Aufgabe 1 **a)** Trennung der Veränderlichen liefert

$$\int \frac{\phi'}{\phi} dy = \int \sin x \, dx,$$

also $\ln \phi = \cos x$ und damit eine Lösung $\phi_1(x) := e^{-\cos x}$. Auch alle Vielfachen dieser Funktion sind offensichtlich Lösungen.

Dies sind aber auch schon alle Lösungen: Ist nämlich ϕ eine weitere Funktion, die der Gleichung genügt, so gilt

$$\left(\frac{\phi(x)}{\phi_1(x)}\right)' = \frac{\phi'(x)\phi_1(x) - \phi(x)\phi_1'(x)}{\phi_1^2(x)} = \frac{\phi(x)\sin(x)\phi_1(x) - \phi(x)\phi_1(x)\sin(x)}{\phi_1^2(x)} = 0\,.$$

Der Quotient ϕ/ϕ_1 ist also konstant, d. h. es gilt $\phi = C\phi_1$ mit $C \in \mathbb{C}$. Durch

$$\phi(x) = Ce^{-\cos x} \quad (C \in \mathbb{C} \text{ beliebig})$$

sind damit alle Lösungen gegeben.

b) Differenzieren wir die Funktionen auf beiden Seiten der Gleichung, so folgt

$$\phi'(x) = \phi(x) \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

(Beachte: ϕ muss differenzierbar sein, weil die rechte Seite der Gleichung differenzierbar ist.) Genau wie eben folgt aber hieraus $\phi(x) = Ce^x$ mit $C \in \mathbb{C}$.

Gemäß der ursprünglichen Gleichung muss $C = \phi(0) = \int_0^0 \phi(x)\,dx = 0$ gelten, d. h. nur $\phi(x) := 0$ ($x \in [-1,1]$) erfüllt die Gleichung.

Aufgabe 2 **a)** Für beliebiges $R > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \ln x$, $dt = x^{-1}\,dx$

$$\int_2^R \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{t=\ln 2}^{\ln R} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R}\,.$$

Für $R \to \infty$ strebt dies gegen $(\ln 2)^{-1}$; das uneigentliche Integral konvergiert also und hat diesen Wert.

b) Dieses Integral ist divergent (am linken Rand), denn wegen

$$\sinh y - y = (y + \tfrac{1}{3!}y^3 + \cdots) - y = \tfrac{1}{3!}y^3 + o(y^3) = \tfrac{1}{3!}y^3(1 + o(1)), \quad y \to 0,$$

gilt für hinreichend kleine $y > 0$ sicherlich $|\sinh y - y| \leq y^3$. Wählt man zusätzlich y so klein, dass $|\ln y| \geq 1$ gilt, so ist

$$\left|\frac{y \ln y}{\sinh y - y}\right| \geq \frac{y|\ln y|}{y^3} = \frac{|\ln y|}{y^2} \geq \frac{1}{y^2}\,.$$

Mit dem Minorantenkriterium folgt die Divergenz, denn $\int_0^1 y^{-2}\,dy$ existiert nicht.

c) Mit Produktintegration erhalten wir

$$\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cdot\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx\,.$$

Erneute Produktintegration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t^2\cos(tx)\,dx\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx &= \frac{e^{sx}}{s}\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \frac{e^{sx}}{s^2}t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R\\ &= \frac{e^{sR}}{s}\cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2}t\sin(tR) - 0 \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s}\,.\end{aligned}$$

(Man beachte $s<0$.) Also ist das Integral konvergent, und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2+t^2}\,.$$

d) Mit Produktintegration ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{\ln x}{(2x-1)^2}\,dx &= \int_1^R \frac{1}{(2x-1)^2}\cdot\ln x\,dx = -\frac{1}{2(2x-1)}\ln x\Big|_{x=1}^R + \int_1^R \frac{1}{2x(2x-1)}\,dx\\ &= -\frac{1}{2(2R-1)}\ln R + \int_1^R \frac{1}{2x(2x-1)}\,dx\end{aligned}$$

Für den Integranden des letzten Integrals bestimmen wir eine Partialbruchzerlegung: Aus

$$\frac{1}{x(2x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{2x-1}$$

folgt $a=-1$ (Multiplizieren mit x und $x=0$ einsetzen) und $b=2$ (Multiplizieren mit $2x-1$ und $x=\frac{1}{2}$ einsetzen). Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{1}{2x(2x-1)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^R\left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{2x-1}\right)dx = -\tfrac{1}{2}\ln x\Big|_{x=1}^R + \tfrac{1}{2}\ln(2x-1)\Big|_{x=1}^R\\ &= -\tfrac{1}{2}\ln R + \tfrac{1}{2}\ln(2R-1) = \tfrac{1}{2}\ln\frac{2R-1}{R} \xrightarrow{R\to\infty} \tfrac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Dies ist dann auch der Wert des zu untersuchenden uneigentlichen Integrals, denn $R^{-1}\ln R\to 0$ für $R\to\infty$.

e) Aus der Ungleichung $1+x\le e^x$ folgt $\ln(1+t)\le t$ für alle $t\ge 0$. Also:

$$|e^{-t}\ln(1+t)| \le te^{-t}$$

Da das Integral $\int_0^\infty te^{-t}$ existiert, konvergiert das zu untersuchende Integral nach dem Majorantenkriterium.

f) Bekanntlich gilt $x^\alpha\ln x \xrightarrow{x\to 0} 0$ für jedes $\alpha>0$, insbesondere also $x^{1/2}(\ln x)^4 \xrightarrow{x\to 0} 0$. Für hinreichend kleine x besteht daher die Abschätzung

$$|x^{1/2}(\ln x)^4| \le 1, \qquad \text{also} \qquad |(\ln x)^4| \le x^{-1/2}$$

Die Konvergenz folgt nun aus dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 3 **a) (i)** Wir berechnen für $\varepsilon > 0$ das Integral $\int_\varepsilon^1 \ln|x|dx = \int_\varepsilon^1 1 \cdot \ln x\, dx$. Partielle Integration mit $u'(x) = 1$ und $v(x) = \ln|x|$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \ln|x|dx &= \int_\varepsilon^1 u'v\, dx \\ &= [uv]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 uv'\, dx \\ &= [x\ln x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\frac{1}{x}'\, dx \\ &= 0 - \varepsilon\ln\varepsilon - [x]_\varepsilon^1 = -\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon.\end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert (gegen $0-1+0=-1$). Damit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x|dx$. Da $\ln|-x| = \ln|x|$, erhalten wir $\int_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x|dx = \int_\varepsilon^1 \ln|x|dx$. Also existiert auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^0 \ln|x|dx$, und damit konvergiert auch das Integral über $[-1,1]$.

b) (i) Beide Summanden konvergieren, damit auch deren Summe. Es gilt offensichtlich, dass dieser Grenzwert existieren muss, wenn das uneigentliche Integral existiert. Der Grenzwert ist der Wert des Integrals.

a) (ii) Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \big[-\frac{1}{x^2}\big]_\varepsilon^1 = -1 + \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Die rechte Seite konvergiert nicht (für $\varepsilon \to 0$). Damit konvergiert das gefragt uneigentliche Integral nicht.

b) (ii) Die Beiden Integrale addieren sich zu 0 (da $1/(-x) = -1/x$). Damit existiert der Grenzwert, obwohl das uneigentliche Integral auf $[-1,1]$ nicht existiert.
(Man spricht hier vom Cauchyche Hauptwert des Integrals, das ist eine Verallgemeinerung des Konvergenzbegriffs für Integrale.)

Aufgabe 4 $sin(x)/x$ ist beschränkt (für $x \to 0$ konvergiert es gegen 1). Damit ist nur die obere Grenze des Integrationsgebiets problematisch. Wir substituieren $u(x) = \frac{1}{x}$ und $v'(x) = \sin x$. Damit gilt

$$\int_1^t \frac{\sin x}{x}dx = \Big[\frac{1}{x}(-\cos x)\Big]_1^t - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2}dx = \frac{\cos t}{t} - \cos 1 - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

$\frac{\cos t}{t} - \cos 1$ konvergiert für $t \to \infty$.
Wir zeigen nun, dass das rechte Integral sogar absolut konverigert. Da $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ und

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t} \to 1,$$

ist $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ eine konvergente Majorante für $\int_1^\infty |\frac{\cos x}{x^2}|dx$.

Damit konvergiert $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ sogar absolut, insbesondere konvergiert es und damit auch $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. Schließlich konvergiert

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$$

Aufgabe 5 **a)** Ansatz für die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$v_h' + \gamma v_h = 0$$

ist für beliebiges $d \in \mathbb{R}$

$$v_h(X) = de^{\int -\gamma(x)\,dx} = de^{\int -\gamma\,dx} = de^{-\gamma x} = de^{-\gamma x}.$$

Ansatz für eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist (Varation der Konstante d):

$$v_s(x) = d(x)e^{-\gamma x}.$$

Dies liefert

$$v_s'(x) = d'(x)e^{-\gamma x} + d(x)(e^{-\gamma x})` = d'(x)e^{-\gamma x} + (-\gamma v_s),$$

Also

$$v_s' + \gamma v_s = d'(x)e^{-\gamma x} \stackrel{!}{=} g.$$

Dies ist erfüllt für $d'(x) = ge^{\gamma x}$, also etwa für

$$d(x) = \frac{g}{\gamma}e^{\gamma x}.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$v_a(x) = v_s(X) + v_h(X) = \frac{g}{\gamma}e^{\gamma x} + de^{-\gamma x}.$$

Setzten wir noch die Anfangsbedingung ein, so erhalten wir $v_0 = v(0) = \frac{g}{\gamma} + d$, also $d = v_0 - \frac{g}{\gamma}$. Die gesucht Lösung ist somit

$$v(x) = \frac{g}{\gamma}e^{\gamma x} + (v_0 - \frac{g}{\gamma})e^{-\gamma x}.$$

b)ρ ist als konstant angenommen. G ist eine Konstante. Lediglich m hängt vom Radius r ab. Die Masse ist gleich das Volumen mal der Massendichte ρ. Damit erhalten wir $m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$. Damit lautet die Differentialgleichung

$$p'(r) = -G\,\frac{\rho\,\frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho}{r^2} = -\frac{4}{3}\,\pi\,G\,\rho^2 r = -Kr$$

für die als konstant angenommene Größe $K = \frac{4}{3}\,\pi\,G\,\rho^2$. Die Lösung davon sind alle Stammfunktionen von p', also $p(r) = c - \frac{K}{2}r^2$. Mit $p(R) = 0$ erhalten wir $c = \frac{K}{2}R^2$ und damit

$$p(r) = \frac{K}{2}R^2 - \frac{K}{2}r^2 = \frac{K}{2}(R^2 - r^2) = \frac{2}{3}\,\pi\,G\,\rho^2(R^2 - r^2).$$

Aufgabe 6 $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^s}$ ist monton fallend und positiv. Nach dem Integralsatz konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^s}\,dx$$

konvergiert. Die Substitution $y := \ln x$ liefert $dy = \frac{1}{x}\,dx$ und damit

$$\int_1^t \frac{1}{x(\ln x)^s}\,dx = \int_e^{e^t} \frac{1}{y^s}\,dy.$$

Für $s \leq 1$ divergiert die rechte Seite, für $s > 1$ konvergiert die rechte Seite ($t \to \infty$). Also konvergiert die Reihe genau für $s > 1$.