Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini WS 2007/2008

13. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T) Untersuchen Sie jeweils, ob die Regel von de l'Hospital anwendbar ist, und berechnen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$

Aufgabe 2 (Ü) Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) := x + \sin(x)\cos(x)$ und $g(x) := f(x)e^{\sin x}$

Aufgabe 3 (Ü) Wir wollen erneut den Logarithmus in einer Reihe entwickeln. Die uns mittlerweile gegebenen Werkzeuge machen diese Aufgbe recht einfach. Gehen sie wie folgt vor:

a) Leiten Sie die Funktion $f(x) := \ln(1-x)$ ab und finden Sie eine Potenzreihenentwicklung dieser Funktion in $x_0 = 0$, d.h. finden Sie eine Folge a_n in $\mathbb{R}$, so dass für kleine $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Hinweis: Neumannsche Reihe oder machen Sie den Ansatz

$$\frac{1}{f'(x)}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 = 1 + 0\,x^1 + 0\,x^2 + 0\,x^3 + \ldots,$$

wodurch a_0 bekannt wird und damit auch alle weiteren a_n.

b) Finden Sie nun eine Potenzreihendarstellung von f um den Punkt $x_0 = 0$, indem Sie die Potenzrereihe für f' kompomentenweise integrieren.

— bitte wenden —

Aufgabe 4 (T) Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin(x^2)\,dx = \frac{(-1)^k}{\xi_k}$$

gilt, wobei ξ_k eine Zahl zwischen $\sqrt{k\pi}$ und $\sqrt{(k+1)\pi}$ ist.

Tips: Erweitern Sie den Integranden mit $\frac{x}{x}$ und setzten Sie $g(x) = \frac{1}{x}$. Welcher Satz liefert nun noch einmal solch ein ξ_k?
Substitution ist auch mal nicht schlecht, außerdem gilt $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{2}\sin t\,dt = (-1)^k$, wie wir in der Lösung von Blatt 11, Aufgabe **6 f)** gezeigt haben.

Aufgabe 5 (T) Beweisen Sie, dass die folgenden Grenzwerte existieren.

a) $\lim\limits_{\beta\to\infty} \int_0^\beta \sin(x^2)\,dx$ **b)** $\lim\limits_{\beta\to\infty} \int_0^\beta 2x\sin(x^4)\,dx$

Tips: Benutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe **4** für den Teil **a)**, und diesen wiederum für den Teil **b)**.

Aufgabe 6 (T) Es sei $\beta > 0$. Berechnen Sie die Integrale

$$I_n := \int_0^\beta x^n e^{-x}\,dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

und bestimmen Sie dann den Grenzwert $\lim\limits_{\beta\to\infty} I_n$.

Tip: Berechnen Sie I_0. Finden Sie eine Rekursionsformel, wie man I_{n+1} berechnen kann, wenn I_n bekannt ist. Berechnen Sie damit I_1, I_2 und I_3. Stellen sie nun eine Vermutung auf für eine explizite Darstellung von I_n und beweisen Sie diese mit Vollständiger Induktion.

Aufgabe 7 (Ü) Wir wollen eine Funktion auf einem kleinen Intervall sehr genau durch eine Polynomfunktion annähern. Wir wählen als Funktion $f(x) := \sin(x^2)$. Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom T_2 in $a = 0$. Zeigen Sie durch eine geeignete Abschätzung, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{10}$ der Abstand von $f(x)$ und von $T_2(x)$ extrem klein ist.

Tip: Wir wissen, dass gilt $f(x) = T_2(x) + R_3$ für einen gewissen Restterm R_3. Wie kann man diesen Restterm darstellen?
Bei der Abschätzung dieses Restterms hilft Ihnen $|\sin x| \le |x|$, was Sie leicht zeigen können.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

— bitte wenden —