$ ($y = \ln u$, $dy = u^{-1}\, du$):

$$= \frac{1}{2}\int^{\exp(\operatorname{arsinh}(t+1))} \frac{u+u^{-1}}{u-1}\cdot\frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2}\int^{\exp(\operatorname{arsinh}(t+1))} \frac{u^2+1}{u^2(u-1)}\, du$$

Für den Integranden gilt

$$\frac{u^2+1}{u^2(u-1)} = \frac{2u^2+1-u^2}{u^2(u-1)} = \frac{2}{u-1} + \frac{(1-u)(1+u)}{u^2(u-1)} = \frac{2}{u-1} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}.$$

Somit lautet das Endergebnis

$$\int^t \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \ln|u-1| + \frac{1}{2u} - \tfrac{1}{2}\ln|u|\,\Big|_{u=\exp(\operatorname{arsinh}(t+1))}$$
$$= \ln|e^y-1| + \tfrac{1}{2}e^{-y} - \tfrac{1}{2}y\,\Big|_{y=\operatorname{arsinh}(t+1)}$$

Sämtliche Stammfunktionen erhält man, indem man hierzu noch beliebige Konstanten addiert.

Aufgabe 1

a) $n'(x) = 2x + c$, also ist $k = \frac{a}{2}$ und damit $g(x) = ax + \frac{ac}{2}$. Damit ist $l = b - \frac{ac}{2}$.

b) $\big(\ln(n(x))\,\big)' = \frac{n'(x)}{n(x)}$. Das ist bis auf den Faktor k die gesuchte Stammfunktion. Also lautet die gesuchte Funktion $k\ln(n(x)) = \frac{a}{2}\ln(n(x))$.

c) $(x+p)^2 + m = x^2 + 2px + p^2 + m$. Dies soll gleich $n(x) = x^2 + cx + d$ sein. Dies gilt natürlich genau für $p = \frac{c}{2}$ und für $m = d - p^2 = d - \frac{c^2}{4}$.
Setzen wir $y = \frac{x+p}{\sqrt{m}}$, so erhalten wir

$$n(x) = \frac{1}{(x+p)^2+m} = \frac{1}{m\left(\frac{x+p}{\sqrt{m}}\right)^2 + m} = \frac{1}{m}\,\frac{1}{y^2+1}.$$

Die Substitution $y(x) = \frac{x+p}{\sqrt{m}}$ ergibt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{m}}$, also $dx = \sqrt{m}\;dy$. Wir erhalten:

$$\int \frac{1}{n(x)}dx = \int \frac{1}{(x+p)^2+m}dx = \int \frac{1}{y^2+1}\frac{1}{m}\sqrt{m}\;dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{m}}\operatorname{Arctan} y = \frac{1}{\sqrt{m}}\operatorname{Arctan}\frac{x+p}{\sqrt{m}}.$$

d) Die gesuchte Stammfunktion von f lautet damit

$$\int f(x)\;dx = \frac{a}{2}\ln(n(x)) + l\cdot\int \frac{1}{n(x)}\;dx = \frac{a}{2}\ln(n(x)) + \frac{l}{\sqrt{m}}\operatorname{Arctan}\frac{x+p}{\sqrt{m}}$$
$$= \frac{a}{2}\ln(n(x)) + \frac{b-\frac{ac}{2}}{\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}}\operatorname{Arctan}\frac{x+\frac{c}{2}}{\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}}.$$

Aufgabe 4 a) Wir nehmen an, es gelte $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Potenzreihe dürfen wir gliedweise differenzieren, es gilt also

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\,.$$

Dies soll für alle $x \in \mathbb{R}$ übereinstimmen mit

$$-\omega^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\omega^2 a_n x^n\,.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen ist die Gleichung $y'' = -\omega^2 y$ also genau dann erfüllt, wenn

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -\omega^2 a_n \quad \text{für alle } n \geq 0 \tag{$*$}$$

gilt. Die Forderungen $y(0) = y_0$ und $y'(0) = 0$ bedeuten $a_0 = y_0$ und $a_1 = 0$. Induktiv folgt dann aus $(*)$

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad a_{2n} = y_0 \omega^{2n} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Diese Potenzreihe stellt die Funktion $y(x) = y_0 \cos(\omega x)$ dar.

b) Es gilt $(x^n)' = nx^{n-1}$, damit $(x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}$, und so wieter bis $(x^n)^{(n)} = n(n-1) \cdot ... \cdot 1 \cdot x^{n-n} = n!\ x^0 = n!$ und schließlich $(x^n)^{(m)} = 0$ für $m > n$. Folglich ist die m-te Ableitung von $(a_n x^n)$ im Punkt $x = 0$ gleich 0, außer für $m = n$. Für $m = n$ erhalten wir $(a_n x^n)^{(n)} = a_n\ n!$. Somit gilt

$$f^{(m)}(0) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)^{(m)}\Big)_{|x\,=\,0} = a_n\ n!.$$

Damit lautet die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m\ m!}{m!} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

Der Reihenwert ist damit gleich $f(x)$.

c) Wir zeigen für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$, dass $f^{(n)}$ von der Form $\frac{p_n(x)}{q_n(x)} f(x)$ ist für gewisse Polyonme p_n und q_n mit Vollständiger Induktion. Der Induktionsafnag stimmt für $n = 0$ und $p = q = 1$. Der Induktionsschritt: Sei $f^{(n)}$ von entsprechender Form. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)} &= \big(f^{(n)}\big)' = \left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)} f(x)\right)' = \left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)' f(x) + \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \big(f(x)\big)' \\
&= \frac{p_n'(x) q_n(x) - p_n(x) q_n'(x)}{q_n^2(x)} f(x) + \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \cdot \frac{2}{x^3} f(x) \\
&= \left(\frac{p_n'(x) q_n(x) - p_n(x) q_n'(x)}{q_n^2(x)} + \frac{2p_n(x)}{x^3 q_n(x)}\right) f(x) \\
&= \frac{x^3(p_n'(x) q_n(x) - p_n(x) q_n'(x)) + 2p_n(x) q_n(x)}{x^3 q_n^2(x)}\ f(x).
\end{aligned}$$

Sowohl Zaehler, als auch Nenner sind jeweils ein Polynom in x. Fehlt noch der Punkt 0. Es gilt

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{p_n(x)}{x q_n(n)} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

(Da wir wissen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{e^x}{x^n} \to \infty$ für $x \to \infty$.)

Wäre nun f darstellbar als Potenzreihe, so würde nach Teil **b** gelten, dass $f(x)$ gleich seiner Taylorreihe wäre, also

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m,$$

Jedoch ist der rechte Ausdruck überall 0, da für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(m)}(0) = 0$, ein Widerspruch.