Aufgabe 1 **a)** Da in der Gleichung x^{-2} vorkommt, müssen wir $x = 0$ ausschließen. Aus $y = z/x$ folgt $y' = z'/x - z/x^2$. Damit ergibt sich

$$2y' + y^2 + x^{-2} = 0 \iff 2(z'/x - z/x^2) + (z/x)^2 + x^{-2} = 0$$
$$\iff 2xz' - 2z + z^2 + 1 = 0 \iff 2xz' + (z-1)^2 = 0 \iff z' = -\frac{(z-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Offenbar ist $z(x) = 1$ eine Lösung (d. h. $y(x) = 1/x$ ist eine Lösung der ursprünglichen Gleichung); die anderen Lösungen erhalten wir aus

$$\int -\frac{2}{(z-1)^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx, \qquad \text{also} \qquad \frac{2}{z-1} = \ln|x| + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Gleichung für z hat also für $z(x) \neq 1$ die allgemeine Lösung

$$z(x) = 1 + \frac{2}{\ln|x| + c} \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}),$$

und zwar auf jedem Intervall, das 0 und $\pm e^{-c}$ nicht enthält. Wegen $y = z/x$ liefert dies auf den gleichen Intervallen die folgenden Lösungen der ursprünglichen Gleichung:

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x\ln|x| + cx} \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

b) Es gilt $y' = (x - z)' = 1 - z'$, und somit folgt

$$y' = (x-y)^2 + 1 \iff 1 - z' = z^2 + 1 \iff z' = -z^2.$$

Wieder handelt es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, deren Lösungen wir aus

$$\int -\frac{1}{z^2}\,dz = \int 1\,dx, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{z} = x + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

gewinnen können; die Lösungen sind gegeben durch $z(x) = (x + c)^{-1}$, und zwar auf jedem Intervall, das $-c$ nicht enthält. Hieraus ergibt sich

$$y(x) = x - z(x) = x - \frac{1}{x+c} \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

auf ebendiesen Intervallen.

Aufgabe 2 **a)** Division durch x liefert die Gleichung

$$\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} + y'\cos\frac{y}{x} = 0.$$

Dies ist eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es sich hier anbietet, die Substitution $z = y/x$ durchzuführen. Diese liefert wegen $y' = (xz)' = z + xz'$ die Gleichung

$$\sin z - z\cos z + (z + xz')\cos z = 0, \qquad \text{also} \qquad \sin z + xz'\cos z = 0.$$

Nun substituieren wir $u(x) := \sin z(x)$. Wegen $u' = z' \cos z$ geht die Gleichung über in

$$u + xu' = 0, \qquad \text{also} \qquad u' = -\frac{u}{x}\,.$$

Diese Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$u(x) = C \exp\left(\int^x -\frac{1}{t}\,dt\right) = C \exp(-\ln|x|) = C|x|^{-1} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Alle Lösungen z erhält man also aus $\sin z(x) = C|x|^{-1}$. Es folgt

$$z(x) = \arcsin_k(C_1/x) \qquad (k \in \mathbb{Z},\ C_1 \in \mathbb{R})$$

und damit $y(x) = x \arcsin_k(C_1/x)$. Diese Funktionen sind jeweils definiert für $|x| > |C_1|$.

b) Wir betrachten zunächst für $x \neq 0$ die homogene Gleichung

$$x^3 y' + (2 - 3x^2)y = 0, \qquad \text{also} \qquad y' + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) y = 0\,.$$

Diese besitzt die Lösungen

$$y(x) = C \exp\left(-\int^x \left(\frac{2}{t^3} - \frac{3}{t}\right) dt\right) = C \exp(x^{-2} + 3\ln|x|) = C|x|^3 e^{1/x^2} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Also: $y(x) = C_1 x^3 e^{1/x^2}$ (mit $C_1 \in \mathbb{R}$ beliebig) ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, und zwar auf jedem Intervall, das 0 nicht enthält.

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_\mathrm{p}(x) = C(x) y_\mathrm{h}(x)$, wobei $y_\mathrm{h}(x) := x^3 e^{1/x^2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} x^3 y_\mathrm{p}' + (2 - 3x^2) y_\mathrm{p} &= x^3(C' y_\mathrm{h} + C y_\mathrm{h}') + (2 - 3x^2) C y_\mathrm{h} \\ &= x^3 C' y_\mathrm{h} + \big(x^3 y_\mathrm{h}' + (2 - 3x^2) y_\mathrm{h}\big) C = x^3 C' y_\mathrm{h}\,. \end{aligned}$$

(Beachte: y_h löst die homogene Gleichung.) Damit y_p die inhomogene Gleichung löst, muss also $x^3 C' y_\mathrm{h} = x^3$ sein, d. h. es muss

$$C'(x) = 1/y_\mathrm{h}(x) = x^{-3} e^{-1/x^2}$$

gelten. Dies ist für $C(x) = \frac{1}{2} e^{-1/x^2}$ der Fall, und hiermit ergibt sich die partikuläre Lösung $y_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2} x^3$. Insgesamt: Auf jedem Intervall, das 0 nicht enthält, ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = \tfrac{1}{2} x^3 + C x^3 e^{1/x^2} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Bemerkung: $x \mapsto \frac{1}{2} x^3$ ist sogar auf ganz $\mathbb{R}$ Lösung der Differentialgleichung; andere Lösungen gibt es auf Intervallen, die 0 enthalten, aber nicht.

Aufgabe 3 **a)** Aus der Vorlesung ist bekannt, dass man die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung sofort in der Hand hat, wenn man die Nullstellen des zugehörigen Polynoms $\lambda^2 - 2\lambda + 3$ kennt; dies sind $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}\, i$. Folglich hat die vorliegende Gleichung die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 e^x \sin(\sqrt{2}\, x) + C_2 e^x \cos(\sqrt{2}\, x) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Dann ist $y(0) = C_2$ und wegen

$$y'(x) = C_1 e^x \sin(\sqrt{2}\, x) + C_1 e^x \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}\, x) + C_2 e^x \cos(\sqrt{2}\, x) - C_2 e^x \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\, x)$$

gilt $y'(0) = \sqrt{2}\, C_1 + C_2$. Die Bedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$ implizieren daher $C_2 = 1$ und $C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die Lösung lautet mithin

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, e^x \sin(\sqrt{2}\, x) + e^x \cos(\sqrt{2}\, x)\,.$$

b) Das Polynom $\lambda^2 - 5\lambda + 4$ hat die Nullstellen 1 und 4. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet folglich

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x}\,.$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = Ce^{2x}$. Dann ist $y_{\mathrm{p}}' = 2Ce^{2x}$ und $y_{\mathrm{p}}'' = 4Ce^{2x}$, also

$$y_{\mathrm{p}}'' - 5y_{\mathrm{p}}' + 4y_{\mathrm{p}} = 4Ce^{2x} - 10Ce^{2x} + 4Ce^{2x} = -2Ce^{2x}\,.$$

Damit dies $= e^{2x}$ wird, muss $C = -\frac{1}{2}$ gewählt werden. Es folgt $y_{\mathrm{p}}(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$, und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{4x}\,.$$

Aus $y(0) = 1$ folgt $-\frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 1$ und aus $y'(0) = -1$ folgt $-1 + C_1 + 4C_2 = -1$. Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, folgt $-3C_2 = \frac{3}{2}$, also $C_2 = -\frac{1}{2}$ und damit $C_1 = 2$. Die Lösung lautet daher

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - \tfrac{1}{2}e^{4x}\,.$$

Aufgabe 4 Diese Differentialgleichung vom Eulerschen Typ behandeln wir auf $(0, \infty)$, indem wir die neue unabhängige Variable $t = \ln x$ einführen. (Wir wählen $(0, \infty)$, weil y und y' an der Stelle 1 vorgegeben sind.) Die Gleichung wird dann wegen $x = e^t$ zu

$$e^{2t} y''(e^t) + e^t y(e^t) - y(e^t) = t\,.$$

Setzen wir jetzt $z(t) := y(e^t)$, so haben wir $\dot{z}(t) = e^t y'(e^t)$ und $\ddot{z}(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$. Unsere Gleichung schreibt sich somit

$$\ddot{z}(t) - z(t) = t\,.$$

Da $\lambda^2 - 1$ die Nullstellen 1 und -1 hat, lautet die allgemeine Lösung von $\ddot{z} - z = 0$

$$z(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung gewinnen wir mit dem Ansatz $z_{\mathrm{p}}(t) = at + b$. Dann ist $\ddot{z}_{\mathrm{p}} - z_{\mathrm{p}} = -z_{\mathrm{p}} = -at - b$. Eine Lösung ergibt sich also für $a = -1$ und $b = 0$; es ist $z_{\mathrm{p}}(t) = -t$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$z(t) = -t + C_1 e^t + C_2 e^{-t} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Damit erhalten wir

$$y(x) = z(\ln x) = -\ln x + C_1 x + C_2 x^{-1} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Es gilt $y'(x) = -x^{-1} + C_1 - C_2 x^{-2}$. Die Bedingungen $y(1) = 2$ und $y'(1) = -1$ bedeuten $C_1 + C_2 = 2$ und $-1 + C_1 - C_2 = -1$, also $C_1 = C_2 = 1$. Die Lösung der Aufgabe ist

$$y(x) = -\ln x + x + x^{-1}.$$

Bemerkung: Man könnte auch mit dem Ansatz $y(x) = x^r$ in die Differentialgleichung eingehen, um die Lösungen der homogenen Gleichung zu finden.

Aufgabe 5 **a)** Für $y_0 = 0$ ist $y = 0$ eine Lösung. Ansonsten ist $y(0) > 0$ und damit auch in einer Umgebung von 0. Die Substitution $z(t) := \sqrt{y(t)}$ liefert

$$z'(t) = \frac{y'(t)}{2\sqrt{y(t)}} = \frac{y'(t)}{2z(t)},$$

also $y' = 2zz'$. Wenn y die DGL erfüllt, dann erfüllt z die Gleichung

$$zz' = -\frac{\alpha}{2} z.$$

Solgange $z > 0$ ist, gilt $z' = -\frac{\alpha}{2}$. Also $z(t) = c - \frac{\alpha}{2} t$ für ein $c > 0$. Damit gilt

$$y(t) = z^2(t) = (c - \frac{\alpha}{2} t)^2.$$

Die Anfangsbedingung liefert $c = \sqrt{y_0}$. Dies gilt, solange $y > 0$ ist. $y = 0$ tritt ein zum Zeitpunkt $t = \frac{2}{\alpha}\sqrt{y_0}$.

b) Es bezeichne $x(t)$ die Auslenkung der Masse (bezüglich der Ruhelage) zum Zeitpunkt t. Die Rückstellkraft der Feder ist gegeben durch $-Dx(t)$ mit einer positiven Konstante D. Bei ungedämpfter Schwingung würde also nach dem Newtonschen Kraftgesetz

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t)$$

gelten. Da jedoch eine Dämpfungskraft $-r\dot{x}(t)$ (wobei $r > 0$) hinzukommt, müssen wir die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) - r\dot{x}(t)$$

betrachten. Setzen wir $a := r/2m$ und $b := D/m$, so haben wir die Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2a\dot{x}(t) + bx(t) = 0$$

vor uns. Aus der Vorlesung sind die Lösungen bekannt:

1. Fall: $a^2 > b$, also $r > 2\sqrt{mD}$ (*starke Dämpfung*). Die allgemeine Lösung lautet dann

$$x(t) = C_1 e^{(-a+\sqrt{a^2-b})t} + C_2 e^{(-a-\sqrt{a^2-b})t} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}),$$

d. h. sie hat die Gestalt $x(t) = C_1 e^{-\delta_1 t} + C_2 e^{-\delta_2 t}$ mit positiven Konstanten δ_1 und δ_2. Offenbar gilt $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$, die Schwingung wird also immer schwächer. Weiter haben wir: $x(t) = 0$ ist (wenn o.B.d.A. $C_1 \neq 0$) gleichbedeutend mit $e^{(\delta_2-\delta_1)t} = -C_2/C_1$. Dies kann wegen $\delta_1 \neq \delta_2$ für höchstens ein t erfüllt sein. Bei dieser trägen „Schwingung“ wird die Ruhelage also höchstens einmal durchquert.

2. Fall: $a^2 = b$, also $r = 2\sqrt{mD}$ (ebenfalls *starke Dämpfung*). Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$x(t) = C_1 e^{-at} + C_2 t e^{-at} = (C_1 + C_2 t)e^{-at} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Auch hier zeigt sich das gleiche Verhalten wie im ersten Fall: $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ und $x(t) = 0$ gilt für höchstens ein t (nämlich $t = -C_1/C_2$).

3. Fall: $a^2 < b$, also $r < 2\sqrt{mD}$ (*schwache Dämpfung*). Dann ist

$$x(t) = C_1 e^{-at}\cos(\sqrt{b-a^2}\,t) + C_2 e^{-at}\sin(\sqrt{b-a^2}\,t) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Im nichttrivialen Fall (also $A := (C_1^2 + C_2^2)^{1/2} \neq 0$) schreiben wir dies noch um: Wegen $(C_1/A)^2 + (C_2/A)^2 = 1$ gibt es dann ein $\phi \in [0, 2\pi)$ mit $(C_2/A) + i(C_1/A) = e^{i\phi}$. Das bedeutet $C_2/A = \cos\phi$ und $C_1/A = \sin\phi$, also

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-at}\left(\frac{C_1}{A}\cos(\sqrt{b-a^2}\,t) + \frac{C_2}{A}\sin(\sqrt{b-a^2}\,t)\right) \\ &= Ae^{-at}\Big(\sin\phi\cos(\sqrt{b-a^2}\,t) + \cos\phi\sin(\sqrt{b-a^2}\,t)\Big) = Ae^{-at}\sin(\phi + \sqrt{b-a^2}\,t). \end{aligned}$$

Hier haben wir nun eine wirkliche „Schwingung“; sie wird zwar auch immer schwächer, die schwingende Masse durchquert dabei aber immer wieder die Ruhelage.

Die Konstanten können jeweils noch benutzt werden, um die vorgegebene Anfangsauslenkung und Geschwindigkeit zu berücksichtigen.

Aufgabe 6

a) Seien $a_0, a_0, \ldots, a_n$ reelle Zahlen, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = 0.$$

Wir müssen zeigen, dass alle a_j gleich Null sind. Nun steht auf jeder Seite der Gleichung eine Potenzreihe ($0 = \sum 0 \cdot x^j$). Nach dem Idenditätssatz sind alle Koeffizienten gleich, also gleich Null.

b) Nach Teil $a)$ ist $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ als Teilmenge einer linear unabhängigen Menge selber auch linear unabhängig. Jedes Polynom p vom Grad≤ 3 läßt sich schreiben als $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, also gilt $p = dp_0 + cp_1 + bp_2 + ap_3$. Folglich erzeugt $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ den ganzen P_3.

c) Wir zeigen induktiv, dass für $N \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_N x}\}$ linear unabhängig ist. Der Induktionsanfang ($N = 1$) ist klar, da $e^{\lambda_1 x}$ nicht die Nullfunktion ist. Im Induktionsschritt reicht es, zu zeigen, dass sich $e^{\lambda_N x}$ nicht linear kombinieren läßt durch $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_{N-1} x}$. Annahme, dies ginge doch, so gäbe es $a_j \in \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{j=1}^{N-1} a_j e^{\lambda_j x} = e^{\lambda_n x}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. Diese Gleichung können wir auf beiden Seiten ableiten, oder auch auf beiden Seiten mit λ_n mulitplizieren. Wir erhalten die bedien Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j a_j e^{\lambda_j x} = \lambda_n e^{\lambda_n x}, \qquad \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_n a_j e^{\lambda_j x} = \lambda_n e^{\lambda_n x}.$$

Ziehen wir die erste von der zweiten Gleichung ab, so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_n - \lambda_j) a_j e^{\lambda_j x} = 0.$$

Da $\lambda_n \neq \lambda_1$, zeigt dies, dass $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_{N-1} x}\}$ linear abhängig ist, ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

Aufgabe 7 $\vec{x}$ und $\vec{y}$ spannen einen zweidimensionalen Raum auf, da sie lin. unabhängig sind. Die lineare Hülle von $\vec{u}$ und von $\vec{v}$ hat maximal dimension 2. Da $\vec{x}, \vec{y} \in \mathrm{Lin}(\vec{u}, \vec{v})$, wissen wir

$$\mathrm{Lin}(\vec{x}, \vec{y}) \subseteq \mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}(\vec{u}, \vec{v})) = \mathrm{Lin}(\vec{u}, \vec{v}).$$

Wenn ein zweidimensionaler Raum Teilraum eines maximal zweidimensionalen Raums ist, so müssen beide Räume gleich sein. Also gilt:

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathrm{Lin}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Lin}(\vec{x}, \vec{y}).$$

Das bedeuted, dass sich $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear durch $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufspannen lassen.

Alternative (rechnerische) Lösung:

Nach Voraussetzung existieren $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{x} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{y} = y_1 \vec{u} + y_2 \vec{v}.$$

Wir zeigen hier, dass sich $\vec{u}$ als Linearkombination von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ darstellen lässt; völlig analog kann man zeigen, dass dies auch für $\vec{v}$ gilt.

Ist $x_2 = 0$, so gilt $\vec{x} = x_1\vec{u}$. Da $\vec{x}, \vec{y}$ linear unabhängig sind, kann $\vec{x}$ nicht der Nullvektor sein. Folglich ist $x_1 \neq 0$ und somit $\vec{u} = \frac{1}{x_1}\vec{x}$ ein Darstellung von $\vec{u}$ als Linearkombination von $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

Ist $x_2 \neq 0$, so multiplizieren wir die obigen Darstellungen von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ mit y_2 bzw. x_2:

$$y_2\vec{x} = x_1y_2\vec{u} + x_2y_2\vec{v} \quad \text{und} \quad x_2\vec{y} = x_2y_1\vec{u} + x_2y_2\vec{v}.$$

Dann ziehen wir diese Gleichungen voneinander ab:

$$y_2\vec{x} - x_2\vec{y} = (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{u}.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{x}, \vec{y}$ und wegen $x_2 \neq 0$ steht hier links nicht der Nullvektor, also muss $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$ gelten, und die Division durch diese Zahl liefert die gewünschte Darstellung von $\vec{u}$.

Aufgabe 8 **a)** Die Aussage ist richtig: Da die Gleichung für alle $y \in V$ gilt, also insbesondere für $y = x$, haben wir $\langle x, x\rangle = 0$. Nach Definition des Skalarprodukts kann dies aber nur für $x = 0$ der Fall sein.

b) Die Aussage ist falsch: Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{C}^2$. Dort sind $\vec{x} := \vec{e_1}$ und $\vec{y} := \vec{e_2}$ linear unabhängig, und genauso $\vec{x}$ und $\vec{z} := \vec{e_2}$. Die Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{z}$ sind jedoch nicht linear unabhängig, denn $\vec{y} - \vec{z} = \vec{0}$.

c) Die Aussage ist wahr: Wäre nämlich $L(x_1, \ldots, x_n) = V$, so hätten wir $\langle y, x\rangle = 0$ für alle $x \in V$. Aus **a)** folgte dann unmittelbar $y = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

d) Die Aussage ist falsch: Man betrachte $V := \mathbb{C}^1$ mit $x := 0$, $y := 0$ und $z := i$.

Aufgabe 9 **a)** $0 = \sum_{m\in M} d_m m$ mit $d_0 = 1$, $d_m = 0$ sonst.

b) Die rechte Seite ist sicherlich eine Teilmenge der linken. Es reicht zu zeigen, dass a_1 in der rechten Menge liegt, da damit auch gilt

$$\mathrm{Lin}(a_2, a_3, \ldots, a_m) = \mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}(a_2, a_3, \ldots, a_m)) \supseteq \mathrm{Lin}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m).$$

Nach Voraussetzung gilt $\sum_{j=2}^{m} \lambda_j a_j = -\lambda_1 a_1$ und $\lambda_1 \neq 0$, folglich

$$a_1 = \sum_{j=2}^{m} -\frac{\lambda_j}{\lambda_1} a_j.$$

c) Es reicht zu zeigen, dass wir jedes der drei Basiselemente $\vec{e_j}$ durch die $\vec{b_j}$ kombinieren können. Dies ist nicht schwer: $\vec{e_1} = \vec{b_3} - \vec{b_2}$, $\vec{e_3} = \vec{b_3} - \vec{b_1}$, $\vec{e_2} = \vec{b_1} - \vec{e_1} = \vec{b_1} - (\vec{b_3} - \vec{b_2}) = \vec{b_1} - \vec{b_3} + \vec{b_2}$.

d) Wir können einfach einsetzen

$$\vec{a} = 4\vec{e_1} + 6\vec{e_2} + 3\vec{e_3} = 4(\vec{b_3} - \vec{b_2}) + 6(\vec{b_1} - \vec{b_3} + \vec{b_2}) + 3(\vec{b_3} - \vec{b_1}) = 3\vec{b_1} + 2\vec{b_2} + 1\vec{b_3}.$$

Wir können auch schreiben $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Aufgabe 10 **a)** $aa^{-1} = eaa^{-1} = (aa^{-1})^{-1}aa^{-1}aa^{-1} = (aa^{-1})^{-1}aea^{-1} = (aa^{-1})^{-1}aa^{-1} = e$.

b) Mit Aufgabenteil **a)** erhalten wir $ae = aa^{-1}a = ea = a$.

c) Es gelte $ba = e$ und $ca = e$, d.h. b und c sind inverse von a. Dann gilt nach Teil **a)** auch $ac = e$, folglich erhalten wir mit Aufgabenteil **b)**: $b = be = bac = ec = c$.