Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini

WS 2007/2008

15. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü) Betrachten Sie die folgenden Differentialgleichungen und Substitutionen:

a) $2y' + y^2 + x^{-2} = 0, \quad z(x) = xy(x)$ **b)** $y' = (x-y)^2 + 1, \quad z(x) = x - y(x)$

Leiten Sie ab, welcher Differentialgleichung z genügen muss, wenn y die gegebene Gleichung löst. Lösen Sie die Differentialgleichung für z und gewinnen Sie daraus eine Lösung y der gegebenen Gleichung.

Aufgabe 2 (Ü) Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

a) $x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} + xy' \cos \frac{y}{x} = 0$ **b)** $x^3 y' + (2 - 3x^2)\, y = x^3$

Aufgabe 3 (Ü) Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme.

a) $y'' - 2y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

b) $y'' - 5y' + 4y = e^{2x}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

Aufgabe 4 (Ü) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem.

$$x^2 y'' + xy' - y = \ln x, \qquad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$$

Aufgabe 5 (Ü)

a) Für die Füllhöhe $y(t)$ eines mit Wasser gefüllten zylinderförmigen Gefäßes, das sich über ein Loch im waagrechten Boden entleert, gilt näherungsweise

$$y'(t) = -\alpha \sqrt{y(t)},$$

$\alpha > 0$. Lösen Sie diese Differenzialgleichung für $y \geq 0$, $t > 0$ mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$. Nach welcher Zeit ist das Gefäß leer?

b) Eine an einer Feder aufgehängte Masse wird ausgelenkt und beginnt zu schwingen. Dabei soll die Schwingung eine Dämpfung erfahren, die proportional zur Geschwindigkeit ist. Stellen Sie die Differentialgleichung dieses Problems auf, und bestimmen Sie die Lösungen.

Und nun zur Linearen Algebra:
Aufgabe 6

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ linear unabhängig sind in der Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ mit $p_0(x) := 1$, $p_1(x) := x$, $p_2(x) := x^2$, $p_3(x) := x^3$ eine Basis von $P_3 := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ p \text{ ist Polynom vom Grad} \leq 3\}$ ist.

c) Seien $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ verschiedene komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ linear unabhängig sind in der Menge der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Hinweis: **a)**: Idenditätssatz, **c)** Induktion, Ableiten.

— bitte wenden —

Aufgabe 7 Gegeben seien vier Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ seien linear unabhängig und sowohl $\vec{x}$ als auch $\vec{y}$ lasse sich als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen. Zeigen sie, dass sich dann sowohl $\vec{u}$ als auch $\vec{v}$ als Linearkombination von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ darstellen lässt.

Aufgabe 8 Es sei V ein unitärer Raum. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

a) Ist $x \in V$ und gilt $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$, so folgt $x = 0$.

b) Sind $x, y \in V$ linear unabhängig, und sind $x, z \in V$ linear unabhängig, so sind auch y, z linear unabhängig.

c) Es seien $x_1, \ldots, x_n, y \in V$. Ist $y \neq 0$ und ist y orthogonal zu jedem Vektor aus $L(x_1, \ldots, x_n)$, so folgt $L(x_1, \ldots, x_n) \neq V$.

d) Sind $x, y, z \in V$ linear abhängig, so existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $z = \alpha x + \beta y$.

Aufgabe 9

a) Sei M eine Menge von Vektoren mit $0 \in M$. Zeigen Sie, dass M lin. abhängig ist.

b) Zeigen Sie dass aus $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j = 0$ mit $\lambda_1 \neq 0$ folgt

$$\mathrm{Lin}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \mathrm{Lin}(a_2, a_3, \ldots, a_m).$$

c) Seien $\vec{b_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b_2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{b_3} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: $\mathrm{Lin}(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = \mathrm{Lin}(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$.

d) Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 4\vec{e_1} + 6\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$. Geben die Koordinaten von $\vec{a}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ an.

Aufgabe 10 (Ü) Nach unserer Definition ist G mit einer inneren Verknüpfung eine Gruppe, wenn

- die Verknüpfung assoziaitv ist (d.h. Klammern kann man beliebig setzen, also gilt für alle $a, b, c \in G: \ a(bc) = (ab)c$),
- es ein neutrales Element $e \in G$ gibt, so dass für alle $a \in G$ gilt $ea = a$
- und schließlich zu jedem $a \in G$ ein inverses Element a^{-1} existiert, d.h. $a^{-1}a = e$.

Zeigen Sie, dass man daraus für jedes $a, b, c \in G$ schließen kann:

a) $aa^{-1} = e$,

b) $ae = a$.

c) $(ba = e, ca = e) \rightarrow b = c$ (d.h. das Inverse ist eindeutig),

Hinweis In der großen Übung in der ersten Woche von HM II werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben teilweise besprochen. Die Lösung aller Aufgaben ist in kürze online verfügbar.

— bitte wenden —