Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini

WS 2007/2008

# 14. Übungsblatt

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

**Aufgabe 1 (T)** **a)** Bestimmen Sie alle Funktionen $\phi$, die folgender Gleichung genügen:

$$\phi'(x) = \phi(x) \cdot \sin x \qquad (-\tfrac{\pi}{2} \le x \le \tfrac{\pi}{2})$$

**b)** Geben Sie alle Funktionen $\phi \in C^0[-1,+1]$ an, für die folgende Gleichung gilt:

$$\phi(x) = \int_0^x \phi(t)\,dt \qquad (-1 \le x \le 1)$$

**Aufgabe 2 (T)** Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

**a)** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

**b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y\ln y}{\sinh y - y}\,dy$

**c)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx \quad (s<0,\ t\in\mathbb{R})$

**d)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{(2x-1)^2}\,dx$

**e)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\ln(1+t)\,dt$

**f)** $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^4\,dx$

**Aufgabe 3 (Ü)**

**a)** Untersuchen Sie die uneigentlichen Integrale

**(i)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx,$ **(ii)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$

auf Konvergenz.

**b)** Untersuchen Sie

**(i)** $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\ln|x|\,dx + \int_\varepsilon^1 \ln|x|\,dx\right),$ **(ii)** $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx\right)$

auf Konvergenz.

**Aufgabe 4 (Ü)** Untersuchen Sie

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz.

— bitte wenden —

**Aufgabe 5 (Ü)**

**a)** Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der vertikalen Bewegung im Schwerefeld $g$ mit linearer Reibung gilt die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}v(t) = g - \gamma v(t),$$

mit $\gamma > 0$. Lösen Sie diese Bewegungsgleichung für beliebige Anfangswerte $v(0) = v_0$.

**b)** Nach der Newtonschen Gravitationstheorie folgt für das Gleichgewicht aus Druckänderung und Gravitationskraft im Inneren eines Sternes

$$\frac{dp}{dr} = -G\frac{\rho(r)m(r)}{r^2}.$$

Dabei ist $p(r)$ der Druck im Abstand $r$ vom Mittelpunkt, $G$ die Gravitationskonstante und $m(r)$ die in einer Kugel vom Radius $r$ enthaltene Masse. Berechnen Sie die Druckverteilung $p(r)$ unter der Annahme, dass die Massendichte $\rho(r) = \rho$ im Innern des Sternes konstant ist und der Druck an der Oberfläche bei $r = R$ verschwindet.

**Aufgabe 6 (Ü)** Untersuchen Sie, für welche $s > 0$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$$

konvergiert.

Hinweis: Integralkriterium

**Hinweis** In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.