UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
21.10.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass für beliebige Aussagen A, B und C gilt:

a) $\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \wedge (\neg B)$ und $\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B)$;

b) $A \wedge (B \vee C) \;\Leftrightarrow\; (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ und $A \vee (B \wedge C) \;\Leftrightarrow\; (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

c) $\big[A \Leftrightarrow B\big] \;\Leftrightarrow\; \big[(A \wedge B) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)\big]$.

Machen Sie sich bei **a)** und **b)** klar, was Sie gezeigt haben, indem Sie für A, B und C konkrete Aussagen einsetzen.

Aufgabe 2

Negieren Sie folgende Aussagen:

a) Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad und der Straßenbahn.

b) Ich gehe immer ins Kino, wenn “Herr der Ringe” oder “James Bond” laufen.

c) Wenn morgen schönes Wetter ist, gehen alle Studierenden in den Schlossgarten.

d) Es gibt einen Menschen, dem Mathematik keinen Spaß macht.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die beiden Aussagen K: „Peter hat kein Kind“ und T: „Peter hat keine Tochter“. Was lässt sich über die Aussagen $K \Rightarrow T$ bzw. $T \Rightarrow K$ sagen?

Aufgabe 4

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei die Menge

$$S_j := \{\, x \;:\; x \text{ studiert in Karlsruhe und ist im } j\text{-ten Hochschulsemester} \,\}$$

gegeben. Weiter seien E, P bzw. G die Mengen der Elektroingenieurwesen-, Physik- bzw. Geodäsie-Studierenden in Karlsruhe. Drücken Sie folgende Mengen mittels S_j, E, P und G aus:

a) Die Menge all derer, die in Karlsruhe im ersten Hochschulsemester sind und Physik studieren.

b) Die Menge aller Karlsruher Studierenden, die im ersten oder dritten Hochschulsemester sind, aber nicht Elektroingenieurwesen studieren.

c) Die Menge aller Studierenden in Karlsruhe.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Seien M_1, M_2 und M_3 Teilmengen einer Menge M. Zeigen Sie:

a) $M_1 \subset M_2 \;\Leftrightarrow\; M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$.

b) $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3 \;\Rightarrow\; M_1 \subset M_3$.

c) die Äquivalenz folgender Aussagen:

i) $M_1 \subset M_2$; **ii)** $M_1 \cap M_2 = M_1$; **iii)** $M_1 \cup M_2 = M_2$.

Aufgabe 6

a) Gegeben seien die Mengen $M_1 = \{2, 4, 7\}$ und $M_2 = \{2, 4, 8, 9\}$. Geben Sie jeweils eine injektive, eine nicht injektive, eine surjektive und eine nicht surjektive Abbildung von M_1 nach M_2 bzw. von M_2 nach M_1 an. Existieren auch bijektive Abbildungen?

b) Es seien X, Y und Z Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Weiter sei $h := g \circ f$ die Komposition von f und g. Zeigen Sie

i) Sind f und g bijektiv, so ist auch h bijektiv.

ii) Ist h surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

Aufgabe 7 (P)

Sei M eine Menge. Für $M_1, M_2 \subset M$ definiere die symmetrische Differenz von M_1 und M_2 durch

$$M_1 \,\Delta\, M_2 := (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1) = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2).$$

Zeigen Sie:

a) $M_1 \,\Delta\, M_1 = \emptyset$ für alle $M_1 \subset M$.

b) $M_1 \,\Delta\, \emptyset = M_1$ für alle $M_1 \subset M$.

c) $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3) = (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$ für alle $M_1, M_2, M_3 \subset M$.

Hinweis: Machen Sie sich anhand einer Skizze klar, was die Operation Δ bewirkt.

Aufgabe 8 (P)

Es seien $A(x)$ und $B(x)$ Aussagen, die von der Variablen x abhängen. In der Aussagenlogik werden die Quantoren $\forall$, $\exists$ ohne Bezug auf Mengen eingeführt: $\forall x : A(x)$ bzw. $\exists x : B(x)$. Der Übergang zur Schreibweise mit einer Menge M erfolgt durch die Definitionen

$$\begin{aligned} \forall x \in M : A(x) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall x : x \in M \Rightarrow A(x), \\ \exists x \in M : B(x) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists x : x \in M \wedge B(x). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) $\neg\big(\forall x \in M : A(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in M : \neg A(x)$;

b) $\neg\big(\exists x \in M : B(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in M : \neg B(x)$.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **4, 5 a), 6 und 7 a), b)**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2008/09
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Um den ersten Teil einzusehen, betrachten wir eine Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

Die vierte und die siebte Spalte sind gleich; die entsprechenden Aussagen haben also unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B stets den gleichen Wahrheitswert, und damit ist $\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \wedge (\neg B)$ bewiesen.

Nun zum zweiten Teil: Dabei benutzen wir, dass $D \;\Leftrightarrow\; \neg\neg D$ für jede Aussage D gilt (siehe Abschnitt 1.3 der Vorlesung). Wir erhalten

$$\neg A \vee \neg B \;\Leftrightarrow\; \neg\neg(\neg A \vee \neg B).$$

(Um Klammern zu sparen, schreiben wir hier $\neg A \vee \neg B$ statt $(\neg A) \vee (\neg B)$; auch im folgenden lassen wir solche Klammern im Zusammenhang mit $\neg$ weg.) Aufgrund des schon bewiesenen Teils können wir ein $\neg$ „in die Klammer hineinziehen“:

$$\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \;\Leftrightarrow\; \neg(\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \;\Leftrightarrow\; \neg(A \wedge B).$$

Damit ist auch der zweite Teil der Behauptung gezeigt.

Es sei A die Aussage „Ich bin dick“ und B die Aussage „Ich bin glücklich“. Dann haben wir gezeigt, dass die Negation der Aussage „Ich bin dick oder glücklich“ lautet: „Ich bin dünn und unglücklich“. Und wir haben gezeigt, dass die Negation der Aussage „Ich bin dick und glücklich“ lautet: „Ich bin dünn oder unglücklich“.

b) Den ersten Teil der Behauptung liefert die folgende Wahrheitstafel:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Den zweiten Teil zeigen wir mit der gleichen Methode wie eben: Wir verwenden $D = \neg\neg D$ und das in **a)** und **b)** schon Bewiesene.

$$\begin{aligned} A \vee (B \wedge C) \;&\Leftrightarrow\; \neg\neg\big(A \vee (B \wedge C)\big) \;\overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow}\; \neg\big(\neg A \wedge \neg(B \wedge C)\big) \;\overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow}\; \neg\big(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)\big) \\ &\overset{\textbf{b)}}{\Leftrightarrow}\; \neg\big((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C)\big) \;\overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow}\; \neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg C) \\ &\overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow}\; (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: „Das Wetter ist schön und ich bin dick oder glücklich“ ist genau dann wahr, wenn „Das Wetter ist schön und ich bin dick“ oder „Das Wetter ist schön und ich bin glücklich“ wahr ist. Und: „Das Wetter ist schön oder ich bin dick und glücklich“ ist genau dann wahr, wenn „Das Wetter ist schön oder ich bin dick“ und „Das Wetter ist schön oder ich bin glücklich“ wahr ist.

c) Wir stellen eine Wahrheitstafel auf (die Tafel für $\Leftrightarrow$ ist aus der Vorlesung bekannt):

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$(A \wedge B) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)$
w	w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	f	f	w	f	f
f	w	f	f	w	f	f	f
f	f	w	f	w	w	w	w

Aufgabe 2

a) Die Aussage „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad und der Straßenbahn“ entsteht aus den beiden Teilaussagen

A : „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad.“
B : „Alle Karlsruher fahren mit der Straßenbahn.“

mittels der logischen Verknüpfung $\wedge$ (und). Negation ergibt

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B),$$

also lautet die Negation obiger Aussage

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad fährt,
oder es gibt einen Karlsruher, der nicht mit der Straßenbahn fährt“

bzw. kurz

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad oder nicht mit der Straßenbahn fährt“.

b) Betrachten wir die drei Aussagen

A : „Im Kino läuft Herr der Ringe“,
B : „Im Kino läuft James Bond“,
C : „Ich gehe ins Kino“,

dann entspricht die Aussage „Ich gehe immer ins Kino, wenn Herr der Ringe oder James Bond laufen“: $(A \vee B) \Rightarrow C$. Wegen $(E \Rightarrow C) \;\Leftrightarrow\; (\neg E \vee C)$ ist

$$\neg\big((\underbrace{A \vee B}_{=E}) \Rightarrow C\big) \quad\Leftrightarrow\quad \neg\big(\neg(\underbrace{A \vee B}_{=E}) \vee C\big) \quad\Leftrightarrow\quad \big((A \vee B) \wedge \neg C\big).$$

In Worten: „Im Kino lief ein Herr der Ringe- oder ein James Bond-Film, und ich bin (dennoch) nicht ins Kino gegangen“.

c) Es sei A die Aussage „Morgen ist schönes Wetter“ und B die Aussage „Alle Studierenden gehen in den Schlossgarten“, dann müssen wir $A \Rightarrow B$ verneinen. Es gilt:

$$\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; \neg\big((\neg A) \vee B\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\neg(\neg A) \wedge (\neg B)\big) \;\Leftrightarrow\; A \wedge (\neg B).$$

Somit lautet die Negation des Satzes: „Morgen ist schönes Wetter, und es gibt einen Studierenden, der nicht in den Schlossgarten geht“.

d) Wir wollen $\exists x$ mit $A(x)$: $B(x)$ negieren, wobei die Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$ durch

$$A(x) : \text{„}x \text{ ist ein Mensch.“}$$
$$B(x) : \text{„Mathematik macht } x \text{ keinen Spaß.“}$$

gegeben sind. Wegen $\neg\big(\exists x \text{ mit } A(x)\text{: } B(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\forall x \text{ mit } A(x)\text{: } \neg B(x)\big)$ ist die Negation der ursprünglichen Aussage: „Allen Menschen macht Mathematik Spaß“.

Aufgabe 3

Offenbar gilt: Wenn wir wissen, dass Peter kein Kind hat, wissen wir insbesondere, dass er keine Tochter hat. Also ist die Aussage $K \Rightarrow T$ stets wahr.
Betrachten wir nun $T \Rightarrow K$. Nach Definition von $\Rightarrow$ ist diese Aussage wahr, falls T falsch oder K wahr ist. Falschheit von T bedeutet „Peter hat eine Tochter“. Die Aussage $T \Rightarrow K$ ist also wahr, falls Peter eine Tochter oder aber gar keine Kinder hat; sonst ist sie falsch.

Aufgabe 4

a) Die Menge all derer, die in Karlsruhe im ersten Hochschulsemester sind und Physik studieren, lässt sich ausdrücken durch

$$\big\{x \,:\, x \in S_1 \wedge x \in P\big\} = S_1 \cap P.$$

b) Die Menge aller Karlsruher Studierenden, die im ersten oder dritten Hochschulsemester sind, aber nicht Elektroingenieurwesen studieren, ist gleich

$$\big\{x \,:\, (x \in S_1 \vee x \in S_3) \wedge x \notin E\big\} = \big\{x \,:\, x \in S_1 \cup S_3 \wedge x \notin E\big\} = (S_1 \cup S_3) \setminus E.$$

c) Die Menge aller Studierenden in Karlsruhe entspricht

$$\big\{x \,:\, x \in S_1 \vee x \in S_2 \vee x \in S_3 \vee x \in S_4 \vee \ldots\big\} = \big\{x \,:\, \exists j \in \mathbb{N} : x \in S_j\big\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j.$$

Aufgabe 5

Gegeben seien eine Menge M sowie Teilmengen M_1, M_2, M_3 von M.

a) Um die Äquivalenz $M_1 \subset M_2 \;\Leftrightarrow\; M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ zu zeigen, weisen wir die Gültigkeit der Implikationen $M_1 \subset M_2 \;\Rightarrow\; M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ und $M_1 \subset M_2 \;\Leftarrow\; M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ nach.

„$\Rightarrow$“: Es gelte $M_1 \subset M_2$, sei also jedes Element von M_1 auch in M_2 enthalten. Wir müssen nun zeigen: $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ (bzw. in Worten: Jedes Element von M, das nicht in M_2 liegt, liegt auch nicht in M_1.)
Jedes Element der Menge $M \setminus M_2$ ist nicht in M_2 und damit erst recht nicht in M_1; folglich liegt es in $M \setminus M_1$. Also gilt $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$.

„$\Leftarrow$“: Es gelte $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$. Zu zeigen ist $M_1 \subset M_2$.
Nach der Voraussetzung $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ liegt jedes Element von M, das nicht in M_2 liegt, auch nicht in M_1. Dann ist notwendigerweise jedes Element von M_1 auch in M_2, da es ja sonst nicht in M_1 liegen würde. Also ist $M_1 \subset M_2$.

b) Es gelte $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$. Um $M_1 \subset M_3$ zu zeigen, müssen wir begründen, warum jedes Element aus M_1 auch in M_3 liegt. Sei hierzu $x \in M_1$ beliebig. Wegen $M_1 \subset M_2$ liegt x auch in M_2 und aufgrund von $M_2 \subset M_3$ ist x auch in M_3 enthalten.

Da $x \in M_1$ beliebig war, haben wir eingesehen, dass jedes Element aus M_1 ebenfalls in M_3 liegt, d.h. $M_1 \subset M_3$.

c) Die Äquivalenz der drei Aussagen i), ii), iii) erhalten wir am geschicktesten aus der Implikationskette „i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i)“.

„i) $\Rightarrow$ ii)“: Es gelte $M_1 \subset M_2$. Um nun die Gleichheit der beiden Mengen $M_1 \cap M_2$ und M_1 zu zeigen, brauchen wir nur die eine Inklusion $M_1 \subset M_1 \cap M_2$ einzusehen (die umgekehrte Inklusion gilt ohnehin). Sei dazu $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subset M_2$ ist auch $x \in M_2$. Dann ist aber x sowohl in M_1 als auch in M_2, also in $M_1 \cap M_2$.

„ii) $\Rightarrow$ iii)“: Hier müssen wir unter der Voraussetzung $M_1 \cap M_2 = M_1$ nur die Inklusion $M_1 \cup M_2 \subset M_2$ nachweisen. Sei also $x \in M_1 \cup M_2$. Ist $x \in M_2$, so ist nichts zu zeigen. Ist $x \in M_1 = M_1 \cap M_2$, so ist $x \in M_2$, was zu zeigen war.

„iii) $\Rightarrow$ i)“: Sei hierzu $x \in M_1$. Dann ist jedenfalls $x \in M_1 \cup M_2 = M_2$.

Aufgabe 6

a) Eine injektive Abbildung ist beispielsweise gegeben durch $f_1 : M_1 \to M_2, 2 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 7 \mapsto 8$. Nicht injektiv ist z.B. $f_2 : M_1 \to M_2$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 7 \mapsto 8$. Beide Abbildungen sind nicht surjektiv. Surjektive Abbildungen und damit auch bijektive Abbildungen von M_1 nach M_2 gibt es nicht, weil M_2 mehr Elemente als M_1 enthält.

Aus dem gleichen Grund existiert keine injektive Abbildung $M_2 \to M_1$. Ist etwa $g_1 : M_2 \to M_1$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 8 \mapsto 2$ und $9 \mapsto 7$, so ist g_1 nicht surjektiv. Definiert man z.B. $g_2 : M_2 \to M_1$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2$, $8 \mapsto 4$ und $9 \mapsto 7$, dann ist g_2 surjektiv.

b) **i)** Die Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ seien bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv.
Um die Bijektivität von $h := g \circ f$ zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass h sowohl injektiv als auch surjektiv ist.
Zuerst zeigen wir, dass h injektiv ist, dass also für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$\text{Aus } x_1 \neq x_2 \text{ folgt } h(x_1) \neq h(x_2).$$

Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ beliebig. Zu zeigen ist $h(x_1) \neq h(x_2)$.
Wegen der Injektivität von f gilt dann $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wegen der Injektivität von g folgt daraus aber $g\big(f(x_1)\big) \neq g\big(f(x_2)\big)$, und nach Definition der Komposition bedeutet dies gerade $h(x_1) \neq h(x_2)$.
Jetzt müssen wir noch die Surjektivität von h zeigen; diese folgt aus der Surjektivität von f und g. Zu zeigen ist $h(X) = Z$, also:

$$\text{Zu jedem } z \in Z \text{ existiert ein } x \in X \text{ mit } h(x) = z.$$

Sei dazu $z \in Z$ beliebig. Wir suchen nun ein $x \in X$ mit $h(x) = z$.
Da g surjektiv ist, existiert zu z ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es zu diesem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Es folgt:

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = z.$$

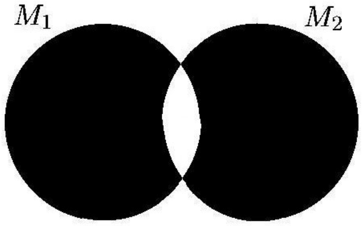
ii) Es seien $h = g \circ f$ surjektiv und g injektiv. Wir wollen zeigen, dass dann f surjektiv ist.
Sei dazu $y \in Y$ beliebig. Nun müssen wir begründen, warum es $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
Wir betrachten $g(y) \in Z$. Da $h : X \to Z$ surjektiv ist, existiert zu $g(y) \in Z$ ein $x \in X$ mit

$$g(y) = h(x) = g\big(f(x)\big).$$

Wegen der Injektivität von g folgt hieraus $y = f(x)$ und damit die Surjektivität von f.

Aufgabe 7 (P)

Sind M_1 und M_2 Teilmengen vom M, so entspricht $M_1 \,\Delta\, M_2$ der dunkel markierten Menge im nachstehenden Diagramm:



a) Für jedes $M_1 \subset M$ gilt gemäß Definition von Δ

$$M_1 \,\Delta\, M_1 = (M_1 \setminus M_1) \cup (M_1 \setminus M_1) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

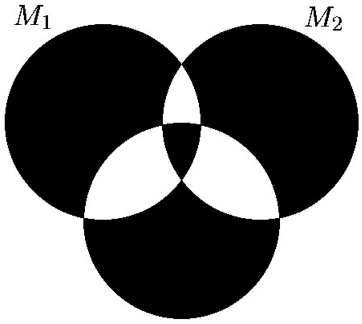
b) Für eine beliebige Teilmenge M_1 von M ist

$$M_1 \,\Delta\, \emptyset = (M_1 \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus M_1) = M_1 \cup \emptyset = M_1.$$

c) In dieser Aufgabe sollen wir die Assoziativität der Abbildung $\Delta : \mathrm{Pot}(M) \times \mathrm{Pot}(M) \to \mathrm{Pot}(M)$, $(M_1, M_2) \mapsto M_1 \,\Delta\, M_2$ zeigen, also

$$M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3) = (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3 \quad \text{für alle } M_1, M_2, M_3 \in \mathrm{Pot}(M).$$

Es seien $M_1, M_2, M_3 \subset M$. Wie wir uns graphisch überlegen können, entspricht sowohl $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$ als auch $(M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$ der im nachstehenden Diagramm dunkel markierten Fläche:



Demzufolge sind die Mengen $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$ und $(M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$ gleich; es gilt

$$\begin{aligned}
&M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3) \\
&= \big(M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)\big) \cup \big(M_2 \setminus (M_1 \cup M_3)\big) \cup \big(M_3 \setminus (M_1 \cup M_2)\big) \cup (M_1 \cap M_2 \cap M_3) \\
&= (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3.
\end{aligned}$$

Ein Element $x \in M_1 \cup M_2 \cup M_3$ gehört also genau dann zu $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3) = (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$, wenn x nicht in genau zwei der drei Mengen M_1, M_2, M_3 liegt.

Auf dieses Ergebnis können wir auch ohne graphische Überlegungen kommen, indem wir die folgenden acht Fälle unterscheiden:

Fall 1: $x \in M_1 \cap M_2 \cap M_3$.
Dann ist $x \in M_1$ und $x \notin M_2 \,\Delta\, M_3$ und damit $x \in M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$.
Ferner ist $x \in M_3$ und $x \notin M_1 \,\Delta\, M_2$, woraus $x \in (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$ folgt.

Fall 2: $x \in M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)$, also $x \in M_1$ und $x \notin M_2 \cup M_3$.
Da x nicht in $M_2 \cup M_3$ liegt, gehört x auch nicht zu $M_2 \,\Delta\, M_3$. Somit ist $x \in M_1 \setminus (M_2 \,\Delta\, M_3) \subset M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$.
Wegen $x \in M_1 \setminus M_2$ ergibt sich $x \in M_1 \,\Delta\, M_2$. Aufgrund von $x \notin M_3$ erhalten wir hieraus $x \in (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$.

Fall 3: $x \in M_2 \setminus (M_1 \cup M_3)$.
Da x in M_2 enthalten ist, aber weder in M_1 noch in M_3 liegt, folgen $x \in M_1 \,\Delta\, M_2$ und $x \in M_2 \,\Delta\, M_3$. Daraus schließen wir, dass $x \in (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$ bzw. $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$ gilt, weil x zu $(M_1 \,\Delta\, M_2) \setminus M_3$ bzw. zu $(M_2 \,\Delta\, M_3) \setminus M_1$ gehört.

Fall 4: $x \in M_3 \setminus (M_1 \cup M_2)$.
Dieser Fall entspricht dem zweiten mit vertauschten Rollen für M_1 und M_3.

Fall 5: $x \in (M_1 \cap M_2) \setminus M_3$, also $x \in M_1 \cap M_2$ und $x \notin M_3$.
Wegen $x \in M_1 \cap M_2$ ist $x \notin M_1 \,\Delta\, M_2$. Nun liegt x auch nicht in M_3, folglich erhalten wir $x \notin (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$.
Wegen $x \in M_1$ und $x \in M_2 \,\Delta\, M_3$, liegt x nicht in $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$.

Fall 6: $x \in (M_1 \cap M_3) \setminus M_2$.
Dieser Fall entspricht dem fünften mit vertauschten Rollen für M_2 und M_3.

Fall 7: $x \in (M_2 \cap M_3) \setminus M_1$.
Dieser Fall entspricht dem fünften mit vertauschten Rollen für M_1 und M_3.

Fall 8: $x \in M \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$.
Hier ist sofort klar, dass x weder in $(M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$ noch in $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$ liegt.

Aufgabe 8 (P)

a) Mit Hilfe von $\neg\big(\forall x : A(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \exists x : \neg A(x)$ und den Regeln aus Abschnitt 1.3 der Vorlesung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\neg\big(\forall x \in M : A(x)\big) &\overset{\text{per Def.}}{\Leftrightarrow} \neg\big(\forall x : x \in M \Rightarrow A(x)\big) \\
&\Leftrightarrow \exists x : \neg\big(x \in M \Rightarrow A(x)\big) \\
&\Leftrightarrow \exists x : \neg\big(\neg(x \in M) \vee A(x)\big) \\
&\Leftrightarrow \exists x : \neg\neg(x \in M) \wedge \neg A(x) \\
&\Leftrightarrow \exists x : x \in M \wedge \neg A(x) \\
&\overset{\text{per Def.}}{\Leftrightarrow} \exists x \in M : \neg A(x).
\end{aligned}$$

b) Wir schreiben die rechte Seite unter Verwendung der Regeln aus Abschnitt 1.3 um und benutzen den a)-Teil:

$$\begin{aligned}
\forall x \in M : \neg B(x) &\Leftrightarrow \neg\big(\neg(\forall x \in M : \neg B(x))\big) \\
&\overset{\text{a)}}{\Leftrightarrow} \neg\big(\exists x \in M : \neg(\neg B(x))\big) \\
&\Leftrightarrow \neg\big(\exists x \in M : B(x)\big).
\end{aligned}$$

Alternativ hätten wir analog wie im a)-Teil argumentieren können.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
28.10.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für $i \in \{1, 2, 3\}$ seien die Abbildungen $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}, \qquad f_3(x) = x^2 + x + 1.$$

a) Bestimmen Sie für jede Abbildung f_i den maximalen Definitionsbereich $D_i \subset \mathbb{R}$ sowie den Bildbereich $f_i(D_i)$.

b) Welche Abbildungen sind injektiv? Geben Sie zu den injektiven Abbildungen jeweils die Umkehrabbildung an.

c) Welche Kompositionen $f_i \circ f_j$ sind erlaubt? Ist $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$ erlaubt?

d) Geben Sie die Abbildung $f_1 \circ f_2$ explizit an.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

a) $|x - 4| = |x + 1|$;

b) $|2x| > |5 - 2x|$;

c) $\big|2 - |2 - x|\big| \leqslant 1$;

d) $|x + 1| + |x - 1| > 2$;

e) $\dfrac{3x}{1 + |x|} < 4x^2$;

f) $2x + \dfrac{1}{1 - x} \geqslant 1$.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\dfrac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leqslant \dfrac{|x| + |y|}{1 + |x| + |y|} \leqslant \dfrac{|x|}{1 + |x|} + \dfrac{|y|}{1 + |y|}$;

Tipp: Verwenden Sie $\frac{a}{1+a} = \frac{a+1-1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a}$ für $a \neq -1$.

b) $\max\{x, y\} = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$ und $\min\{x, y\} = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$.

Aufgabe 4

Entscheiden Sie jeweils, ob die Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

a) $\left\{x^2 - x + 2 \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$

b) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$

c) $\left\{x + \dfrac{1}{x} \,:\, 0 < x \leqslant 42\right\}$

d) $\left\{\dfrac{x^2}{1 + x^2} \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Die Mengen A und B seien beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $A + B := \{a + b : a \in A \text{ und } b \in B\} = \{x : \exists\, a \in A, b \in B : x = a + b\}$ eine beschränkte Menge ist und

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \qquad \text{sowie} \qquad \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

gelten.

Aufgabe 6

a) Bestimmen und skizzieren Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$:

$$\bigcup_{j=0}^{3} \Big[2j, 2j + 1\Big) \times \bigcup_{j=1}^{4} \Big(2(j - 1), 2j - 1\Big].$$

b) Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei das Intervall $M_j := [-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}] \subset \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} M_j = \{0\}.$$

Aufgabe 7 (P)

Für Elemente (x_1, x_2) und (y_1, y_2) der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ sei die Verknüpfung $* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch:

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) := (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

a) Überprüfen Sie, ob $*$ dem Assoziativ- bzw. dem Kommutativgesetz genügt.

b) Bestimmen Sie das *neutrale Element* bezüglich der Verknüpfung $*$, d.h. das Element $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$, für das $(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$ für jedes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt ist.

c) Berechnen Sie für alle Elemente $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, für die dies möglich ist, das zugehörige *inverse Element* $(x_1, x_2)^{-1}$ bezüglich der Verknüpfung $*$, d.h. das Element, für das $(x_1, x_2) * (x_1, x_2)^{-1} = (e_1, e_2)$ erfüllt ist.

Aufgabe 8 (P)

Es seien X_n eine n-elementige Menge ($n \in \mathbb{N}$) sowie $S_n := \{f : X_n \to X_n : f \text{ bijektiv}\}$. Gemäß Vorlesung bildet S_n bezüglich der Hintereinanderausführung „$\circ$" eine Gruppe $(S_n, \circ)$, die sog. *symmetrische Gruppe*. Zeigen Sie:

a) $(S_2, \circ)$ ist abelsch.

b) $(S_n, \circ)$ ist nicht abelsch für alle $n \geqslant 3$.

Wichtige Termine im Wintersemester 2008/2009

Übungsklausur zu HM I:	Samstag,	31.01.2009,	08:00 - 10:00 Uhr
Klausur zu HM I:	Montag,	16.03.2009,	08:00 - 10:00 Uhr

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 3, 5 und 7 a)**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl WS 2008/09

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Der Ausdruck $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ ist überall da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, also $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Der maximale Definitionsbereich von $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ist ebenfalls $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Polynome wie $f_3(x) = x^2 + x + 1$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, also $D_3 = \mathbb{R}$.

Zur Bestimmung der Bildmenge $f_1(D_1)$ von f_1 setzen wir die Abbildung f_1 aus zwei Abbildungen zusammen. Seien

$$s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto x - 1.$$

Dann sind sowohl s als auch t_{-1} bijektiv [s injektiv: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow 1/x_1 \neq 1/x_2 \Rightarrow s(x_1) \neq s(x_2)$; s surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x := 1/y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $s(x) = s(1/y) = y$. t_{-1} injektiv: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 1 \neq x_2 - 1 \Rightarrow t_{-1}(x_1) \neq t_{-1}(x_2)$; t_{-1} surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x := y + 1 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt $t_{-1}(x) = t_{-1}(y+1) = (y+1) - 1 = y$.] Nach Aufgabe 6 b) i) vom 1. Übungsblatt ist $s \circ t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bijektiv. ($s \circ t_{-1}$ ist erlaubt, weil $t_{-1}(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und s hierauf definiert ist!) Da für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$s \circ t_{-1}(x) = s(t_{-1}(x)) = s(x-1) = \frac{1}{x-1} = f_1(x)$$

gilt, folgt

$$f_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = (s \circ t_{-1})(\mathbb{R} \setminus \{1\})) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ist folgende Umformung sehr hilfreich

$$f_2(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + 2 \cdot f_1(x) \qquad \text{für } x \neq 1. \tag{1}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
y \in f_2(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \ y = f_2(x) \overset{(1)}{=} 1 + 2 \cdot f_1(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \ \frac{y-1}{2} = f_1(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{2} \in f_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
&\Leftrightarrow \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}
\end{aligned}$$

gilt $f_2(D_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Bei $f_3(x) = x^2 + x + 1$ ist eine quadratische Ergänzung günstig:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Der Graph der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x + \frac{1}{2})^2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, ihr Bildbereich ist also die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen $\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Für die Bildmenge von f_3 erhalten wir

$$f_3(D_3) = \left\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant \frac{3}{4}\right\} = \left[\frac{3}{4}, \infty\right).$$

b) Im a)-Teil haben wir bereits gesehen, dass f_1 injektiv ist. Alternativ: f_1 ist injektiv, denn für alle $x, y \in D_1$ mit $x \neq y$ gilt

$$x \neq y \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \neq y - 1 \quad \overset{x,y\neq 1}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1} \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) \neq f_2(y).$$

Die Abbildung f_2 ist ebenfalls injektiv. Dies folgt aus der Injektivität von f_1 und (1), denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$x \neq y \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) \neq f_1(y) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2 \cdot f_1(x) \neq 1 + 2 \cdot f_1(y) \quad \Leftrightarrow \quad f_2(x) \neq f_2(y).$$

Wegen $f_3(-1) = 1 = f_3(0)$ ist f_3 nicht injektiv.

Nun zu den Umkehrabbildungen: Eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ besitzt keine Umkehrabbildung, wenn die Zielmenge Y echt größer als die Bildmenge $f(X)$ ist. Wir betrachten daher die Abbildung $f : X \to f(X)$ (diese ist automatisch surjektiv!); dies ist eine bijektive Abbildung, welche wir umkehren können. Im folgenden seien also $f_i : D_i \to f_i(D_i)$.

Die Umkehrabbildung von $f_1 = s \circ t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nach Satz 3.6 gegeben durch

$$(f_1)^{-1} = (s \circ t_{-1})^{-1} = (t_{-1})^{-1} \circ s^{-1}.$$

Definieren wir

$$t_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad x \mapsto x + 1,$$

so sind die Abbildungen t_{-1} und t_1 einander invers, denn es gilt

$$\begin{aligned} t_1 \circ t_{-1}(x) &= t_1(t_{-1}(x)) = t_1(x-1) = (x-1)+1 = x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ t_{-1} \circ t_1(x) &= t_{-1}(t_1(x)) = t_{-1}(x+1) = (x+1)-1 = x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Die Abbildung s ist wegen $s \circ s(x) = s(s(x)) = \frac{1}{1/x} = x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu sich selbst invers, d.h. $s^{-1} = s$. Hiermit erhalten wir

$$(f_1)^{-1} = (t_{-1})^{-1} \circ s^{-1} = t_1 \circ s,$$

also

$$(f_1)^{-1} : f_1(D_1) \to D_1, \quad y \mapsto (t_1 \circ s)(y) = t_1(s(y)) = t_1(\frac{1}{y}) = \frac{1}{y} + 1 = \frac{1+y}{y}.$$

Zur Bestimmung von $(f_2)^{-1}$ lösen wir die Gleichung $f_1(x) = y$ nach x auf (hier sind $x \in D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y \in f_2(D_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$):

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} = y \quad &\Leftrightarrow \quad x + 1 = y(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad x(1-y) = -y - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-y-1}{1-y} = \frac{y+1}{y-1} = f_2(y). \end{aligned}$$

Also ist f_2 ihre eigene Umkehrabbildung: $(f_2)^{-1} = f_2$.

c) Erlaubt sind genau die Kompositionen $f_i \circ f_j$ mit $f_j(D_j) \subset D_i$. Hier sind dies:

$$f_3 \circ f_1, \quad f_3 \circ f_2, \quad f_3 \circ f_3, \quad f_2 \circ f_2, \quad f_1 \circ f_2.$$

Alle anderen sind nicht erlaubt.

Wegen $2 \in f(D_3)$ und $f_1(2) = 1$, aber $1 \notin D_2$ ist $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$ nicht erlaubt.

d) Es ist

$$f_1 \circ f_2 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_1(f_2(x)) = f_1\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1}} = \frac{1}{\frac{2}{x-1}} = \frac{x-1}{2}.$$

Aufgabe 2

a) Es gilt

$$\begin{aligned} |x-4| = |x+1| \quad &\Leftrightarrow \quad (x-4)^2 = (x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 10x = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Alternativ führen auch geometrische Überlegungen zum Ziel: Gesucht sind diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die denselben Abstand zu 4 wie zu -1 haben, d.h. x liegt genau in der Mitte: $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$.

Eine weitere Alternative besteht darin, die Fallunterscheidung $x \in (-\infty, -1]$, $x \in (-1, 4]$, $x \in (4, \infty)$ durchzuführen, um die Beträge aufzulösen...

b) $|2x| > |5-2x|$ besagt, dass notwendig $x \neq 0$ sein muss. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt aber

$$\begin{aligned} |2x| > |5-2x| \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{5-2x}{2x}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \underbrace{\frac{5-2x}{2x}}_{=\frac{5}{2x}-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{5}{2x} < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{5}\,x > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} &|2-|2-x|| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant 2-|2-x| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leqslant -|2-x| \leqslant -1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \leqslant |2-x| \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant 2-x \leqslant 3 \ \text{ oder } \ -3 \leqslant 2-x \leqslant -1 \\ \Leftrightarrow \quad & -1 \leqslant -x \leqslant 1 \ \text{ oder } \ -5 \leqslant -x \leqslant -3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{oder} \quad 3 \leqslant x \leqslant 5 \\ \Leftrightarrow \quad & x \in [-1,1] \cup [3,5]. \end{aligned}$$

d) Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Mit $|x+1| = -(x+1)$ und $|x-1| = -(x-1)$ ergibt sich

$$|x+1| + |x-1| = -2x.$$

Deshalb gilt

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1.$$

2. Fall: $x \in [-1, 1)$. Hier ist $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = -(x-1)$, also

$$|x+1| + |x-1| = 2.$$

Demzufolge lautet in diesem Fall die Ungleichung: $2 > 2$. Diese ist unlösbar.

3. Fall: $x \in [1, \infty)$. Wegen $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = x-1$ folgt

$$|x+1| + |x-1| = 2x$$

und damit

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1.$$

Zusammenfassend haben wir:

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \text{ oder } x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

e) Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x < 4x^2(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -4x^3 + 4x^2 - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < -4x\Big(x^2 - x + \frac{3}{4}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -4x\underbrace{\Big[\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big]}_{\geqslant \frac{1}{2} > 0} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < -4x \quad \Leftrightarrow \quad x < 0.
\end{aligned}$$

2. Fall: $x \geqslant 0$. Dann ist $|x| = x$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x < 4x^2(1+x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 4x^3 + 4x^2 - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < 4x\Big(x^2 + x - \frac{3}{4}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 4x\Big[\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - 1\Big] \\
&\Leftrightarrow \quad 4x > 0 \ \text{ und } \ \Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \ \text{ und } \ \Big|x + \frac{1}{2}\Big| > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \ \text{ und } \ \Big(x + \frac{1}{2} > 1 \ \text{ oder } \ x + \frac{1}{2} < -1\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \ \text{ und } \ \Big(x > \frac{1}{2} \ \text{ oder } \ x < -\frac{3}{2}\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Demzufolge gilt $\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2$ genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ oder $x > \frac{1}{2}$.

f) Auf keinen Fall kommt $x = 1$ in Frage, denn die Division durch 0 ist nicht definiert. Ansonsten multiplizieren wir die Ungleichung mit $1 - x$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Sei zunächst $1 - x > 0$, also $x < 1$. Multiplikation mit $1 - x$ liefert

$$\begin{aligned}
2x + \frac{1}{1-x} \geqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x(1-x) + 1 \geqslant 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2x^2 + 1 \geqslant 1 - x \\
&\Leftrightarrow \quad 3x - 2x^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3 - 2x) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ oder aber wenn $x \leqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$.

$x \geqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ bedeutet $x \geqslant 0$ und $x \leqslant 3/2$, also $0 \leqslant x \leqslant 3/2$. Da wir im 1. Fall nur $x < 1$ betrachten, ergibt sich also $0 \leqslant x < 1$.

$x \leqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ bedeutet $x \leqslant 0$ und $x \geqslant 3/2$, was nicht gleichzeitig möglich ist.

2. Fall: Jetzt sei $1 - x < 0$, also $x > 1$. Dann dreht sich bei Multiplikation mit $1 - x$ das $\geqslant$ um, und wir erhalten

$$2x + \frac{1}{1-x} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(1-x) + 1 \leqslant 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x(3 - 2x) \leqslant 0.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ oder aber wenn $x \leqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$.

$x \geqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ bedeutet $x \geqslant 0$ und $x \geqslant 3/2$, also $x \geqslant 3/2$.

$x \leqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ bedeutet $x \leqslant 0$ und $x \leqslant 3/2$, also $x \leqslant 0$. Da wir im 2. Fall nur $x > 1$ betrachten, ist dies hier nicht möglich.

Insgesamt: Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $0 \leqslant x < 1$ oder $x \geqslant 3/2$.

Aufgabe 3

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $0 \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$ (Dreiecksungleichung!) erhalten wir

$$0 < 1 \leqslant 1+|x+y| \leqslant 1+|x|+|y|,$$

woraus

$$\frac{1}{1+|x+y|} \geqslant \frac{1}{1+|x|+|y|} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{1+|x+y|} \leqslant -\frac{1}{1+|x|+|y|} \tag{2}$$

folgt. Mit zweimaliger Verwendung des Tipps kommen wir auf

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} = 1 - \frac{1}{1+|x+y|} \overset{(2)}{\leqslant} 1 - \frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}.$$

Damit ist die erste behauptete Ungleichung bewiesen. Nun zur zweiten: Es gilt

$$\begin{aligned} & |x|+|y| \geqslant |x| \geqslant 0 \\ \Rightarrow\ & 1+|x|+|y| \geqslant 1+|x| \geqslant 1 > 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{1}{1+|x|} \\ \overset{|x|\geqslant 0}{\Rightarrow}\ & \frac{|x|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|}. \end{aligned}$$

Ebenso (vertausche x und y) bekommen wir

$$\frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

b) Wiederum seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x - y \geqslant 0$ und $x - y < 0$.
1. Fall: $x \geqslant y$. Dann ist $|x-y| = x-y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x,y\}, \\ \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x,y\}. \end{aligned}$$

2. Fall: $x < y$. Dann ist $|x-y| = -(x-y) = -x+y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x,y\}, \\ \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x,y\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Mit quadratischer Ergänzung erkennen wir

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geqslant \frac{7}{4}.$$

Wegen $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4} \in \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ folgt

$$\min\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \inf\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \frac{7}{4}.$$

Da $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nach oben unbeschränkt ist, existieren Maximum und Supremum von $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ nicht.

b) Wir erkennen sofort, dass $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Zur Bestimmung des Supremums, also der kleinsten oberen Schranke, bemerken wir, dass der Ausdruck $(-1)^n + \frac{1}{n}$ für ungerade natürliche Zahlen $\leqslant 0$ ist. Da $(-1)^n = 1$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt und $n \mapsto \frac{1}{n}$ fallend ist, folgern wir aus $(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$.

Nun zur unteren Schranke. Wir behaupten: $\inf B = -1 \notin B$, d.h. das Minimum von B existiert nicht.

Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, dass -1 überhaupt eine untere Schranke von B ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt in der Tat

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant (-1)^n \geqslant -1.$$

Nun zeigen wir, dass -1 auch die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke K gibt, etwa $K = -1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade n gilt, folgt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$

$$-1 + \varepsilon \leqslant -1 + \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt $-1 = \inf B$.

c) Die Menge $C := \{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leqslant 42\}$ ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke von C, so müsste

$$\forall x \in (0, 42]: \quad x + \frac{1}{x} \leqslant \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n} \in (0, 42]$ einsetzen und erhielten: $\frac{1}{n} + n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von C.

Die Menge C ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geqslant 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in A$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von C sein. Also ist $\inf C = 2$ und wegen $2 \in C$ folgt auch $\min C = 2$.

d) Wir setzen $D := \{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\}$. Offenbar gilt $x^2(1+x^2)^{-1} \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $0 \in D$ (man setze $x = 0$). Damit folgt: Infimum und Minimum von D existieren, und es ist $\inf D = \min D = 0$.

Die Menge D ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant 1 + x^2.$$

Die letzte Ungleichung ist natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir zeigen nun, dass 1 sogar die *kleinste* obere Schranke ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von D ist. Wir müssen also ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1+x^2), \quad \text{also} \quad (1-\Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d.h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1-\Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für hinreichend große x offenbar erfüllt.

Aufgabe 5

Zunächst zum Supremum: Da A und B beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir müssen nun zeigen, dass $A+B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A+B) = \alpha+\beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha+\beta$ eine obere Schranke von $A+B$ ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.
Wählen wir ein beliebiges $x \in A+B$, so gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a+b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \leqslant \alpha$ und $b \leqslant \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a+b \leqslant \alpha+\beta.$$

Damit wissen wir, dass $\sup(A+B) \leqslant \alpha+\beta$ ist, d. h. $A+B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha+\beta$ ist eine obere Schranke.
Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl $< \alpha+\beta$ ist obere Schranke, d. h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha+\beta$ existiert ein $x \in A+B$ mit $x > \Gamma$.
Sei also $\Gamma < \alpha+\beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und, da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma - b$. Daher existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d. h. es ist $a+b > \Gamma$, und wegen $a+b \in A+B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A+B$ sein.
Nun zum Infimum: Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A+B$ nach unten beschränkt ist. Aus der Vorlesung kennen wir das folgende Resultat: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, M sei beschränkt. Setze $-M := \{-x : x \in M\}$. Dann ist γ genau dann eine untere Schranke von M, wenn $-\gamma$ obere Schranke von $-M$ ist. Hieraus folgt $\inf(M) = -\sup(-M)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\inf(A+B) &= -\sup\bigl(-(A+B)\bigr) = -\sup\bigl((-A)+(-B)\bigr) = -\bigl(\sup(-A)+\sup(-B)\bigr)\\ &= -\bigl(-\inf A + (-\inf B)\bigr) = \inf A + \inf B.\end{aligned}$$

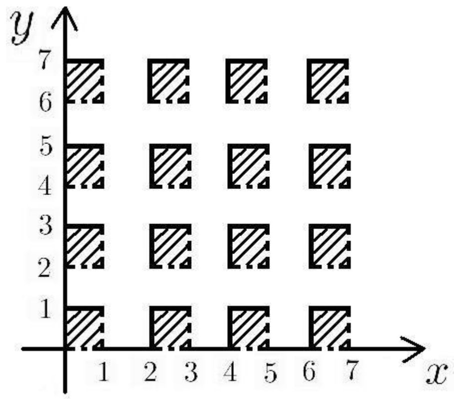
Aufgabe 6

a) Die Menge

$$A := \bigcup_{j=0}^{3} \Bigl[2j, 2j+1\Bigr) \times \bigcup_{j=1}^{4} \Bigl(2(j-1), 2j-1\Bigr].$$

ist durch die Vereinigung von halboffenen Intervallen und einem kartesischen Produkt gegeben:

$$\begin{aligned}A &= \bigl([0,1)\cup[2,3)\cup[4,5)\cup[6,7)\bigr) \times \bigl((0,1]\cup(2,3]\cup(4,5]\cup(6,7]\bigr)\\ &= \bigl\{(x,y) : x \in [0,1)\cup[2,3)\cup[4,5)\cup[6,7) \ \wedge \ y \in (0,1]\cup(2,3]\cup(4,5]\cup(6,7]\bigr\}\\ &= [0,1)\times(0,1] \cup [0,1)\times(2,3] \cup [0,1)\times(4,5] \cup [0,1)\times(6,7]\\ &\qquad \cup [2,3)\times(0,1] \cup [2,3)\times(2,3] \cup [2,3)\times(4,5] \cup [2,3)\times(6,7]\\ &\qquad \cup [4,5)\times(0,1] \cup [4,5)\times(2,3] \cup [4,5)\times(4,5] \cup [4,5)\times(6,7]\\ &\qquad \cup [6,7)\times(0,1] \cup [6,7)\times(2,3] \cup [6,7)\times(4,5] \cup [6,7)\times(6,7]\end{aligned}$$



b) Offenbar gilt $\{0\} \subset M_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und damit auch $\{0\} \subset \bigcap_{j\in\mathbb{N}} M_j$.

Ist andererseits $x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} M_j$, so bedeutet dies

$$\forall j \in \mathbb{N}: \quad -\frac{1}{j} \leqslant x \leqslant \frac{1}{j}.$$

Angenommen, es wäre $x < 0$. Aus $-1/j \leqslant x$ folgt dann durch Multiplikation mit j/x (dies ist eine negative Zahl): $-1/x \geqslant j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist.

Wäre $x > 0$, so folgte aus $x \leqslant 1/j$ durch Multiplikation mit j/x, dass $j \leqslant 1/x$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Erneut ein Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nach oben nicht beschränkt ist.

Also muss $x = 0$ gelten und wir haben auch $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} M_j \subset \{0\}$ gezeigt.

Aufgabe 7 (P)

a) Kommutativgesetz: Zeige: $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (y_1, y_2) * (x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ haben wir

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) * (y_1, y_2) &= (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = (y_1x_1 - y_2x_2, y_1x_2 + y_2x_1)\\ &= (y_1, y_2) * (x_1, x_2),\end{aligned}$$

also genügt $* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dem Kommutativgesetz.

Assoziativgesetz: Zu zeigen ist: $(x_1, x_2) * \big[(y_1, y_2) * (z_1, z_2)\big] = \big[(x_1, x_2) * (y_1, y_2)\big] * (z_1, z_2)$ für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

Wir formen zunächst die linke Seite um: Für $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2) * \big[(y_1, y_2) * (z_1, z_2)\big] = (x_1, x_2) * \big[(y_1z_1 - y_2z_2, y_1z_2 + y_2z_1)\big]\\ &= \big(x_1(y_1z_1 - y_2z_2) - x_2(y_1z_2 + y_2z_1), x_1(y_1z_2 + y_2z_1) + x_2(y_1z_1 - y_2z_2)\big)\\ &= \big(x_1y_1z_1 - x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1, x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1 - x_2y_2z_2\big).\end{aligned}$$

Und nun zur rechten Seite

$$\begin{aligned}&\big[(x_1, x_2) * (y_1, y_2)\big]*(z_1, z_2) = \big[(x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\big] * (z_1, z_2)\\ &= \big((x_1y_1 - x_2y_2)z_1 - (x_1y_2 + x_2y_1)z_2, (x_1y_1 - x_2y_2)z_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)z_1\big)\\ &= \big(x_1y_1z_1 - x_2y_2z_1 - x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2, x_1y_1z_2 - x_2y_2z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1\big).\end{aligned}$$

Ein Vergleich von rechter und linker Seite unter Berücksichtigung des Kommutativgesetzes von $+$ zeigt, dass beide Seiten gleich sind. Also genügt $* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dem Assoziativgesetz.

b) Gesucht ist $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt ist:

$$(x_1e_1 - x_2e_2, x_1e_2 + x_2e_1) = (x_1, x_2),$$

d.h. es soll für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x_1e_1 - x_2e_2 &= x_1\\ x_1e_2 + x_2e_1 &= x_2\end{aligned}$$

gelten. Koeffizientenvergleich liefert $e_1 = 1$ und $e_2 = 0$, also ist $(e_1, e_2) = (1, 0)$ das neutrale Element bzgl. $*$.

c) Gesucht ist für jedes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, für die das möglich ist, das zugehörige inverse Element $(x_1, x_2)^{-1}$ bzgl. der Verknüpfung $*$, d.h. $(x_1, x_2) * (x_1, x_2)^{-1} = (1, 0) = (e_1, e_2)$. Wir schreiben $(y_1, y_2) := (x_1, x_2)^{-1}$.

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (1, 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (1, 0)$$

gilt genau dann der Fall, wenn

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 = 1 \tag{3}$$
$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0 \tag{4}$$

gelten. Um y_1, y_2 zu bestimmen, betrachten wir zunächst $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$. Dann können wir die Gleichung (3) mit x_1 bzw. (4) mit x_2 multiplizieren und die resultierenden Gleichungen addieren:

$$x_1^2 y_1 + x_2^2 y_1 = x_1 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1^2 + x_2^2) y_1 = x_1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Setzen wir dies in (4) ein, so erhalten wir

$$x_1 y_2 + x_2 \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_2 = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Sind $x_1 = 0$ und $x_2 \neq 0$, dann lauten (3) und (4)

$$-x_2 y_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_2 = -\frac{1}{x_2} = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2},$$
$$x_2 y_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 0 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Sind $x_1 \neq 0$ und $x_2 = 0$, dann lauten (3) und (4)

$$x_1 y_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2},$$
$$x_1 y_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_2 = 0 = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Das Element $(x_1, x_2) = (0, 0)$ besitzt kein Inverses, weil (3) nie erfüllt werden kann.

Folglich ist für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ das jeweils zugehörige inverse Element bzgl. der Verknüpfung $*$ gegeben durch

$$(x_1, x_2)^{-1} = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

Bemerkung: In dieser Aufgabe haben wir gezeigt, dass $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, *)$ eine abelsche Gruppe ist (vgl. Multiplikation in $\mathbb{C}$).

Aufgabe 8 (P)

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt ($n \in \mathbb{N}$).

a) S_2 besteht aus genau zwei Abbildungen, nämlich

$$id : X_2 \to X_2, \quad 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2,$$
$$\tau : X_2 \to X_2, \quad 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1.$$

Offenbar gilt $id \circ \tau = \tau = \tau \circ id$. Also ist $\circ$ kommutativ und damit $(S_2, \circ)$ abelsch.

b) Wir betrachten zunächst den Fall $n = 3$. Es gibt genau $6 = 3!$ bijektive Abbildungen von X_3 nach X_3:

$$\begin{aligned}
id : X_3 \to X_3, &\quad 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 3,\\
\tau_{12} : X_3 \to X_3, &\quad 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 3,\\
\tau_{23} : X_3 \to X_3, &\quad 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 2,\\
\tau_{13} : X_3 \to X_3, &\quad 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 1,\\
\tau_{123} : X_3 \to X_3, &\quad 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 1,\\
\tau_{132} : X_3 \to X_3, &\quad 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 2.
\end{aligned}$$

Für $\tau_{12} \circ \tau_{23} : X_3 \to X_3$ gilt

$$\begin{aligned}
\tau_{12} \circ \tau_{23}(1) &= \tau_{12}(\tau_{23}(1)) = \tau_{12}(1) = 2,\\
\tau_{12} \circ \tau_{23}(2) &= \tau_{12}(\tau_{23}(2)) = \tau_{12}(3) = 3,\\
\tau_{12} \circ \tau_{23}(3) &= \tau_{12}(\tau_{23}(3)) = \tau_{12}(2) = 1.
\end{aligned}$$

Für $\tau_{23} \circ \tau_{12} : X_3 \to X_3$ gilt

$$\begin{aligned}
\tau_{23} \circ \tau_{12}(1) &= \tau_{23}(\tau_{12}(1)) = \tau_{23}(2) = 3,\\
\tau_{23} \circ \tau_{12}(2) &= \tau_{23}(\tau_{12}(2)) = \tau_{23}(1) = 1,\\
\tau_{23} \circ \tau_{12}(3) &= \tau_{23}(\tau_{12}(3)) = \tau_{23}(3) = 2.
\end{aligned}$$

Demzufolge ist $\tau_{12} \circ \tau_{23} \neq \tau_{23} \circ \tau_{12}$ und damit ist $(S_3, \circ)$ nicht abelsch.

Im Fall $n \geqslant 4$ können wir mit einer leichten Modifikation des Gegenbeispiels für $n = 3$ argumentieren: Wir setzen dazu $f : X_n \to X_n,\ \ f(1) := 2,\ f(2) := 1,\ f(3) := 3$ und $f(j) := j$ für jedes $j \in \{4, 5, \ldots, n\}$ sowie $g : X_n \to X_n,\ \ g(1) := 1,\ g(2) := 3,\ g(3) := 2$ und $g(j) := j$ für jedes $j \in \{4, 5, \ldots, n\}$. Dann gilt auch hier $f \circ g \neq g \circ f$, d.h. $(S_n, \circ)$ ist für $n \geqslant 4$ nicht abelsch.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
04.11.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$;

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$;

d) $6^n - 5n + 4$ ist durch 5 teilbar.

Aufgabe 2

a) Beweisen Sie die geometrische Summenformel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

b) Folgern Sie hieraus, dass für alle $w, z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$z^n - w^n = (z-w)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k.$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k.$$

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0, \infty)$ gilt:

$$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leqslant y^n.$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ erfüllen.

Aufgabe 5

Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von

a) z^3;

b) $1/z$;

c) $z \cdot w$;

d) $\overline{z}^2 + 1/w^2$.

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $A = \{\, z \in \mathbb{C} : |z+1+i| = |z-3-3i| \,\}$;

b) $B = \{\, z \in \mathbb{C} : |z-i| \geqslant 1 \text{ und } |z-1-2i| < 3 \,\}$;

c) $C = \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) \leqslant 1 \,\}$.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung sind:

a) $z^2 - 2z + 3 = 0$; **b)** $z^2 = |z|^2$.

Aufgabe 8

Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.
Was bedeutet dies geometrisch?

Aufgabe 9 (P)

a) Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

- **i)** $2xy \leqslant \varepsilon^2 x^2 + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\, y^2$;
- **ii)** $(x+y)^2 \leqslant (1+\varepsilon^2)x^2 + \left(1 + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\right) y^2$;
- **iii)** $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz \geqslant 0$.

b) Nun seien $x, y \in (0, \infty)$. Beweisen Sie:

- **i)** $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$;
- **ii)** $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 3, 4 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ stimmt die Behauptung, denn beide Seiten der Gleichung ergeben dann 1: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschluss (IS): Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Induktionsvoraussetzung, kurz: IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\tfrac{1}{2}n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \overset{\text{a)}}{=} 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2.$$

c) IA: Für $n = 1$ ist $\prod_{k=1}^{1}(1+\frac{1}{k})^k = (1+\frac{1}{1})^1 = 2 = \frac{2^2}{2} = \frac{(1+1)^{1+1}}{(1+1)!}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$ (IV). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k &= \Bigg(\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k\Bigg) \cdot \Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Big(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2} = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+2)!} \\ &= \frac{((n+1)+1)^{(n+1)+1}}{((n+1)+1)!}.\end{aligned}$$

d) IA: Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $6^1 - 5 \cdot 1 + 4 = 5$ ist durch 5 teilbar.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die Behauptung, sei also $6^n - 5n + 4$ durch 5 teilbar, etwa $6^n - 5n + 4 = 5l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. (IV)

Zu zeigen ist, dass dann auch $6^{n+1} - 5(n+1) + 4$ durch 5 teilbar ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}6^{n+1} - 5(n+1) + 4 &= 6 \cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 6\big(6^n - 5n + 4\big) + 25n - 25 \\ &\overset{\text{IV}}{=} 6 \cdot 5l + 25n - 25 = (\underbrace{6 \cdot l + 5n - 5}_{\in \mathbb{Z}}) \cdot 5.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Wir beweisen die behauptete Identität durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. (IV)

Für jedes $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ergibt sich damit

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \cdot \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^n+q^n-q^n\cdot q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind $w \neq z$ und $z \neq 0$, so setzen wir $q := \frac{w}{z}$. Dann ist $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und laut a) gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \Big(\frac{w}{z}\Big)^k = \frac{1-(\frac{w}{z})^n}{1-\frac{w}{z}} \quad &\Leftrightarrow \quad \Big(1-\frac{w}{z}\Big) \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\frac{w}{z}\Big)^k = 1 - \Big(\frac{w}{z}\Big)^n \\
&\overset{|\cdot z^n (\neq 0!)}{\Leftrightarrow} \quad z\Big(1-\frac{w}{z}\Big)\, z^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} w^k = z^n - w^n \\
&\Leftrightarrow \quad (z-w) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k = z^n - w^n.
\end{aligned}$$

Im Fall $w = z$ lautet die behauptete Gleichung $0 = 0$, diese ist offensichtlich wahr.

Wegen

$$\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k} w^k = \sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{0^{n-1-k}}_{=0,\text{ da } n-1-k \geqslant 1} w^k + 0^{n-1-(n-1)} w^{n-1} = 0^0 w^{n-1} = w^{n-1}$$

ist die Gleichung im Fall $z = 0$

$$(0-w) \sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k} w^k = -w \cdot w^{n-1} = -w^n = 0 - w^n$$

ebenfalls für jedes $w \in \mathbb{C}$ erfüllt.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k &\overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1} \Big(\frac{i}{2}\Big)^{l+1} = \frac{i}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \Big(\frac{i}{2}\Big)^l \overset{\text{a)}}{=} \frac{i}{2} \cdot \frac{1-(i/2)^n}{1-i/2} \cdot \frac{1+i/2}{1+i/2} \\
&= \frac{i}{2} \cdot \frac{1-(i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}}{1-i^2/4} = \frac{i}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \Big(1-(i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}\Big) \\
&= \frac{2}{5}\, i \Big(1+i/2\Big) + \frac{2}{5}\, i \Big(-(i/2)^n - (i/2)^{n+1}\Big) = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\, i \Big(-1-i/2\Big)(i/2)^n \\
&= \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{i^n}{2^n}.
\end{aligned}$$

Nun seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0,1,2,3\}$ mit $n = 4m + r$. Dann gilt

$$i^n = i^{4m+r} = i^{4m} \cdot i^r = (i^4)^m \cdot i^r = 1^m \cdot i^r = i^r$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{i^r}{2^n}.$$

Für $r = 0$ (also, falls n durch 4 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i \Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r = 1$ (also, falls n durch 4 mit Rest 1 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\, i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\, i + \frac{1}{5}\Big) \frac{i}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} + i \Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}\Big).$$

Für $r = 2$ (also, falls n durch 4 mit Rest 2 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{-1}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i\,\Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\Big).$$

Für $r = 3$ (also, falls n durch 4 mit Rest 3 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{i}{2}\Big)^k = \frac{2}{5}\,i - \frac{1}{5} + \Big(-\frac{2}{5}\,i + \frac{1}{5}\Big)\frac{-i}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} + i\,\Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n}\Big).$$

Wir lesen ab:

$$\operatorname{Re}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k\Big) = \begin{cases} -\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{i}{2}\Big)^k\Big) = \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5\cdot 2^n}\ , & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

Aufgabe 3

Es seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $x, y \in [0, \infty)$. Für $x = 0$ ist die behauptete Aussage klar. Für $x > 0$ ergibt sich

$$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \leqslant 0 \quad \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \leqslant 0 \quad \overset{2\text{ b)}}{\Leftrightarrow} \quad x^n - y^n \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leqslant y^n.$$

Zur Äquivalenz in $(*)$: Wegen $x > 0$ und $y \geqslant 0$ ist $\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \geqslant x^{n-1} > 0$.

Aufgabe 4

Wir bemerken zunächst, dass die Ungleichung $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ nur für $x \geqslant 2$ sinnvoll ist. Es gilt

$$x \leqslant 4 + \sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 \leqslant \sqrt{x-2}.$$

Im Fall $x \geqslant 4$ ist dies nach Aufgabe 3 äquivalent zu (man beachte $x - 4 \geqslant 0$)

$$\begin{aligned} (x-4)^2 \leqslant x - 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 \leqslant x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9x + 18 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x-6) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \big(x - 3 \leqslant 0 \text{ und } x - 6 \geqslant 0\big) \text{ oder } \big(x - 3 \geqslant 0 \text{ und } x - 6 \leqslant 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [3, 6]. \end{aligned}$$

Da wir nur $x \geqslant 4$ betrachtet haben, gilt $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$ in diesem Fall genau für $x \in [4, 6]$.
Für jedes $x \in [2, 4)$ gilt $x - 4 < 0$ und, da die Wurzel nach Definition nichtnegativ ist, genügt jedes $x \in [2, 4)$ der Ungleichung $x - 4 < 0 \leqslant \sqrt{x-2}$ und somit auch $x \leqslant 4 + \sqrt{x-2}$.
Insgesamt haben wir

$$x \leqslant 4 + \sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2, 6].$$

Aufgabe 5

a) Es gilt: $z^3 = (3-i)^3 = (3-i)(9-6i+i^2) = (3-i)(8-6i) = 24-18i-8i+6i^2 = 18-26i$. Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26. Ferner ist $|z^3| = \sqrt{18^2+(-26)^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$. Alternativ kann man $|z^3|$ auch berechnen, ohne z^3 bestimmt zu haben: $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{3^2+(-1)^2}^3 = \sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}$.

b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $1/z = 1/z \cdot \bar{z}/\bar{z} = \bar{z}/(z\bar{z})$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2-i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$. Der Betrag von $1/z$ ist $|1/z| = \sqrt{\frac{9}{100}+\frac{1}{100}} = \sqrt{1/10} = \sqrt{10}/10$, alternativ: $|1/z| = 1/|z| = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

c) Es ergibt sich $z \cdot w = (3-i)(-1+2i) = -3+6i+i-2i^2 = -1+7i$. Also hat $z \cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7. Außerdem gilt $|z \cdot w| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |z| \cdot |w|$.

d) Es ist $\bar{z}^2 = \left(\overline{3-i}\right)^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9-16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

$\bar{z}^2 + 1/w^2 = (8+6i) + (-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $8-\frac{3}{25} = \frac{197}{25}$ und Imaginärteil $6+\frac{4}{25} = \frac{154}{25}$. Der Betrag von $\bar{z}^2 + 1/w^2$ lautet $|\bar{z}^2 + 1/w^2| = \sqrt{197^2+154^2}/25 = \sqrt{2501}/5$.

Aufgabe 6

a) Hier handelt es sich um die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Punkt $-1-i$ den gleichen Abstand haben wie vom Punkt $3+3i$. Das ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte, also die Gerade $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z + 2$.

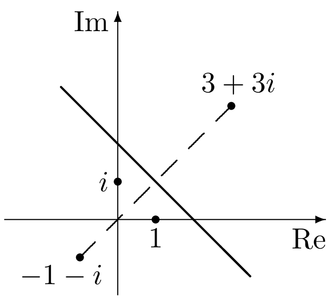
b) Dies ist der Schnitt zwischen dem Äußeren des Kreises um i mit Radius 1 (einschließlich der Kreislinie) und dem Inneren des Kreises um $1+2i$ mit Radius 3 (ohne Rand). Die Menge ist in der Skizze schraffiert.

c) Die komplexe Zahl $z = x+iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) liegt genau dann in dieser Menge, wenn

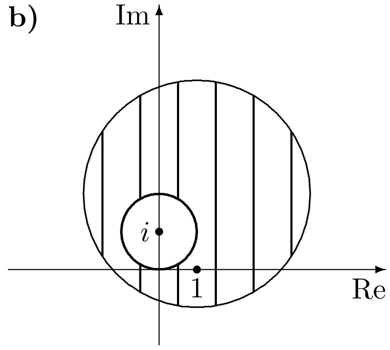
$$1 \geqslant \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}\big((x+iy)^2\big) = \operatorname{Re}(x^2+2ixy-y^2) = x^2-y^2$$

gilt, d. h. für $x^2 \leqslant 1+y^2$, also $|x| \leqslant \sqrt{1+y^2}$ bzw. $-\sqrt{1+y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1+y^2}$. Die Menge ist in der Skizze schraffiert; man beachte, dass es sich um eine unbeschränkte Menge handelt.

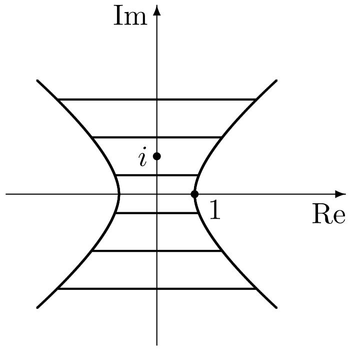
a)



b)



c)



Aufgabe 7

a) Es gilt $z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2$. Die Gleichung $z^2 - 2z + 3 = 0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $(z-1)^2 = -2$. Dies bedeutet $z - 1 = i\sqrt{2}$ oder $z - 1 = -i\sqrt{2}$, also hat die Gleichung die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ und $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

b) Mit dem Ansatz $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
z^2 = |z|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2aib - b^2 = a^2 + b^2 \\
&\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad a^2 - b^2 = a^2 + b^2 \text{ und } 2ab = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -2b^2 = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\
&\Leftrightarrow \quad b = 0 \text{ und } \big(a = 0 \text{ oder } b = 0\big) \\
&\Leftrightarrow \quad b = 0.
\end{aligned}$$

[In $(*)$ verwenden wir, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie den selben Real- und Imaginärteil besitzen.]
Also ist $z^2 = |z|^2$ genau dann erfüllt, wenn $\mathrm{Im}(z) = 0$ bzw. $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 8

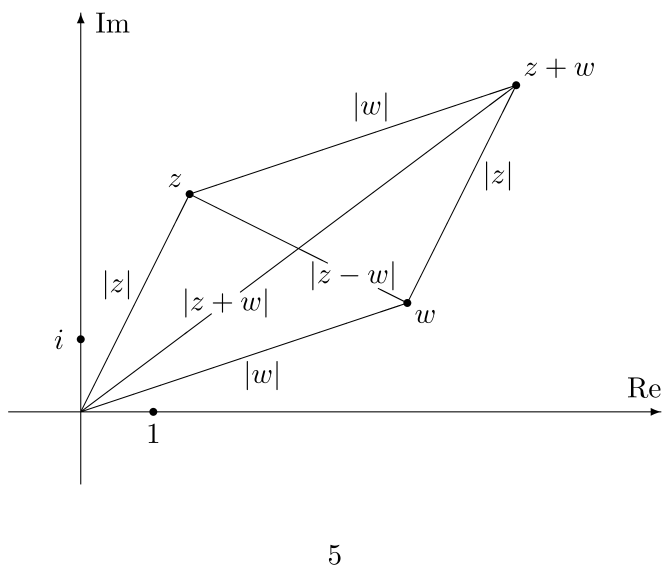
Mit Hilfe von $\mathrm{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \overline{\lambda})$ (für $\lambda \in \mathbb{C}$) erhalten wir

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \underbrace{w\overline{z}}_{=\overline{\overline{w}z} = \overline{z\overline{w}}} + w\overline{w} = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$|z-w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\big(z(\overline{-w})\big) + |-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2.$$

Addiert man diese Gleichungen, so folgt $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.
Geometrische Bedeutung: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalenlängen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen.



Aufgabe 9 (P)

a) Gegeben seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$.

i) Es gilt:

$$0 \leqslant (\varepsilon x - y/\varepsilon)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon xy/\varepsilon + y^2/\varepsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2xy \leqslant \varepsilon^2 x^2 + y^2/\varepsilon^2.$$

ii) Unter Verwendung von i) erhalten wir

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \overset{\text{i)}}{\leqslant} x^2 + \varepsilon^2 x^2 + y^2/\varepsilon^2 + y^2 = (1+\varepsilon^2)x^2 + \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\Big)y^2.$$

iii) Es ist

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\big(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz\big) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\big(x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 2xz + z^2 + y^2 + 2yz + z^2\big) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\big((x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2\big) \geqslant 0.$$

Hiermit ist die behauptete Ungleichung bewiesen, weil die Aussage der letzten Zeile offenbar wahr ist und nur Äquivalenzumformungen getätigt wurden.

b) Nun seien $x, y \in (0, \infty)$.

i) Es gilt:

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \overset{\text{Aufgabe 3}}{\Leftrightarrow} \quad x + y \leqslant x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Die letzte Ungleichung ist offenkundig wahr.
Nun zur zweiten Ungleichung:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \quad \overset{|\cdot\sqrt{x}\sqrt{y}>0}{\Leftrightarrow} \quad x\sqrt{y} + \sqrt{x}\,y \leqslant x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{y} - y\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant (x-y)\big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big).$$

Die letzte Aussage ist wahr, denn:
1. Fall: $x = y$. $0 \leqslant 0$ ✓
2. Fall: $x < y$. Wegen $x < y \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$ ist $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ wahr.
3. Fall: $x > y$. Wegen $x > y \Leftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y}$ folgt auch hier $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

ii) Es gilt

$$\big|\sqrt{x} - \sqrt{y}\big| \leqslant \sqrt{|x-y|} \quad \overset{\text{Aufgabe 3}}{\Leftrightarrow} \quad \big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big)^2 \leqslant \big(\sqrt{|x-y|}\big)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant |x-y|.$$

Im Fall $x \leqslant y$ ist dies äquivalent zu

$$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant y - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big) \leqslant 0.$$

Letzteres ist wahr wegen $x \leqslant y \Rightarrow \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.
Für $x \geqslant y$ (dies könnte man auch direkt aus obigem Fall folgern, weil der Ausdruck $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$ symmetrisch bzgl. Tausch $x \leftrightsquigarrow y$ ist) ergibt sich:

$$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant x - y \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y}\big(\sqrt{y} - \sqrt{x}\big) \leqslant 0.$$

Letzteres ist wahr wegen $x \geqslant y \Rightarrow \sqrt{x} \geqslant \sqrt{y}$.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
11.11.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

- **i)** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau die Zahlen 1 und -1 als Häufungswerte.
- **ii)** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.
- **iii)** $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.
- **iv)** $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2008, aber nicht monoton.
- **v)** $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

b) Entscheiden Sie jeweils durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt so, dass für alle $n \geqslant n_0$ gilt:

i) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$; **ii)** $|a_n| < 2\varepsilon^2$; **iii)** $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$; **iv)** $|a_n a_{n+1}| < \varepsilon$;
v) $|a_n a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$ an.

a) $a_n = \big(1 + (-1)^n\big)^n$ **b)** $a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + (n+1)/n, & n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Wert a konvergiert, und geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ an so, dass für alle $n \geqslant n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt:

a) $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$; **b)** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}}$.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3}$ **b)** $a_n = (-1)^n + 1/n$

c) $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$ **d)** $a_n = \dfrac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$

e) $a_n = n^4\Big(\sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}} - 1\Big)$ **f)** $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

Aufgabe 5

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass dann jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen den selben Grenzwert.

b) Beweisen Sie: Besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Teilfolge, so divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitze die konvergenten Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Folgt hieraus die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn die drei Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Aufgabe 7

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 8 (P)

Sei $b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$.

Hinweise: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ gilt $(1 + \frac{1}{n})^n < b_n$.
Setzt man für $n \geqslant j \geqslant 2$: $c_n^{(j)} := \sum_{k=0}^{j} \binom{n}{k} n^{-k}$, so gilt $(1 + \frac{1}{n})^n \geqslant c_n^{(j)}$ für $n \geqslant j$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^{(j)} = b_j$.

Aufgabe 9 (P)

a) Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge beschränkt ist.

b) Gegeben seien $0 \leqslant q < 1$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|a_n - a_{n+1}| \leqslant q^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 6, 7 und 8**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Etwa folgende Folgen erfüllen das Verlangte:

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

ii) $(b_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, \dots)$

iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^n n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = 2008 + \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

v) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n = 0$ für gerade n und $e_n = n$ für ungerade n.

b) **i)** In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. Die Folge $(a_n) = (\sqrt{n})$ erfüllt also die Voraussetzung. Allerdings ist (a_n) divergent.
Die harmonische Reihe wäre ein weiteres Gegenbeispiel.

ii) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\varepsilon = 2\delta^2$ für $\delta := \sqrt{\varepsilon/2} > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein n_0 so, dass für $n \geqslant n_0$ stets $|a_n| < 2\delta^2 = \varepsilon$ ist. Die Folge konvergiert also gegen Null.

iii) Etwa $(a_n) = ((-1)^n)$ erfüllt $|a_n + a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$ sogar für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (a_n) ist jedoch divergent.

iv) Die Folge (a_n) mit $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ erfüllt sicher $|a_n \cdot a_{n+1}| = 0 < \varepsilon$, ist aber divergent.

v) In diesem Fall ist (a_n) konvergent mit Grenzwert Null. Wäre (a_n) keine Nullfolge, so gäbe es zu vorgegebenem ε eine Teilfolge $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, für welche stets $|a_{k(n)}| \geqslant \sqrt{\varepsilon}$ wäre. Dann wäre aber stets $|a_{k(n)}^2| \geqslant \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon$ im Widerspruch zur Voraussetzung!

Aufgabe 2

a) Offenbar gilt

$$a_{2n} = \left(1 + (-1)^{2n}\right)^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, daher ergibt sich $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = \infty$. Weiter gilt

$$a_{2n+1} = \left(1 + (-1)^{2n+1}\right)^{2n+1} = (1-1)^{2n+1} = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist 0 ein Häufungswert der Folge. Weitere Häufungswerte gibt es nicht, denn zu jedem anderen Punkt kann man eine so kleine Umgebung wählen, dass nur endlich viele Folgenglieder a_n in ihr liegen. Somit ist $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

b) Wegen $1 + 1/2^n \to 1$ und $2 + (n+1)/n = 2 + 1 + 1/n \to 3$ für $n \to \infty$ ergeben sich hier die drei Häufungswerte 1, 2 und 3. Damit gilt $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = 3$.

Aufgabe 3

a) Wegen $a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$ konvergiert (a_n) für $n \to \infty$ gegen 2.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n - 2(n+1)}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}.$$

Daher ergibt sich

$$|a_n - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Wie eben gesehen, gilt dann $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. Also konvergiert (a_n) gegen 2.

Ist $\varepsilon = 10^{-10}$, so kann man beispielsweise $n_0 = 2 \cdot 10^{10} > 2 \cdot 10^{10} - 1$ nehmen. Damit gilt $|a_n - 2| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2 \cdot 10^{10}$.

b) Die Folge (a_n) ist eine Nullfolge: Es gilt $|a_n| \leqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon \in (0,1)$ ist

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{n+1}+1} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)^2 - 1.$$

Hieraus folgt: Wählt man zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > (\frac{1}{\varepsilon^2} - 1)^2 - 1$, dann gilt $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$, d.h. (a_n) konvergiert gegen 0.

Etwa für $n_0 = 10^{40}$ ist $|a_n - 0| < 10^{-10}$ für alle $n \geqslant 10^{40}$ erfüllt.

Aufgabe 4

a) Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3} = \frac{1/n + 3/n^2 - 4/n^3}{1/n^3 + 1/n + 4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{0+0+4} = 0.$$

b) Wegen $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1$ $(n \to \infty)$ und $a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \to -1$ $(n \to \infty)$ besitzt die Folge (a_n) die zwei Häufungswerte 1 und -1. Daher ist (a_n) divergent.

c) Wegen $(u-v)(u+v) = u^2 - v^2$, also $u - v = (u^2 - v^2)/(u+v)$ für $u + v \neq 0$, ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n &= \frac{9n^2 + 2n + 1 - 9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1} + 3n} = \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{2 + 1/n}{\sqrt{9 + 2/n + 1/n^2} + 3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

d) Der binomische Satz 4.11 (2) liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} n^k = \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{42} n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k := \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42} - n^{42} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{41} n^{41}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_{40} n^{40} + \alpha_{41} n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}} + \frac{\alpha_1}{n^{40}} + \ldots + \frac{\alpha_{40}}{n} + \alpha_{41} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

e) Wir verwenden die geometrische Summenformel 4.11 (1)

$$u^m - v^m = (u-v)\sum_{k=0}^{m-1} u^{m-1-k}v^k = (u-v)(u^{m-1} + u^{m-2}v + \ldots + uv^{m-2} + v^{m-1}) \qquad (*)$$

für $m = 10$. Setzen wir $b_n := \sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = n^4(b_n - 1) \overset{(*)}{=} n^4 \cdot \frac{b_n^{10} - 1^{10}}{b_n^9 + b_n^8 + \ldots + b_n + 1} = \frac{n^4(3n^{-4} + n^{-9})}{b_n^9 + b_n^8 + \ldots + b_n + 1} = \frac{3 + n^{-5}}{b_n^9 + b_n^8 + \ldots + b_n + 1}.$$

Wegen $b_n \to 1$ folgt $a_n \to \frac{3}{10}$ $(n \to \infty)$.

f) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{2}.$$

Wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$ $(n \to \infty)$ folgt mit 6.3 (4): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Aufgabe 5

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dann ist (a_n) beschränkt und (b_n) konvergent. Jedoch konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n = (-1)^n$ nicht.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Behauptet wird, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ gegen 0 konvergiert.

Da (a_n) beschränkt ist, existiert eine Konstante $K > 0$ so, dass $|a_n| \leqslant K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Deshalb ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leqslant K|b_n|.$$

Wegen $b_n \to 0$ konvergiert nach 6.3 (2) $|b_n| \to 0$ und nach 6.3 (5) auch $K|b_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Mit 6.3 (1) folgt $c_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 6

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n =: a$ und $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n). Wir zeigen, dass $(a_{k(n)})$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k(n)} = a$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$.
Wegen $a_n \to a$ für $n \to \infty$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geqslant n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$. Wegen $k(n) < k(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $k(N) \geqslant n_0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$ ist dann $k(n) \geqslant k(N) \geqslant n_0$. Demzufolge gilt $|a_{k(n)} - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$, d.h. $(a_{k(n)})$ konvergiert gegen a.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitze eine divergente Teilfolge $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Zu zeigen ist, dass dann auch (a_n) divergent ist.

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Annahme: (a_n) konvergiert.
Dann konvergiert laut a) jede Teilfolge von (a_n). Dies ist jedoch nicht möglich, weil vorausgesetzt wurde, dass (a_n) eine divergente Teilfolge besitzt. Also ist die Annahme falsch, d.h. die Folge (a_n) divergiert.

c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Im allgemeinen folgt aus der Konvergenz von (a_{2n}) und (a_{2n+1}) nicht die Konveregnz von (a_n).

Ist etwa die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$. Dann konvergieren die beiden Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}) für $n \to \infty$. Jedoch ist (a_n) divergent.

d) Sei (a_n) eine Folge. Behauptung:

$$(a_n) \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad (a_{2n}),\ (a_{2n+1}) \text{ und } (a_{3n}) \text{ konvergieren.}$$

"$\Rightarrow$": Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere. Gemäß a) konvergiert dann auch jede Teilfolge von (a_n). Insbesondere sind die drei Teilfolgen (a_{2n}), (a_{2n+1}) und (a_{3n}) konvergent.

"$\Leftarrow$": Nun ist die Konvergenz der drei Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ vorausgesetzt. Zu zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Wir setzen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} =: a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} =: b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} =: c$ und wollen zuerst $a = b = c$ zeigen.

Da (a_{6n}) Teilfolge von (a_{2n}) ist und (a_{2n}) konvergiert, konvergiert (a_{6n}) gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$.
Da (a_{6n}) Teilfolge von (a_{3n}) ist und (a_{3n}) konvergiert, konvergiert (a_{6n}) gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = c$.

Hieraus folgt aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts $a = c$.

Durch Betrachtung von (a_{6n+3}) ergibt sich analog $b = c$.

Wir wollen nun zeigen, dass (a_n) gegen a konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen $a_{2n} \to a$ für $n \to \infty$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2n} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant n_0,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle geraden } m \geqslant 2n_0$$

folgt. Wegen $a_{2n+1} \to b = a$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2n+1} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant n_1,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle ungeraden } m \geqslant 2n_1 + 1$$

folgt. Demnach gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant \max\{2n_0, 2n_1 + 1\}$

$$|a_m - a| < \varepsilon,$$

d.h. (a_n) konvergiert und zwar gegen a.

Aufgabe 7

Die Folge (a_n) sei durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gegeben. (Offenbar sind alle $a_n \geqslant 0$; also kann man die Wurzel ziehen.)
1. Beh.: Die Folge (a_n) ist monoton wachsend, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ gilt $a_n \geqslant a_{n-1}$.
Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geqslant \sqrt{2} = a_1$.
Induktionsschluss: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Für dieses n gelte $a_n \geqslant a_{n-1}$ (IV). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{IV}}{\geqslant} \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n.$$

2. Beh.: Die Folge (a_n) ist nach oben durch 2 beschränkt, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leqslant 2$.
Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = \sqrt{2} \leqslant 2$.
Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $a_n \leqslant 2$ (IV). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{IV}}{\leqslant} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Da (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert (a_n) gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Da die Folge (a_{n+1}) eine Teilfolge von (a_n) ist, gilt nach Teil a): $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in der Rekursionsformel ergibt sich für a die Gleichung

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2 + a}.$$

Quadrieren liefert $a^2 = 2 + a$ bzw. $0 = a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1)$, also $a = 2$ oder $a = -1$. Wegen $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $a \geqslant 0$ (vgl. 6.3 (3)). Daher ist $a = 2$ der Grenzwert von (a_n).

Aufgabe 8 (P)

Sei $b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist

$$\lim_{n\to\infty} b_n = e,$$

wobei die Eulersche Zahl e durch $e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ definiert ist.

1. Schritt: $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Um dies nachzuweisen, verwenden wir das Monotonie-Kriterium (vgl. Satz in 6.4): (b_n) ist monoton wachsend, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = b_n.$$

Außerdem ist (b_n) beschränkt, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \underbrace{1}_{=\frac{1}{2^0}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 3}}_{<\frac{1}{2^2}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}}_{<\frac{1}{2^{n-1}}} \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &\overset{4.11(1)}{=} 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \leqslant 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Das Monotonie-Kriterium liefert, dass (b_n) konvergiert.

2. Schritt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \geqslant e$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant k \geqslant 0$ gilt

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\underbrace{\frac{n}{n}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{<1} < \frac{1}{k!}.$$

Damit ergibt sich aus der binomischen Formel

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = b_n,$$

woraus $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ mit 6.3 (3) folgt.

3. Schritt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant e$.

Es sei $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geqslant 2$ fest. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant j$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \geqslant \sum_{k=0}^{j}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} =: c_n^{(j)}.$$

Nach 6.3 (3) erhalten wir für $n \to \infty$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant \lim_{n\to\infty} c_n^{(j)}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} c_n^{(j)} &= \sum_{k=0}^{j}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{j}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{j}\frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{j}\frac{1}{k!} = b_j \end{aligned}$$

folgt mit 6.3 (3) für $j \to \infty$

$$e \geqslant \lim_{j\to\infty} b_j.$$

Aufgabe 9 (P)

a) Es sei (a_n) eine Cauchy-Folge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n, m \geqslant n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Beh.: (a_n) ist beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante $K > 0$ mit $|a_n| \leqslant K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da (a_n) eine Cauchy-Folge ist, existiert insbesondere zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 = n_0(1)$ mit

$$\forall n, m \geqslant n_0 : \quad |a_n - a_m| < 1.$$

Folglich gilt

$$\forall n \geqslant n_0 : \quad |a_n - a_{n_0}| < 1$$

und für alle $n \geqslant n_0$ erhalten wir

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leqslant |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| \leqslant 1 + |a_{n_0}|.$$

Für $1 \leqslant n < n_0$ gilt offensichtlich

$$|a_n| \leqslant \max\big\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|\big\}.$$

Insgesamt ergibt sich für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leqslant \max\big\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\big\} =: K.$$

b) Gegeben seien $0 \leqslant q < 1$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|a_n - a_{n+1}| \leqslant q^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beh.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Wir zeigen zunächst: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall k \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_0 : \quad |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.

Für beliebige $k, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
a_{n+k} - a_n \quad &= \quad a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{l=0}^{k-2} a_{n+l+1}\right) - a_n \\
&\overset{j:=l+1}{=} \quad a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{n+j}\right) - a_n \\
&= \quad \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} (a_{n+j+1} - a_{n+j}).
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |a_{n+j+1} - a_{n+j}| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} q^{n+j} = q^n \sum_{j=0}^{k-1} q^j \\
&= q^n \, \frac{1 - q^k}{1 - q} \leqslant \frac{q^n}{1 - q}.
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $0 \leqslant q < 1$ konvergiert die Folge $(\frac{q^n}{1-q})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, daher finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{q^{n_0}}{1-q} < \varepsilon$. Demzufolge ist

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geqslant n_0 \text{ und } k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Hieraus folgt

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m, n \geqslant n_0.$$

[Denn: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geqslant n_0$ beliebig. Ohne Einschränkung sei $m > n$. Dann ist $k := m - n \in \mathbb{N}$ und nach (1) ergibt sich $|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.]

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
18.11.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ und $b_n := \dfrac{\left(1+\frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$.

a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

d) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Und was liefert das Wurzelkriterium?

Aufgabe 4

a) Es sei $p \in \mathbb{N}$ fest sowie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p})$ konvergiert und bestimmen Sie den Wert der Reihe.

b) Zeigen Sie, dass folgende Reihen konvergieren und bestimmen Sie ihre Reihenwerte.

i) $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$ für $p \in \mathbb{N}$ fest **ii)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

Hinweis: Es ist $\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)$ für $n > p$ und $\frac{y}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1-y^2}$ für $|y| \neq 1$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $a_n := \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dass aber das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst divergiert.

Bemerkung: Dies ist ein Beispiel dafür, dass das Cauchyprodukt zweier konvergenter Reihen nicht konvergieren muss, wenn beide Reihen nicht absolut konvergieren.

Aufgabe 6

Berechnen Sie für $q \in (0,1)$ den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)q^n.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit sich selbst. Bilden Sie dann das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Aufgabe 7 (P)

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + - \dots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + + - \dots$$

jedoch divergiert.

Aufgabe 8 (P)

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$b_0 := 0\,, \qquad b_1 := 1\,, \qquad b_{n+1} := \frac{b_n + b_{n-1}}{2} \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Beweisen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Konvergenzkriteriums, dass (b_n) konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $b_{n+1} - b_n = (-1)^n 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4, 5 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n := \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}}$. Wegen

$$a_n = \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(-2)^{3n}}{3^{2n}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{((-2)^3)^n}{(3^2)^n} = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)^n$$

gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{8}{9} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{6}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{8}{9} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ihr Wert ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{8}{9}\right)^n = -\frac{1}{6}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{8}{9}\right)^n - 1\right] \overset{\text{geom. Reihe}}{=} -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{1-(-8/9)} - 1\right] = \frac{4}{51}.$$

b) Nach dem binomischen Satz gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Wir haben also eine geometrische Reihe vor uns; wegen $|\frac{3}{4}| < 1$ ist sie konvergent und hat den Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4\,.$$

c) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{N}\frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow{N\to\infty} 1\,.$$

Folglich konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ und hat den Wert 1.

Aufgabe 2

a) Die Bernoullische Ungleichung liefert $2^n = (1+1)^n \geqslant 1+n \geqslant n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. es ist stets $\sqrt[n]{n} \leqslant 2$. Somit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}\right| \leqslant \frac{2}{n!} =: b_n\,.$$

Bekanntlich konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ (mit Reihenwert e), also ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ folgt mit dem Majorantenkriterium.

b) Für $n \geqslant 3$ ist der Nenner positiv und es gilt

$$\frac{n+4}{n^2-3n+1} \geqslant \frac{n+0}{n^2+0} = \frac{1}{n} \geqslant 0\,.$$

Aus der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ folgt mit dem Minorantenkriterium die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$.

c) Für $n \geqslant 3$ gilt $\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ und daher $(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n \leqslant (\frac{5}{6})^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{5}{6})^n$ ist also eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$. Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$ absolut konvergent.

d) Ist $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ gesetzt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(1+1/n)^2}{(2+2/n)(2+1/n)}.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(1+0)^2}{(2+0)(2+0)} = \frac{1}{4} < 1$. Das Quotientenkriterium liefert, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

e) Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $a_n := \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n} = (-1)^n b_n$ mit $b_n := \frac{1}{3n+(-1)^n}$. Die Folge (b_n) konvergiert gegen 0. Ferner ist (b_n) monoton fallend, denn für alle $n \geqslant 1$ gilt

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3(n+1)+(-1)^{n+1}}{3n+(-1)^n} \geqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 3 \geqslant (-1)^n - (-1)^{n+1} \quad\Leftrightarrow\quad 3 \geqslant 2(-1)^n.$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wegen

$$|a_n| = \frac{1}{3n+(-1)^n} \geqslant \frac{1}{3n+n} = \frac{1}{4n}$$

und der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Deshalb ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent.

f) Wegen $i^4 = (-1)^2 = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$i^{4m-3} = i, \qquad i^{4m-2} = -1, \qquad i^{4m-1} = -i, \qquad i^{4m} = 1.$$

Folglich erhalten wir für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{4N} \frac{i^n}{n} &= \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{i^{4m-3}}{4m-3} + \frac{i^{4m-2}}{4m-2} + \frac{i^{4m-1}}{4m-1} + \frac{i^{4m}}{4m}\right) \\
&= i \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-1}\right) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{4m} - \frac{1}{4m-2}\right) \\
&= i \left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + - \ldots + \tfrac{1}{4N-3} - \tfrac{1}{4N-1}\right) + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{6} + - \ldots + \tfrac{1}{4N} - \tfrac{1}{4N-2}\right) \\
&= i \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \frac{1}{2k}.
\end{aligned}$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergieren diese Summen für $N \to \infty$. Damit wissen wir: Wenn wir mit s_N die N-te Partialsumme der zu untersuchenden Reihe bezeichnen, dann konvergiert s_{4N} für $N \to \infty$. Für $m \in \{1,2,3\}$ gilt

$$s_{4N+m} = s_{4N} + \sum_{n=4N+1}^{4N+m} \frac{i^n}{n} \xrightarrow{N\to\infty} \lim_{N\to\infty} s_{4N}$$

wegen $|i^n/n| = 1/n$. Folglich konvergiert s_N für $N \to \infty$, d.h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ konvergiert. Sie ist aber nicht absolut konvergent, weil die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{i^n}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Aufgabe 3

a) Offenbar ist $a_1 = 2 > 0$. Für $n > 1$ gilt wegen $n > \sqrt{n}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Die Konvergenz von (a_n) gegen 0 ist klar wegen $1/\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Die erste Summe ist die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert; insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante C mit $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leqslant C$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$s_N \leqslant C - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \qquad \text{für jedes } N \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund von $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty$ für $N \to \infty$ folgt hieraus $s_N \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$, d.h. die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist tatsächlich divergent.

c) Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, weil die Folge (a_n) nicht monoton ist.

d) Zunächst zum Quotientenkriterium: Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1-\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Für gerades $n \in \mathbb{N}$ dagegen ergibt sich

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1+\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{3}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Es gilt also $\limsup(b_{n+1}/b_n) = \infty > 1$ und $\liminf(b_{n+1}/b_n) = 0 < 1$. Das Quotientenkriterium liefert somit keine Entscheidung.

Das Wurzelkriterium kann dennoch eine Entscheidung bringen, und so ist es in diesem Falle tatsächlich. Für gerades $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2},$$

d. h. es gilt $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} \geqslant \frac{3}{2} > 1$, und dies impliziert die Divergenz der Reihe.

Aufgabe 4

a) Es sei $p \in \mathbb{N}$ fest sowie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Um die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p})$ zu beweisen, betrachten wir die Folge der N-ten Partialsummen (s_N) und zeigen, dass diese für $N \to \infty$ konvergiert. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geqslant p$ gilt

$$s_N = \sum_{n=0}^{N}(a_n - a_{n+p}) = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_{n+p} = \sum_{n=0}^{p-1} a_n + \underbrace{\sum_{n=p}^{N} a_n}_{=\sum_{k=0}^{N-p} a_{k+p}} - \sum_{n=0}^{N-p} a_{n+p} - \sum_{n=N-p+1}^{N} a_{n+p}$$

$$= \sum_{n=0}^{p-1} a_n - \sum_{n=N-p+1}^{N} a_{n+p}.$$

Wegen $\lim_{N\to\infty} a_{N+1} = a, \lim_{N\to\infty} a_{N+2} = a, \ldots, \lim_{N\to\infty} a_{N+p} = a$ folgt

$$\sum_{n=N-p+1}^{N} a_{n+p} = a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+p} \xrightarrow{N\to\infty} \underbrace{a + a + \ldots + a}_{p \text{ Summanden}} = p\,a.$$

Demnach konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p})$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p}) = \lim_{N\to\infty} s_N = \sum_{n=0}^{p-1} a_n - p\,a.$$

b) i) Sei $p \in \mathbb{N}$ fest. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant p+1$ gilt

$$\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{(n-p)(n+p)} = \frac{1}{2p}\Big(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\Big).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-p^2} &= \frac{1}{2p}\sum_{n=p+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\Big) \overset{k:=n-(p+1)}{=} \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+p+1-p} - \frac{1}{k+p+1+p}\Big)\\ &= \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2p+1}\Big) = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - a_{k+2p}) \quad \text{mit } a_k := \frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

Da die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen $a = 0$ konvergiert, liefert der a)-Teil, dass die Reihe $\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-p^2}$ konvergiert und

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - a_{k+2p}) = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{2p-1} a_k - 2p\cdot 0 = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{2p-1}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{2p}\frac{1}{n}.$$

ii) Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Mit Hilfe von $\frac{y}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1-y^2}$ (für $y = x^{2^n}$) erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) \quad \text{mit } a_n := \frac{1}{1-x^{2^n}}.$$

Die Folge (a_n) ist konvergent mit Grenzwert 1, falls $|x| < 1$, und Grenzwert 0, falls $|x| > 1$. Gemäß a) konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ und ihr Wert lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - 1\cdot\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases}\frac{1}{1-x} - 1 & \text{für } |x| < 1\\ \frac{1}{1-x} & \text{für } |x| > 1\end{cases}.$$

Aufgabe 5

Zu $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sowie $b_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil (b_n) eine monoton fallende Nullfolge ist.
Für das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\cdot\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n-k+1}\cdot\sqrt{k+1}}.$$

Mit

$$0 \leqslant (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} + b \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{a}\,\sqrt{b} \leqslant \tfrac{1}{2}(a+b) \qquad (\text{für } a, b > 0)$$

folgt

$$\begin{aligned}|c_n| &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n-k+1}\cdot\sqrt{k+1}} \geqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\frac{1}{2}(n-k+1+k+1)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n+2}\\ &= \frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2+2/n}{1+2/n} \to 2 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

Demnach ist (c_n) keine Nullfolge und damit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent (Kontraposition von Satz 7.2 (4)).

Aufgabe 6

Sei $q \in (0.1)$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist absolut konvergent und es gilt nach einem Beispiel in Abschnitt 7.10 der Vorlesung

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

Diese Reihe ist als Cauchyprodukt absolut konvergenter Reihen ebenfalls absolut konvergent. Indem man das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ bildet, ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-q} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^k q^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n \sum_{k=0}^{n}(k+1)\right) \overset{\text{Aufg.1a), Üb.3}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)q^n.\end{aligned}$$

Für die gegebene Reihe erhalten wir daher

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)q^n = 2\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Aufgabe 7 (P)

Die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil $(1/\sqrt{n})$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right). \quad (*)$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{4n}} + \frac{1}{\sqrt{4n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, ist $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ eine divergente Minorante für die Reihe in $(*)$.

Aufgabe 8 (P)

Wir zeigen zunächst durch Induktion: $b_{n+1} - b_n = (-1)^n 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
IA: Für $n = 0$ gilt $b_1 - b_0 = 1 - 0 = (-1)^0 2^{-0}$, d.h. die Behauptung ist für $n = 0$ richtig.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte $b_{n+1} - b_n = (-1)^n 2^{-n}$ (IV). Dann folgt

$$b_{n+2} - b_{n+1} = \frac{b_{n+1} + b_n}{2} - b_{n+1} = -\frac{b_{n+1} - b_n}{2} \overset{\text{IV}}{=} -\frac{(-1)^n 2^{-n}}{2} = (-1)^{n+1} 2^{-(n+1)}\,.$$

Nun seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}|b_m - b_n| &= \left|\sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1} - b_k)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1}|b_{k+1} - b_k| = \sum_{k=n}^{m-1}|(-1)^k 2^{-k}| = \sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+j} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Wegen $(\frac{1}{2})^{n-1} \to 0$ $(n \to \infty)$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{1}{2})^{n-1} < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. Mit der eben gemachten Abschätzung folgt

$$|b_m - b_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \varepsilon \qquad \text{für alle } m > n \geqslant n_0\,.$$

Die Folge (b_n) ist also eine Cauchyfolge; das Cauchykriterium (Satz E5.6) liefert ihre Konvergenz.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
25.11.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}$$

gilt und dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius $R = 1$ besitzt. Berechnen Sie nun für $|z| < 1$ die Werte der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) z^{2n} .$$

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 = (n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1$ und $2n + 1 = 2(n+1) - 1$.

Aufgabe 2

Welche Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2}$

Aufgabe 3

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z-2i)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) z^n$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$

Aufgabe 4

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $f(rx) = rf(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{Q}$.

b) Ist f stetig in 0, so ist f stetig auf $\mathbb{R}$.

c) Ist f stetig auf $\mathbb{R}$, so gilt $f(x) = xf(1)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b, & x \leqslant 1, \\ c - x, & x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig ist und zudem $f(0) = f(2) = 0$ gilt.

Aufgabe 6

a) Beweisen Sie den *Cauchyschen Verdichtungssatz:*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Folge mit $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \ \text{konvergiert.}$$

Folgt dies auch, wenn man statt der Monotonie nur $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzt?

b) Es sei $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Setze für $x \geqslant 0$: $x^\alpha := \sqrt[q]{x^p}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a), dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha > 1$ ist.

Aufgabe 7 (P)

a) Beweisen Sie:

$$e^x - 1 \geqslant x\, e^{x/2} \qquad \text{für alle } x \in [0, \infty).$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} = \cos(\sin(x))\, e^{\cos(x)} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} = \sin(\sin(x))\, e^{\cos(x)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Real- und Imaginärteil von $e^{e^{ix}}$.

Aufgabe 8 (P)

Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen in den angegebenen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $f_n(x) = \dfrac{x + nx^2 + nx}{1 + nx}$ auf $I_1 = [0, \infty)$ bzw. auf $I_2 = [a, \infty)$ mit einem $a > 0$

b) $f_n(x) = (1 - x)^n$ auf $I_1 = [0, 1]$ bzw. auf $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$

c) $f_n(x) = nx(1 - x)^n$ auf $I = [0, 1]$

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2, 6 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion:

$$\text{Für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ ist } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n \text{ absolut konvergent, mit dem Wert } \frac{1}{(1-z)^{k+1}}.$$

Induktionsanfang: Für $k = 0$ haben wir wegen $\binom{n+k}{n} = \binom{n}{n} = 1$ die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ vor uns. Diese ist bekanntlich absolut konvergent und hat den Wert $\frac{1}{1-z}$.
Induktionsschluss: Sei $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Für dieses k konvergiere $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n$ absolut, mit dem Wert $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}$ (IV). Wir bilden das Cauchyprodukt der zwei Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n$ absolut konvergent und, da auch die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ absolut konvergiert, ist das Cauchyprodukt der Reihen nach Satz 7.10 absolut konvergent und hat als Wert das Produkt der beiden Reihenwerte:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^{k+2}} &= \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} z^m z^{n-m}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m}\right) z^n\,.\end{aligned}$$

Die Induktionsbehauptung ist also gezeigt, wenn wir noch $\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{n+k+1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ beweisen. Dazu verwenden wir vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$:
Induktionsanfang: Für $n = 0$ steht links $\binom{k}{0} = 1$ und rechts $\binom{k+1}{0} = 1$.
Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte $\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{n+k+1}{n}$ (IV). Dann folgt

$$\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m+k}{m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} + \binom{n+1+k}{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \binom{n+k+1}{n} + \binom{n+k+1}{n+1} \overset{4.10}{=} \binom{n+k+2}{n+1} = \binom{(n+1)+k+1}{n+1}\,.$$

Da die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut konvergent ist, ergibt sich für ihren Konvergenzradius $R \geqslant 1$. Zudem ist $\binom{n+k}{n} \geqslant 1$, also $\limsup_{n\to\infty} \binom{n+k}{n}^{1/n} \geqslant 1$ und damit $R \leqslant 1$. Folglich gilt $R = 1$.
Wegen $\binom{n+1}{n} = n+1$ und $\binom{n+2}{n} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wissen wir nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n = \frac{2}{(1-z)^3}\,.$$

Daraus folgt dann wegen $n^2 = (n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{3}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{2 - 3(1-z) + (1-z)^2}{(1-z)^3} = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}\end{aligned}$$

und wegen $2n+1 = 2(n+1)-1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)z^{2n} = -z^0 + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(z^2)^n = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z^2)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^n$$
$$= -1 + \frac{2}{(1-z^2)^2} - \frac{1}{1-z^2} = \frac{-(1-z^2)^2 + 2 - (1-z^2)}{(1-z^2)^2} = \frac{3z^2 - z^4}{(1-z^2)^2}\,.$$

Aufgabe 2

a) Die Reihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)!}\,z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1-2}{(n+1)!}\,z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)!}\,z^n\,.$$

Die erste Reihe ergibt $E(z)$, die zweite liefert für $z=0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)!}\,z^n = \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\,z^{n+1} = \frac{2}{z}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z}\big(E(z)-1\big)\,.$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)!}\,z^n$ dargestellte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = E(0) - 2 = -1\,, \qquad f(z) = E(z) - \frac{2E(z)-2}{z} = \frac{(z-2)E(z)+2}{z} \quad (z \neq 0)\,.$$

b) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2} = (z+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1} = (z+1)\sin(z+1)\,.$$

Aufgabe 3

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2}\cdot\frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1\,.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x=-1$ und $x=1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}\,.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geqslant \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}\,.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geqslant 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1,1)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞, d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Die Reihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = e^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{\left|e^{n(1+(-1)^n)}\right|} = \begin{cases} e^{2n/2n} = e\,, & n \text{ gerade}\,,\\ e^{0/2n} = 1\,, & n \text{ ungerade}\,,\end{cases}$$

und wegen $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d. h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-1}. Für $x = \pm e^{-1}$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n} .$$

Diese Reihe ist divergent, da für gerades n gilt: $e^{n(1+(-1)^n)}e^{-2n} = e^{2n}e^{-2n} = 1 \nrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} y^n$ betrachten. Diese Reihe hat Konvergenzradius e^{-2}, d.h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leqslant a_n \leqslant n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{|2^k z^{k^2}|} = \sqrt[k]{2^k} \cdot \sqrt[k]{|z|^{k^2}} = 2|z|^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^k z^{k^2}| = 2^k \nrightarrow 0$ $(k \to \infty)$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

f) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| = 1$ gilt

$$\left| \frac{(z+3i)^n}{n^2} \right| = \frac{|z+3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z + 3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| \leqslant 1$.

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Wegen $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$ ist $f(0) = 0$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ folgt aus $0 = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$

$$f(-x) = -f(x). \tag{1}$$

Für jedes $p \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt nach $(p-1)$-maliger Verwendung der Voraussetzung

$$f(px) = pf(x).$$

Hieraus folgt mit (1)

$$f(px) = pf(x) \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Für alle $q \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich damit

$$f(x) = f(q\,\tfrac{1}{q}x) = q\,f(\tfrac{1}{q}x) \quad \Rightarrow \quad f(\tfrac{1}{q}x) = \tfrac{1}{q}\,f(x). \tag{3}$$

Sei nun $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$f(rx) = f(\tfrac{p}{q}x) \overset{(2)}{=} pf(\tfrac{1}{q}x) \overset{(3)}{=} \tfrac{p}{q}f(x) = rf(x).$$

b) Sei f stetig in 0, d.h. für alle reellen Folgen (x_n) mit $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt $f(x_n) \to f(0)$ $(n \to \infty)$.

Beh.: f ist stetig auf $\mathbb{R}$, d.h. f ist stetig in y für alle $y \in \mathbb{R}$.

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig und (x_n) sei eine reelle Folge mit $x_n \to y$ $(n \to \infty)$. Zu zeigen ist $f(x_n) \to f(y)$ $(n \to \infty)$. Es gilt

$$f(x_n) - f(y) \stackrel{(1)}{=} f(x_n) + f(-y) = f(x_n + (-y)) = f(x_n - y) \xrightarrow{n\to\infty} f(0) \stackrel{\text{a)}}{=} 0,$$

denn $x_n - y \to 0$ $(n \to \infty)$ und f ist im Nullpunkt stetig nach Voraussetzung. Also folgt

$$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(y),$$

d.h. f ist stetig in y.

c) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Folge (r_n) rationaler Zahlen mit $r_n \to x$ für $n \to \infty$ (vgl. Beispiel (5) in Abschnitt 6.2). Aufgrund der Stetigkeit von f ergibt sich

$$f(r_n) \to f(x) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Andererseits ist

$$f(r_n) = f(r_n \cdot 1) \stackrel{\text{a)}}{=} r_n f(1) \to x f(1) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt $f(x) = xf(1)$.

Aufgabe 5

Es gilt $f(0) = b$ und $f(2) = c - 2$. Aus $f(0) = f(2) = 0$ folgt daher $b = 0$ und $c = 2$. Auf $(-\infty, 1)$ und auf $(1, \infty)$ ist f nach Satz 8.3 stetig. Gemäß Satz 8.9 ist f stetig in 1 genau dann, wenn

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1+} f(x)$$

gilt. Nun haben wir

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = 2 + a = f(1) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 1+} f(x) = 2 - 1 = 1\,;$$

also ist f genau für $a = -1$ stetig.

Aufgabe 6

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_{n+1} \leqslant a_n$ und $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

Beweis:

"$\Rightarrow$": Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Wir setzen $b := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Um die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ zu zeigen, müssen wir begründen, dass die Folge $(s_K)_{K\in\mathbb{N}} := (\sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k})_{K\in\mathbb{N}}$ für $K \to \infty$ konvergiert. Da (a_n) monoton fallend ist, gilt für jedes $K \in \mathbb{N}$

$$b \geqslant a_1+a_2+(a_3+a_4)+(a_5+\ldots+a_8)+\ldots+(a_{2^{K-1}+1}+\ldots+a_{2^K}) \geqslant \frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\ldots+2^{K-1}a_{2^K}.$$

Also ist $s_K = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^K a_{2^K} \leqslant 2b$ für jedes $K \in \mathbb{N}$, d.h. $(s_K)_{K\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Wegen $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(s_K)_{K\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Nach Satz 6.4 ist $(s_K)_{K\in\mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

“$\Leftarrow$”: Nun konvergiere $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. Wir schreiben wie zuvor $(s_K)_{K\in\mathbb{N}} := (\sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k})_{K\in\mathbb{N}}$. Nach Voraussetzung ist (s_K) konvergent, etwa $s_K \to s$ $(K \to \infty)$.

Ist $b_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$ für $N \in \mathbb{N}$ gesetzt, so gilt für jedes K mit $2^K \geqslant N$

$$\begin{aligned} b_N &= a_1 + a_2 + \ldots + a_N \leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \ldots + a_7) + \ldots + (a_{2^K} + \ldots + a_{2^{K+1}-1}) \\ &\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^K a_{2^K} = s_K \leqslant s. \end{aligned}$$

Also ist (b_N) beschränkt. Da (b_N) überdies monoton wachsend ist, liefert Satz 6.4 die Konvergenz von (b_N), d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Setzt man statt der Monotonie nur $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraus, so ist die Aussage i.a. falsch. Ist beispielsweise die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{falls } n = 2^k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{16}, \ldots)$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$, jedoch ist $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ divergent.

b) Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ setze $a_n := \frac{1}{n^\alpha}$. Dann genügt (a_n) den Voraussetzungen von Teil a). Dieser liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergent} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big)^k \quad \text{konvergent}$$

$$\overset{\text{geom. Reihe}}{\Leftrightarrow} \quad \left|\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Aufgabe 7 (P)

a) Laut Bernoullischer Ungleichung ist $(1+y)^n \geqslant 1+ny$ für alle $y \geqslant -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere für $y = 1$ ergibt sich $2^n = (1+1)^n \geqslant 1+n$ bzw. $\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Damit gilt für jedes $x \geqslant 0$

$$x\, e^{x/2} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x^{n+1}}{n!} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1.$$

b) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx) + i\sin(nx)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} \\ &= e^{e^{ix}} = e^{\cos(x) + i\sin(x)} = e^{\cos(x)} e^{i\sin(x)} \\ &= e^{\cos(x)} \big[\cos(\sin(x)) + i\sin(\sin(x))\big] \\ &= e^{\cos(x)} \cos(\sin(x)) + i\, e^{\cos(x)} \sin(\sin(x)). \end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt die Identitäten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} = e^{\cos(x)} \cos(\sin(x)) \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} = e^{\cos(x)} \sin(\sin(x)).$$

Aufgabe 8 (P)

a) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f_n(0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Für $x > 0$ gilt

$$f_n(x) = \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} = \frac{x/n + x^2 + x}{1/n + x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x^2 + x}{x} = x + 1\,.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Auf $[0, \infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da die Funktion f in 0 unstetig ist, alle f_n dort aber stetig sind (vgl. Satz E7.5 (b)).

Auf $[a, \infty)$ mit einem $a > 0$ liegt dagegen gleichmäßige Konvergenz vor. Für jedes $x \in [a, \infty)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left|\frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx} - (x + 1)\right| = \left|\frac{x + nx^2 + nx - (x + 1)(1 + nx)}{1 + nx}\right| \\ &= \left|\frac{x + nx^2 + nx - x - nx^2 - 1 - nx}{1 + nx}\right| = \left|\frac{-1}{1 + nx}\right| \leqslant \frac{1}{1 + na} =: c_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \end{aligned}$$

Nach Satz E7.4 (a) konvergiert (f_n) auf $[a, \infty)$ gleichmäßig gegen f.

b) Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in (0, 1]$, so folgt $|1 - x| < 1$ und damit

$$f_n(x) = (1 - x)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Auf $[0, 1]$ ist diese Funktion unstetig, im Gegensatz zu den Funktionen f_n; also kann die Konvergenz auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig sein.

Auf $[\frac{1}{2}, 1]$ liegt jedoch gleichmäßige Konvergenz vor: Für alle $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ gilt wegen $|1 - x| \leqslant \frac{1}{2}$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = |(1 - x)^n| = |1 - x|^n \leqslant 2^{-n}\,,$$

und nach Satz E7.4 (a) bedeutet dies gleichmäßige Konvergenz.

c) Offenbar gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0, 1]$ ist $q := 1 - x \in [0, 1)$ und es ergibt sich

$$f_n(x) = nxq^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

(Dass $nq^n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, folgt daraus, dass wegen $\sqrt[n]{nq^n} \to q < 1$ für $n \to \infty$ die Reihe über nq^n konvergiert.) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion f mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

Obwohl die Grenzfunktion f stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Gemäß Definition konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen f, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ \forall x \in [0, 1]: \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Negation liefert die Bedingung, dass die Funktionenfolge (f_n) nicht gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen f konvergiert:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0\ \exists x \in [0, 1]: \quad |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon.$$

Wegen

$$f_n(\tfrac{1}{n+1}) = n \cdot \tfrac{1}{n+1}(1 - \tfrac{1}{n+1})^n = \tfrac{n}{n+1}(\tfrac{n}{n+1})^n = \tfrac{n}{n+1}(\tfrac{n+1}{n})^{-n} = \tfrac{1}{1+1/n}(1 + \tfrac{1}{n})^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}$$

gilt $|f_n(\frac{1}{n+1})| \geqslant \frac{1}{2}e^{-1}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Ist $\varepsilon := \frac{1}{2}e^{-1}$ gesetzt, dann finden wir also zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geqslant n_0$ und ein $x \in [0, 1]$ mit $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \geqslant \varepsilon$ (nämlich $x = \frac{1}{n+1}$). Dies schließt gleichmäßige Konvergenz aus.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
02.12.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\sin(2x) = 2\sin x\,\cos x$

b) $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

c) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\,\cos\dfrac{x-y}{2}$

d) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\,\cos\dfrac{x-y}{2}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle x_0 bzw. z_0. Wie groß ist der Konvergenzradius?

a) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = 1$

b) $f(z) = \dfrac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 2$

c) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0$

Hinweis: Benutzen Sie in **a)** und in **c)** die Additionstheoreme für Sinus bzw. Cosinus. In **b)** hilft $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{42}\left(\left(1+\frac{42}{x}\right)^{42} - 1\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2 - x}{x^2 - x - 6}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} \qquad (a > 0 \text{ fest})$

f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x} - 1}{x}$

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie alle $x \in (0, \infty)$, die $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ erfüllen.

b) Zeigen Sie: Die Ungleichung $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

Die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \qquad x \in [0,2].$$

a) Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: Ist eine Funktion $g : [a,b] \to [a,b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $x_0 \in [a,b]$ mit $g(x_0) = x_0$.

b) Wenden Sie **a)** auf f an, um zu zeigen, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.

c) Nun sei $y_0 \in [0,2]$ gegeben. Die Folge (y_n) wird rekursiv definiert durch $y_{n+1} := f(y_n)$. Konvergiert diese Folge?

Aufgabe 6

a) Es sei $a \in (0,\infty)$. Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$x_0 := a\,, \qquad x_n := \sqrt{x_{n-1}}\,, \qquad y_n := 2^n(x_n - 1) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $\ln a$.

b) Beweisen Sie für alle $x, y \in (0,\infty)$ die Abschätzung $\dfrac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln \dfrac{x+y}{2}$.

c) Zeigen Sie, dass $\ln x < x - 1$ für alle $x \in (0,\infty)$ mit $x \neq 1$ gilt.

Aufgabe 7 (P)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen in den angegebenen Intervallen I auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ auf $I = (-1,1]$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ auf $I = \mathbb{R}$

Klausur zur HM I: Montag, 16.03.2009, 08:00 - 10:00 Uhr

Anmeldeschluss: Freitag, 13.02.2009 (Vorlesungsende WS 08/09)

Detaillierte Informationen zur Prüfungsanmeldung entnehmen Sie bitte unserer Vorlesungshomepage

www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1schneider/lehre/hm12008w/.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 5 und 6**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2008/09
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Das Additionstheorem $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x\,.$$

b) Ebenso folgt aus $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ die Gleichung

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x\,,$$

und mit der aus der Vorlesung bekannten Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x\,, \\ \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1\,. \end{cases}$$

c) Das Additionstheorem liefert wegen $\cos(-b) = \cos b$ und $\sin(-b) = -\sin b$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b\,.$$

Mit $a := \frac{1}{2}(x+y)$ und $b := \frac{1}{2}(x-y)$ erhält man also

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \\ &= \big(\sin a \cos b + \cos a \sin b\big) + \big(\sin a \cos b - \cos a \sin b\big) = 2 \sin a \cos b\,. \end{aligned}$$

d) Genau wie eben überlegen wir uns zunächst

$$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

und erhalten dann mit $a := \frac{1}{2}(x+y)$ und $b := \frac{1}{2}(x-y)$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ &= \big(\cos a \cos b - \sin a \sin b\big) + \big(\cos a \cos b + \sin a \sin b\big) = 2 \cos a \cos b\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1+z-1) = \sin(1)\cos(z-1) + \cos(1)\sin(z-1) \\ &= \sin(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{2k} + \cos(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} \sin(1)\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}\,, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1)\,\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

b) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung der Identität $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$

$$f(z) = \frac{2/3}{3+(z-2)} + \frac{1/3}{-3-2(z-2)} = \frac{2/9}{1+(z-2)/3} + \frac{-1/9}{1+2(z-2)/3}\,.$$

Für $\frac{1}{3}|z-2| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1+(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n$$

und für $\frac{2}{3}|z-2| < 1$ ist

$$\frac{1}{1+2(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n\,. \tag{$*$}$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| < \frac{3}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$$

mit $a_n = \frac{2}{9}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{9}(-\frac{2}{3})^n = (-\frac{1}{3})^{n+2}(2-2^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Der Konvergenzradius beträgt $\frac{3}{2}$, weil die geometrische Reihe in $(*)$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $\frac{2}{3}|z-2| \geqslant 1$ divergiert.

Bemerkung: Die Darstellung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ kann man auf die folgende Weise erhalten ($\rightarrow$ Partialbruchzerlegung): Wegen $1-z-2z^2 = (1+z)(1-2z)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}$$

und müssen die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z)+b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a+b+(-2a+b)z}{1-z-2z^2}\,.$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a+b=1$ und $-2a+b=-1$ sind. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$.

c) Wegen $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ (vgl. Aufgabe 1 b)) ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\big(1+\cos(2x)\big) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k} = 1 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,2^{2k}x^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } n = 0 \\ 0\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}\,2^n\,, & \text{falls } n \geqslant 2 \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius ist ∞.

Aufgabe 3

a) Für $x \neq 1$ gilt wegen $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ [Diese Gleichheit erhält man mit Hilfe der geometrischen Summenformel 4.11 (1) oder der Polynomdivision $(1-x^3) : (1-x)$.]

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{(1+x+x^2)-3}{1-x^3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\frac{x+2}{1+x+x^2}\,.$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} -\frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{1+2}{1+1+1^2} = -\frac{3}{3} = -1\,.$$

b) Der Binomialsatz 4.11 (2) liefert für $x \neq 0$ die Darstellung

$$\left(1+\frac{42}{x}\right)^{42} = \sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}\left(\frac{42}{x}\right)^{k} = 1 + 42\cdot\frac{42}{x} + a_2\left(\frac{42}{x}\right)^{2} + \ldots + a_{42}\left(\frac{42}{x}\right)^{42}$$

mit $a_k := \binom{42}{k}$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{42}\left(\left(1+\frac{42}{x}\right)^{42}-1\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{42}\left(42\cdot\frac{42}{x} + a_2\left(\frac{42}{x}\right)^{2} + \ldots + a_{42}\left(\frac{42}{x}\right)^{42}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(42 + a_2\left(\frac{42}{x}\right)^{1} + a_3\left(\frac{42}{x}\right)^{2} + \ldots + a_{42}\left(\frac{42}{x}\right)^{41}\right) = 42\,.\end{aligned}$$

c) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$, so ergibt sich mit der bekannten Gleichung $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ [wieder geometrische Summenformel 4.11 (1) oder Polynomdivision] die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x}-2 = a-b = \frac{(\sqrt[3]{8+x}\,)^3-2^3}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2+2\sqrt[3]{8+x}+2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2+2\sqrt[3]{8+x}+4}\,.$$

Folglich hat man nach Satz 8.3 und Beispiel in 8.6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2+2\sqrt[3]{8+x}+4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8}\,)^2+2\sqrt[3]{8}+4} = \frac{1}{12}\,.$$

d) Dieser Grenzwert existiert nicht. Der Zähler des Bruchs hat in $x=3$ nämlich keine Nullstelle, und wegen $(x^2-x)/(x+2) \to 6/5$ für $x \to 3$ gilt

$$\frac{x^2-x}{x^2-x-6} = \frac{1}{x-3}\cdot\frac{x^2-x}{x+2} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } x \to 3+\,,\\ -\infty & \text{für } x\to 3-\,.\end{cases}$$

e) Sei $a \in (0,\infty)$. Für $a \neq 1$ ergibt sich

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a \xrightarrow{x\to 0} \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\ln a \overset{(*)}{=} \ln a\,.$$

Die Gleichheit in $(*)$ folgt sofort aus der Ungleichung 7.11 (11).

Für $a=1$ gilt stets $a^x-1=0$, also ist auch in diesem Falle der Grenzwert $0=\ln a$.

f) Für alle $x \geqslant 1$ gilt

$$\sqrt{x\pm 1}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x\pm 1}\,)^2-(\sqrt{x}\,)^2}{\sqrt{x\pm 1}+\sqrt{x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x\pm 1}+\sqrt{x}}\,,$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x} &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)} = \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)}\\ &= \frac{(x-1)-(x+1)}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\,)}\,.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\,)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+1/x}+1\right)\left(\sqrt{1-1/x}+1\right)\left(\sqrt{1-1/x}+\sqrt{1+1/x}\right)} = \frac{-2}{2\cdot 2\cdot 2} = -\frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

g) Mit der Reihenentwicklung von $\sin x$ hat man für jedes $x \neq 0$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots)}{x(x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots)} = \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \ldots}{x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \ldots},$$

und hieraus folgt wegen der Stetigkeit von Potenzreihen (vgl. Satz 8.7)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \ldots}{x^3 - \frac{1}{3!}x^5 + \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}x^2 + \ldots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \ldots} = \frac{\frac{1}{3!}}{1} = \frac{1}{6}.$$

h) Wir erhalten wegen $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ [vgl. 7.12 (6) oder über Reihenentwicklung des Sinus]

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}.$$

Bei dieser Umformung muss man beachten, dass aus $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ insbesondere folgt, dass $\sin x \neq 0$ in der Nähe von $x_0 = 0$ gilt.

Für jede Folge (x_n) mit $x_n \to 0$ und $x_n \neq 0$ hat man also $\sin x_n \to 0$ und $\sin x_n \neq 0$ für fast alle n. Daher folgt aus $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

$$\frac{e^{\sin x_n} - 1}{\sin x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Demnach existiert der zu untersuchende Grenzwert: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = 1$.

Aufgabe 4

a) Sei $x > 0$. Wegen der Injektivität von $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist die gegebene Gleichung $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ äquivalent zu

$$\ln(x^{\sqrt{x}}) = \ln\big((\sqrt{x}\,)^x\big) \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x}\ln x = x \ln\sqrt{x} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x}\ln x = \tfrac{1}{2}x\ln x \quad\Leftrightarrow\quad (\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}x)\ln x = 0.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\ln x = 0$ (also $x = 1$) oder wenn $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$ gilt. Aus Letzterem folgt $x = \frac{1}{4}x^2$ und damit $x(1 - \frac{1}{4}x) = 0$, also $x = 4$. (Man beachte $x > 0$.) Somit gilt $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ genau für $x = 1$ oder $x = 4$.

b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ mittels vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: Für $n = 1$ ist die Abschätzung trivial: $|\sin(1 \cdot x)| \leqslant 1 \cdot |\sin x|$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ (IV). Dann folgt mit Hilfe des Additionstheorems für Sinus

$$\begin{aligned}|\sin((n+1)x)| &= |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)| \leqslant |\sin(nx)| \cdot |\cos x| + |\cos(nx)| \cdot |\sin x| \\ &\overset{(**)}{\leqslant} |\sin(nx)| + |\sin x| \overset{\text{IV}}{\leqslant} n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x|.\end{aligned}$$

In $(**)$ verwendeten wir $|\cos y| \leqslant 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Dies, wie auch $|\sin y| \leqslant 1$, folgt sofort aus der Identität $(\sin y)^2 + (\cos y)^2 = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

a) Wir definieren die Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := x - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wegen $g([a, b]) \subset [a, b]$ gilt $h(a) = a - g(a) \leqslant a - a = 0$ und $h(b) = b - g(b) \geqslant b - b = 0$. Daher liegt $y_0 := 0$ zwischen den Funktionswerten $h(a)$ und $h(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es (mind.) ein $x_0 \in [a, b]$ mit $h(x_0) = 0$, d.h. $g(x_0) = x_0$.

b) Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist f nach Satz 8.3 stetig. Zudem ist für $x \geqslant 0$ offenbar $f(x) \geqslant 0$ und $f(x) = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3} \leqslant 1$. Deshalb gilt für die stetige Funktion $f : [0, 2] \to [0, 2]$ gemäß **a)**: Es gibt (mindestens) ein $x_0 \in [0, 2]$ mit $f(x_0) = x_0$. (Solch ein x_0 heißt *Fixpunkt* von f.)

c) Wir verifizieren zunächst, dass die Funktion $f : [0,2] \to [0,2]$ monoton wachsend ist. Für alle $x, y \in [0,2]$ gilt nämlich

$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+3} \geqslant \frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{x+3} \leqslant 1 - \frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)\,.$$

Nun zeigen wir, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch $y_0 \in [0,2]$ und $y_n := f(y_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$, monoton ist. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall $y_0 \leqslant f(y_0)$: Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}: \; y_{n-1} \leqslant y_n$. Denn:
IA: $n = 1$. Es ist $y_0 \leqslant f(y_0) = y_1$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $y_{n-1} \leqslant y_n$ (IV). Da f monoton wachsend ist, folgt

$$y_n = f(y_{n-1}) \overset{\text{IV}}{\leqslant} f(y_n) = y_{n+1}\,.$$

Fall $y_0 > f(y_0)$: Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}: \; y_{n-1} \geqslant y_n$.
Dies kann man ähnlich wie eben durch vollständige Induktion beweisen.

Außerdem gilt $y_0 \in [0,2]$ und $y_n = f(y_{n-1}) \in [0,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt.

Die beschränkte und monotone Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert nach Satz 6.4.

Bemerkung: Macht man in der Rekursionsformel $y_{n+1} = f(y_n)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ (und beachtet dabei die Stetigkeit von f), so ergibt sich für den Grenzwert a der Folge (y_n) die Gleichung

$$a = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(a)\,,$$

d.h. a ist Fixpunkt von f. Rechnen wir a aus: Es gilt $a = \frac{a+2}{a+3}$. Nach Multiplikation mit $a+3$ erhält man die quadratische Gleichung $a^2 + 2a - 2 = 0$ in a, die genau für $a = -1 + \sqrt{3}$ oder $a = -1 - \sqrt{3}$ erfüllt ist. Wegen $y_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ muss $a \geqslant 0$ gelten, also $a = -1 + \sqrt{3}$.

Aufgabe 6

a) Sei $a \in (0,\infty)$. Definitionsgemäß gilt

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = a^{1/2}\,, \quad x_2 = (a^{1/2})^{1/2} = a^{1/4}\,, \quad x_3 = (a^{1/4})^{1/2} = a^{1/8}\,, \quad \ldots$$

Mit vollständiger Induktion beweisen wir $x_n = a^{1/2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Nach Definition ist $x_0 = a$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gelte $x_n = a^{1/2^n}$ (IV). Dann folgt

$$x_{n+1} = x_n^{1/2} \overset{\text{IV}}{=} (a^{1/2^n})^{1/2} = a^{1/2^{n+1}}.$$

Damit erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$y_n = 2^n(x_n - 1) = \frac{a^{1/2^n} - 1}{1/2^n}\,.$$

Wie wir in Aufgabe 3 e) gesehen haben, gilt $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$. Wegen $1/2^n \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/2^n}-1}{1/2^n} = \ln a$.

b) Seien $x, y \in (0,\infty)$. Da die Exponentialfunktion $E : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ streng monoton wachsend ist, ist die zu beweisende Ungleichung $\frac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln \frac{x+y}{2}$ äquivalent zu

$$E\left(\frac{\ln x + \ln y}{2}\right) \leqslant E\left(\ln \frac{x+y}{2}\right).$$

Weil ln die Umkehrfunktion von E ist, ergibt sich hier auf der linken Seite

$$E\left(\frac{\ln x + \ln y}{2}\right) = \sqrt{E(\ln x + \ln y)} = \sqrt{E(\ln x)\,E(\ln y)} = \sqrt{xy}\,,$$

und auf der rechten Seite erhält man $\frac{x+y}{2}$. Also müssen wir lediglich

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

beweisen. Dies folgt mit der binomischen Formel:

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x}\,)^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y}\,)^2}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y}\,)^2}{2} \geqslant 0\,.$$

c) Um $\ln x < x - 1$ für alle $x \in (0, \infty)$ mit $x \neq 1$ zu beweisen, verwenden wir, dass die Exponentialfunktion $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist, und erhalten

$$\ln x < x - 1 \quad \iff \quad E(\ln x) < E(x-1) \quad \iff \quad x < E(x-1)\,.$$

Für $x > 1$ gilt wegen $x - 1 > 0$

$$E(x-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} > \frac{(x-1)^0}{0!} + \frac{(x-1)^1}{1!} = 1 + (x-1) = x\,.$$

Für $x \in (0,1)$ erhält man wegen $1 - x \in (0,1)$

$$E(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}\,.$$

Hieraus folgt dann

$$E(x-1) = \frac{1}{E(1-x)} > \frac{1}{1/x} = x\,.$$

Aufgabe 7 (P)

a) Setzt man $x = 1$ in $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ ein, so ergibt sich der Wert 0. Für jedes $x \in (-1,1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1-x)x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x(1-x)\cdot\frac{1}{1-x} = x\,.$$

Die Funktionenreihe konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : (-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ x, & x \in (-1,1). \end{cases}$$

Da diese Funktion, im Gegensatz zu den Partialsummenfunktionen $s_N : (-1,1] \to \mathbb{R}$, die durch $s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} x^n(1-x)$ gegeben sind, nicht stetig in $x = 1$ ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor (vgl. Satz E7.5 (b)).

Bemerkung: Auch auf dem Intervall $(-1,1)$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $x \in (-1,1)$ gilt

$$\Big|s_N(x) - f(x)\Big| = \left|(1-x)x\sum_{n=0}^{N-1} x^n - x\right| = \left|(1-x)x\frac{1-x^N}{1-x} - x\right| = |x^{N+1}| = |x|^{N+1}$$

sowie

$$|x|^{N+1} \geqslant \frac{1}{2} \qquad \iff \qquad |x| \geqslant \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}\,.$$

Obige Rechnung zeigt: Ist $\varepsilon := \frac{1}{2}$ gesetzt, dann finden wir zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $x \in (-1,1)$ (etwa $x = \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}$) so, dass $|s_N(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ gilt. Dies schließt gleichmäßige Konvergenz aus.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| = \frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Da die Reihe über $1/n^2$ konvergiert, folgt aus Satz E7.4 (b): Die vorliegende Funktionenreihe konvergiert gleichmäßig und damit auch punktweise auf $\mathbb{R}$.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
09.12.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } x = 3 \end{cases}$

b) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\, x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3] \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1) \end{cases}$

Aufgabe 2

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

a) $\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$;

b) $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$z_1 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{42}, \qquad z_2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{201}.$$

b) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Ermitteln Sie die Polarkoordinaten von $z(t) := 1 - e^{it}$.

c) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. Berechnen Sie z^3 und z^{150}.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Zeigen Sie die Identitäten

a) $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;

b) $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$;

c) $\big(\cosh x + \sinh x\big)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$;

d) $\operatorname{Arsinh} x = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

e) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\ln\big(\frac{1+x}{1-x}\big)$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

i) $2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1}$; **ii)** $x^{\log_{10} x} = 100\,x$.

b) Beweisen Sie

$$\log_2\big(\sqrt{7} - \sqrt{3}\big) = 2 - \log_2\big(\sqrt{7} + \sqrt{3}\big).$$

Aufgabe 7

Gegeben seien eine reelle Zahl x_0 sowie eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.
Weisen Sie nach, dass dann ein Punkt $(\xi, f(\xi))$ auf dem Graphen von f existiert so, dass der Abstand dieses Punktes zum Punkt $P := (x_0, 0)$ auf der x-Achse unter allen Abständen eines Kurvenpunktes zu P am kleinsten ist.
Gilt diese Aussage auch, wenn das Intervall $[a,b]$ durch (a,b) ersetzt wird?

Aufgabe 8 (P)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Gilt für die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,,$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leqslant |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

Klausur zur HM I: Montag, 16.03.2009, 08:00 - 10:00 Uhr

Anmeldeschluss: Freitag, 13.02.2009 (Vorlesungsende WS 08/09)

Detaillierte Informationen zur Prüfungsanmeldung entnehmen Sie bitte unserer Vorlesungshomepage

www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1schneider/lehre/hm12008w/.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 5 und 7**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2008/09
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Die Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist als Komposition stetiger Funktionen überall dort stetig, wo sie definiert ist, d.h. außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners — vorausgesetzt, der Bruch ist vollständig gekürzt! Hier haben wir $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}$. Also ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ stetig und daher ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ stetig. Nun gilt $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = f(1)$, also ist f auch in der Stelle 1 stetig. Da aber 3 eine Nullstelle des Nenners im vollständig gekürzten Bruch $\frac{x-2}{x-3}$ ist, existiert $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x-3}$ nicht, und f ist in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist).

b) Wegen $x^2+2x-15 = (x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7,-5]$ positv, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x) = x^3$ für $x \in [-7,-5]$. Für $x \in [0,3]$ ist $(x-3)(x+5)$ negativ und x^3 positiv, also gilt $f(x) = x^2+2x-15$ für $x \in [0,3]$. Für $x \in [-1,0)$ ist $x^3 \in [-1,0)$, aber $x^2+2x-15 \leqslant 1+0-15 = -14$, also gilt $f(x) = x^2+2x-15$ für $x \in [-1,0)$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g,h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$ (vgl. Aufgabe 3 b) vom 3. Übungsblatt). Daher ist f jedenfalls außerhalb $\{-5,-1\}$ stetig. Da $x^2+2x-15$ und $x+5$ in -1 nicht denselben Wert annehmen sowie x^3 und $x+5$ an der Stelle -5 verschieden sind, ist f an jenen Stellen auch nicht stetig.

Aufgabe 2

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1] \setminus \{0\}$ stetig. Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}. \tag{1}$$

Demnach gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$: Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$|f(x)| \overset{(1)}{=} \frac{|x|}{1+\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\geqslant 0}} \leqslant |x| \leqslant 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1]) \subset [-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1] \subset f([-1,1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1,1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [-1,1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) : \ x \in [-1,1]\} = f([-1,1])$. Da $y_0 \in [-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1] \subset f([-1,1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1,1]) = [-1,1]$.

c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y = f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x = g(y)$ zu bringen (wobei $x \in X$, $y \in Y$ und $g : Y \to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad &&\Longleftrightarrow \quad 1 - xy = \sqrt{1-x^2} \\ &\overset{1-xy\geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad 1 - 2xy + x^2y^2 = 1 - x^2 \quad &&\Longleftrightarrow \quad x^2(1+y^2) = 2xy \\ &\overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad x(1+y^2) = 2y \quad \Longleftrightarrow &&\quad x = \frac{2y}{1+y^2}\,. \end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $y = f(0) = 0$, also gilt auch hier $x = \frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1} : \underbrace{[-1,1]}_{=f([-1,1])} \to [-1,1], \; y \mapsto \frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

d) Seien $x_1, x_2 \in [-1,1]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2(1+x_1^2) - 2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2 - x_1 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\ &= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1x_2(x_1 - x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0\,, \end{aligned}$$

denn wegen $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$ ist $x_1x_2 < 1$.

e) Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es ihre Umkehrfunktion f nach Satz 8.10 auch.

Aufgabe 3

a) und **b)** Laut Vorlesung gilt jedes $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\sin x > 0 \qquad \text{und} \qquad \cos x > 0\,. \tag{2}$$

Durch mehrfache Anwendung der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \cos\tfrac{\pi}{2} &= \cos(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{6}) = \cos\tfrac{\pi}{3}\,\cos\tfrac{\pi}{6} - \sin\tfrac{\pi}{3}\,\sin\tfrac{\pi}{6} \\ &= \cos(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6})\,\cos\tfrac{\pi}{6} - \sin(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6})\,\sin\tfrac{\pi}{6} \\ &= \big(\cos^2\tfrac{\pi}{6} - \sin^2\tfrac{\pi}{6}\big)\cos\tfrac{\pi}{6} - 2\cos\tfrac{\pi}{6}\,\sin^2\tfrac{\pi}{6} = \cos^3\tfrac{\pi}{6} - 3\cos\tfrac{\pi}{6}\,\sin^2\tfrac{\pi}{6}\,, \end{aligned}$$

woraus

$$\cos^2\tfrac{\pi}{6} - 3\sin^2\tfrac{\pi}{6} = 0 \tag{3}$$

aufgrund von (2) folgt. Da $\cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} = 1$ gilt, ergibt sich hieraus $4\sin^2\frac{\pi}{6} = 1$, also $\frac{1}{2} = |\sin\frac{\pi}{6}| \overset{(2)}{=} \sin\frac{\pi}{6}$. Einsetzen in Gleichung (3) führt auf $\cos^2\frac{\pi}{6} = 3\sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$, woraus sich $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ wegen (2) ergibt. Aus den Additionstheoremen folgt weiter

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{\pi}{3} &= \sin(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6}) = 2\sin\tfrac{\pi}{6}\,\cos\tfrac{\pi}{6} = 2\cdot\tfrac{1}{2}\,\cos\tfrac{\pi}{6} = \cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \\ \cos\tfrac{\pi}{3} &= \cos(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6}) = \cos^2\tfrac{\pi}{6} - \sin^2\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} = \sin\tfrac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Zusammen mit den in der Vorlesung berechneten Funktionswerten von Sinus und Cosinus ergibt sich folgende Tabelle:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Aufgabe 4

a) Um Real- und Imaginärteil von z_1 zu ermitteln, betrachtet man am besten die Polarkoordinaten von $1-i\sqrt{3}$. Die Länge dieser Zahl beträgt

$$\left|1-i\sqrt{3}\,\right| = \sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\,\right)^2} = \sqrt{4} = 2\,,$$

und nun gilt es noch, das Argument von $1-i\sqrt{3}$ zu finden, d.h. $\varphi \in (-\pi,\pi]$ mit

$$1-i\sqrt{3} = 2e^{i\varphi} = 2\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)\,, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

Dies ist genau für $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ der Fall; damit ist $1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$. Es folgt

$$z_1 = \big(1-i\sqrt{3}\,\big)^{42} = \big(2e^{-i\pi/3}\big)^{42} = 2^{42}e^{42(-i\pi/3)} = 2^{42}e^{-14\pi i} = 2^{42}\,,$$

denn $e^{-14\pi i} = \cos(-14\pi) + i\sin(-14\pi) = 1$. Somit sind $\operatorname{Re} z_1 = 2^{42}$, $\operatorname{Im} z_1 = 0$, $|z_1| = 2^{42}$ und $\arg z_1 = 0$.

Wie zuvor gesehen, ist $1 \pm \sqrt{3}i = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Damit erhalten wir

$$z_2 \;=\; \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^{201} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{201} = e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 201} = e^{134\,i\pi} = \cos(134\pi) + i\sin(134\pi) = 1\,.$$

Also sind $\operatorname{Re} z_2 = 1$, $\operatorname{Im} z_2 = 0$, $|z_2| = 1$ und $\arg z_2 = 0$.

b) Es sei $t \in (0,2\pi)$. Wegen $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$z(t) = 1 - e^{it} = \big(e^{-it/2} - e^{it/2}\big)e^{it/2} = -2i\sin(t/2)\,e^{it/2} = 2\sin(t/2)\,e^{i(t-\pi)/2}\,,$$

wobei für die letzte Umformung $-i = e^{-i\pi/2}$ verwendet wurde. Damit haben wir bereits die gesuchte Polardarstellung von $z(t)$ gefunden, denn für alle $t \in (0,2\pi)$ gilt $\sin(t/2) > 0$ und $\frac{1}{2}(t-\pi) \in (-\pi,\pi]$. Also hat $z(t)$ die Länge $2\sin(t/2)$ und das Argument $\frac{1}{2}(t-\pi)$.

c) Wir haben

$$z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2},$$

$$z^3 = e^{i\frac{15\pi}{4}} = \cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$$

und

$$z^{150} = e^{i\frac{750\pi}{4}} = \cos\left(\frac{750\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{750\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i,$$

weil $750 = 93\cdot 8 + 6$ und somit $\frac{750\pi}{4} = 93\cdot 2\pi + \frac{6\pi}{4}$ ist.

Aufgabe 5

a) Für $x,y \in \mathbb{R}$ mit $x,y,x+y \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\tan(x{+}y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\,\cos y + \sin y\,\cos x}{\cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y} = \frac{\cos x\,\cos y\,(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y})}{\cos x\,\cos y\,(1 - \frac{\sin x\,\sin y}{\cos x\,\cos y})} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}\,.$$

b) Gemäß Vorlesung ist $\tan : (-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion von tan heißt Arcustangens $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2,\pi/2)$. Also gilt

$$\begin{aligned} \arctan(\tan(x)) &= x \qquad \text{für alle } x \in (-\pi/2,\pi/2),\\ \tan(\arctan(y)) &= y \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nun seien $x,y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$. Wir setzen $X := \arctan(x), Y := \arctan(y)$. Mit Hilfe der Identität $\tan(X+Y) = \frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X\,\tan Y}$ aus Teil a) erhalten wir

$$X + Y = \arctan\big(\tan(X+Y)\big) = \arctan\Big(\frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X\,\tan Y}\Big) = \arctan\Big(\frac{x+y}{1-xy}\Big)\,.$$

c) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh y + \sinh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{2e^y}{2} = e^y\,.$$

Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \cosh(nx) + \sinh(nx)\,.$$

d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
y = \operatorname{Arsinh} x \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = e^y - e^{-y} \\
&\overset{e^y \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad 2xe^y = e^{2y} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad (e^y)^2 - 2xe^y + x^2 = x^2 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (e^y - x)^2 = x^2 + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad |e^y - x| = \sqrt{x^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1} \ \text{ oder } \ \underbrace{e^y = x - \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{>|x|\geqslant x}}_{<x-x=0} \\
&\overset{e^y > 0}{\Longleftrightarrow} \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).
\end{aligned}$$

e) Für jedes $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\begin{aligned}
y = \operatorname{Artanh} x \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \tanh y = \frac{\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})}{\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2y}(x-1) = -1 - x \\
&\Longleftrightarrow \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \quad \Longleftrightarrow \quad 2y = \ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) **i)** Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{x-1} - 2^{x+4} = 3^{x-1} - 3^{x+1} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2^x(\tfrac{1}{2} - 2^4) = 3^x(\tfrac{1}{3} - 3) \\
&\Longleftrightarrow \quad 2^x(-\tfrac{31}{2}) = 3^x(-\tfrac{8}{3}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2^x}{3^x} = \frac{8/3}{31/2} \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\frac{2}{3}\Big)^x = \frac{16}{93} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \log_{\frac{2}{3}}\Big(\frac{16}{93}\Big) = \frac{\ln\frac{16}{93}}{\ln\frac{2}{3}} = \frac{\ln 16 - \ln 93}{\ln 2 - \ln 3}.
\end{aligned}$$

ii) Die Gleichung $x^{\log_{10} x} = 100\,x$ ist nur für $x \in (0, \infty)$ sinnvoll. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
x^{\log_{10} x} = 100\,x \quad &\Longleftrightarrow \quad \log_{10}(x^{\log_{10} x}) = \log_{10}(100\,x) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x)(\log_{10} x) = \log_{10}(100) + \log_{10}(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x)^2 - \log_{10}(x) - 2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x - 2)(\log_{10}(x) + 1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \log_{10} x = 2 \quad \text{oder} \quad \log_{10}(x) = -1 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = 100 \quad \text{oder} \quad x = 10^{-1} = \tfrac{1}{10}.
\end{aligned}$$

b) Die Identität $\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 2 - \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ folgt sofort aus

$$\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) + \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = \log_2\big((\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})\big) = \log_2(7-3) = \log_2(4) = 2.$$

Aufgabe 7

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ fest. Der Abstand zwischen einem Punkt $(x, f(x))$ (mit $x \in [a,b]$) auf dem Graphen von f und dem Punkt $(x_0, 0)$ lässt sich durch

$$d(x) := \sqrt{(x-x_0)^2 + (f(x)-0)^2} = \sqrt{(x-x_0)^2 + f(x)^2}$$

berechnen. Die Funktion $d : [a,b] \to [0,\infty),\ x \mapsto d(x)$ ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Da $[a,b]$ abgeschlossen und beschränkt ist, nimmt d nach Satz 8.14 auf $[a,b]$ ihr Minimum an, etwa in $\xi \in [a,b]$, d.h. $d(x) \geqslant d(\xi)$ für alle $x \in [a,b]$. Wir haben also einen Punkt $(\xi, f(\xi))$ auf dem Graphen von f gefunden so, dass der Abstand dieses Punktes zum Punkt $P := (x_0, 0)$ auf der x-Achse unter allen Abständen eines Punktes auf dem Graphen von f zu P am kleinsten ist.

Ersetzt man das abgeschlossene Intervall $[a,b]$ durch (a,b), dann ist die Aussage i.a. nicht richtig. Gegenbeispiel: Betrachte die Funktion $f : (0,1) \to (0,1),\ x \mapsto x$, sowie $x_0 = 0$, also $P = (0,0)$. Dann ist f stetig und es gilt $d : (0,1) \to [0,\infty)$, $d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2} = \sqrt{2}\,|x|$. Man überlegt sich leicht, dass für den Wertebereich von d gilt: $d((0,1)) = (0,\sqrt{2})$. Daher ist $\inf(d(0,1)) = \inf(0,\sqrt{2}) = 0 \notin (0,\sqrt{2})$. Also existiert das Minimum von d nicht. D.h. es gibt keinen Punkt auf dem Graphen von f so, dass der Abstand dieses Punktes zum Punkt $P = (0,0)$ auf der x-Achse unter allen Abständen eines Kurvenpunktes zu P am kleinsten ist.

Aufgabe 8 (P)

a) Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist die Behauptung trivial. Sonst wählen wir ein $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) \neq 0$ und setzen $\varepsilon := |f(x_1)|$. Wegen $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ gibt es ein $M > 0$ mit

$$|f(x)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x < -M \text{ und für alle } x > M.$$

Nach Definition von ε gilt $x_1 \in [-M, M]$.

Die stetige Funktion $g : [-M,M] \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x) := |f(x)|$, nimmt auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[-M,M]$ nach Satz 8.14 ihr Maximum an, d.h. es existiert ein $x_0 \in [-M,M]$ mit $g(x) \leqslant g(x_0)$ für alle $x \in [-M,M]$.

Für jedes $x \in [-M,M]$ gilt somit $|f(x)| = g(x) \leqslant g(x_0) = |f(x_0)|$. Auch für $x \notin [-M,M]$ ist

$$|f(x)| < \varepsilon = |f(x_1)| \overset{x_1\in[-M,M]}{\leqslant} |f(x_0)|\,.$$

b) Nach Satz 8.14 nimmt die stetige Funktion f auf $[a,b]$ ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x) \geqslant f(x_0) > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Demzufolge gilt für jedes $x \in [a,b]$

$$\frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{1}{f(x_0)} =: C < \infty\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist also nach oben durch C beschränkt; eine untere Schranke von $\frac{1}{f}$ ist z.B. 0.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
16.12.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Laut Vorlesung sind die Funktionen

$$\sin_k \colon \left[\tfrac{2k-1}{2}\,\pi, \tfrac{2k+1}{2}\,\pi\right] \to [-1,1],\ x \mapsto \sin(x)\,, \qquad \cos_k \colon \left[k\pi, (k+1)\pi\right] \to [-1,1],\ x \mapsto \cos(x)\,,$$

bijektiv. Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktionen durch

$$\arcsin_k \colon [-1,1] \to \left[\tfrac{2k-1}{2}\,\pi, \tfrac{2k+1}{2}\,\pi\right],\ y \mapsto k\pi + (-1)^k \arcsin(y)\,,$$

bzw.

$$\arccos_k \colon [-1,1] \to \left[k\pi, (k+1)\pi\right],\ y \mapsto \arcsin_{k+1}(y) - \tfrac{\pi}{2}\,,$$

gegeben sind.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie für alle $y > 0$

$$\int_0^y x\,e^x\,dx = (y-1)e^y + 1\,.$$

Hinweis: Potenzreihe für $x\,e^x$.

b) Berechnen Sie

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^\pi \cos^2 x\,dx\,.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_1^2 f(x)\,dx \qquad \text{für} \quad f(x) := e^x\,,$$

indem Sie mittels geeigneter Unter- und Obersummen $s_f = S_f$ bestimmen.

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Für alle $f, g \in R[a,b]$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Hinweis: Führen Sie den Beweis in mehreren Schritten: $f, g \in R[a,b] \Rightarrow f + g \in R[a,b]$; $\alpha \geqslant 0, f \in R[a,b] \Rightarrow \alpha f \in R[a,b]$ und $f \in R[a,b] \Rightarrow -f \in R[a,b]$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Beweisen Sie:

a) Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und habe höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen in $[a,b]$. Dann gilt $f \in R[a,b]$.

b) Seien $f \in R[a,b]$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es gelte $f(x) \neq g(x)$ für höchstens endlich viele $x \in [a,b]$. Dann gilt $g \in R[a,b]$ und

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Aufgabe 6

a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_a^b f(x)\;dx > 0\,.$$

b) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \geqslant g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(x_0) > g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Aufgabe 7 (P)

Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Außerdem sei die Existenz der Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ bekannt. Zeigen Sie, dass dann f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 8 (P)

a) Sei $f \in C([a,b])$ mit $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

b) Wiederum sei $f \in C([a,b])$ und für alle $g \in C([a,b])$ gelte $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Klausur zur HM I: Montag, 16.03.2009, 08:00 - 10:00 Uhr

Anmeldeschluss: Freitag, 13.02.2009 (Vorlesungsende WS 08/09)

Detaillierte Informationen zur Prüfungsanmeldung entnehmen Sie bitte unserer Vorlesungshomepage

www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1schneider/lehre/hm12008w/.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **4, 5, 6 und 8**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2008/09
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Um zu beweisen, dass die Funktion $\arcsin_k : [-1,1] \to [\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi]$ die Umkehrfunktion der bijektiven Funktion $\sin_k : [\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi] \to [-1,1]$ ist, zeigen wir

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \arcsin_k(\sin_k(x)) = x & \text{für alle } x \in \left[\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right] \text{ und} \\ \text{(b)} & \sin_k(\arcsin_k(y)) = y & \text{für alle } y \in [-1,1]. \end{array}$$

Vorbemerkung: Für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt nach dem Additionstheorem für Sinus

$$\sin(k\pi + u) = \sin(k\pi)\cos(u) + \cos(k\pi)\sin(u) = (-1)^k \sin(u)\,. \tag{1}$$

Zu (a): Sei $x \in [\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi]$ beliebig. Schreibt man $x = k\pi + u$ mit $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \arcsin_k(\sin_k(x)) &= \arcsin_k(\sin(x)) = k\pi + (-1)^k \arcsin(\sin(x)) = k\pi + (-1)^k \arcsin(\sin(k\pi + u)) \\ &\overset{(1)}{=} k\pi + (-1)^k \arcsin((-1)^k \sin(u)) = k\pi + (-1)^k(-1)^k \arcsin(\sin(u)) \\ &= k\pi + u = x \qquad (\text{da } u \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]). \end{aligned}$$

Zu (b): Für jedes $y \in [-1,1]$ gilt

$$\begin{aligned} \sin_k(\arcsin_k(y)) &= \sin(\arcsin_k(y)) = \sin(k\pi + (-1)^k \arcsin(y)) \\ &\overset{(1)}{=} (-1)^k \sin((-1)^k \arcsin(y)) = (-1)^{2k} \sin(\arcsin(y)) = y. \end{aligned}$$

Um zu beweisen, dass die Funktion $\arccos_k : [-1,1] \to [k\pi, (k+1)\pi]$ die Umkehrfunktion der bijektiven Funktion $\cos_k : [k\pi, (k+1)\pi] \to [-1,1]$ ist, zeigen wir

$$\begin{array}{lll} \text{(c)} & \arccos_k(\cos_k(x)) = x & \text{für alle } x \in [k\pi, (k+1)\pi] \text{ und} \\ \text{(d)} & \cos_k(\arccos_k(y)) = y & \text{für alle } y \in [-1,1]. \end{array}$$

Wir verwenden (vgl. 9.2 (7))

$$\sin(x + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \sin(y) = \cos(y - \tfrac{\pi}{2}) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Zu (c): Sei $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ beliebig. Dann ist $x + \frac{\pi}{2} \in [k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi + \frac{\pi}{2}]$, und es gilt

$$\begin{aligned} \arccos_k(\cos_k(x)) &= \arccos_k(\cos(x)) = \arcsin_{k+1}(\cos(x)) - \tfrac{\pi}{2} \overset{(2)}{=} \arcsin_{k+1}(\sin(x + \tfrac{\pi}{2})) - \tfrac{\pi}{2} \\ &= x + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} = x \qquad (\text{nach (a), da } x + \tfrac{\pi}{2} \in [\tfrac{2(k+1)-1}{2}\pi, \tfrac{2(k+1)+1}{2}\pi]). \end{aligned}$$

Zu (d): Für jedes $y \in [-1,1]$ gilt

$$\cos_k(\arccos_k(y)) = \cos(\arcsin_{k+1}(y) - \tfrac{\pi}{2}) \overset{(2)}{=} \sin(\arcsin_{k+1}(y)) \overset{\text{(b)}}{=} y.$$

Aufgabe 2

a) Sei $y > 0$. Für jedes $x \in [0, y]$ gilt

$$x\, e^x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\,.$$

Da diese Potenzreihe um die Entwicklungsstelle 0 den Konvergenzradius ∞ besitzt, folgt nach Abschnitt 10.11 der Vorlesung

$$\int_0^y x\, e^x\, dx = \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+2)\, n!}\,.$$

Wegen

$$\frac{y^{n+2}}{(n+2)\, n!} = \frac{n+1}{n+2}\, \frac{y^{n+2}}{(n+1)!} = \Big(1 - \frac{1}{n+2}\Big) \frac{y^{n+2}}{(n+1)!} = \frac{y^{n+2}}{(n+1)!} - \frac{y^{n+2}}{(n+2)!}$$

ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+2)\, n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+2}}{(n+2)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{k!} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{y^l}{l!} \\ &= y(e^y - 1) - (e^y - 1 - y) = (y-1)e^y + 1\,. \end{aligned}$$

b) Wie in Aufgabe 1 b) vom 7. Übungsblatt gesehen, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))\,.$$

Deshalb erhält man mit Beispiel 10.11 (2)

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))\, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} 1\, dx - \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(2x)\, dx = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2} \tfrac{\sin(2\pi)}{2} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt hiermit

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi} 1 - \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} 1\, dx - \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi - \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 3

Sei $f : [1, 2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$. Zuerst bemerken wir, dass f als stetige Funktion über $[1, 2]$ integrierbar ist. Betrachten wir für ein $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung $Z_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ des Intervalls $[1, 2]$ mit $x_j := 1 + j/n$ für $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, so gilt für die Teilintervalle $I_j := [x_{j-1}, x_j]$

$$m_j := \inf f(I_j) = f(x_{j-1}) = e^{x_{j-1}} \qquad \text{und} \qquad M_j := \sup f(I_j) = f(x_j) = e^{x_j}\,,$$

denn f ist monoton wachsend. Somit ergibt sich wegen $|I_j| = x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n}$ für die Untersumme von f bezüglich Z_n

$$\begin{aligned} s_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j| = \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{x_{j-1}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{1+(j-1)/n} = \frac{e}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{(j-1)/n} = \frac{e}{n} \sum_{l=0}^{n-1} (e^{1/n})^l \\ &= \frac{e}{n} \cdot \frac{1 - (e^{1/n})^n}{1 - e^{1/n}} = \frac{e(1-e)}{n(1 - e^{1/n})} = e(e-1) \frac{1/n}{e^{1/n} - 1} \xrightarrow{n \to \infty} e(e-1)\,, \end{aligned}$$

und daraus folgt für das untere Integral von f

$$s_f = \sup\{\, s_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [1, 2]\,\} \geqslant \lim_{n \to \infty} s_f(Z_n) = e(e-1)\,.$$

Für die Obersumme von f bezüglich Z_n erhält man

$$S_f(Z_n) = \sum_{j=1}^{n} M_j|I_j| = \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{x_j}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{1+j/n} = \frac{e^{1+1/n}}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{(j-1)/n} = e^{1/n}s_f(Z_n)\,,$$

so dass auch $S_f(Z_n) \to e(e-1)$ für $n \to \infty$ folgt. Damit besteht die Abschätzung

$$S_f = \inf\{\, S_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [1,2]\,\} \leqslant \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) = e(e-1)$$

für das obere Integral. Da stets $s_f \leqslant S_f$ gilt, haben wir $e(e-1) \leqslant s_f \leqslant S_f \leqslant e(e-1)$, d. h. $s_f = S_f = e(e-1)$, und dies bedeutet $\int_1^2 f(x)\,dx = e(e-1)$.

Aufgabe 4

1. Schritt: $f, g \in R[a,b] \;\Rightarrow\; f+g \in R[a,b]$ und $\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$.

Seien Z_1, Z_2 beliebige Zerlegungen von $[a,b]$ und $Z := Z_1 \cup Z_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Wegen

$$\begin{aligned}
\inf(f+g)([x_{j-1},x_j]) &= \inf\{f(x)+g(x) :\; x \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&\overset{\text{Satz 4.6 (2)}}{\geqslant} \inf\{f(x)+g(\tilde{x}) :\; x, \tilde{x} \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&\overset{\text{A5, 2. Üblatt}}{=} \inf\{f(x) :\; x \in [x_{j-1},x_j]\} + \inf\{g(\tilde{x}) :\; \tilde{x} \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&= \inf f([x_{j-1},x_j]) + \inf g([x_{j-1},x_j])
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
s_{f+g}(Z) &= \sum_{j=1}^{n} \inf(f+g)([x_{j-1},x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\
&\geqslant \sum_{j=1}^{n} \inf f([x_{j-1},x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n} \inf g([x_{j-1},x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) \\
&= s_f(Z) + s_g(Z) \overset{\text{Satz in 10.1}}{\geqslant} s_f(Z_1) + s_g(Z_2)\,.
\end{aligned}$$

Aufgrund von $s_{f+g}(Z) \leqslant \sup\{\, s_{f+g}(Z') : Z' \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\,\} = s_{f+g}$ folgt

$$s_{f+g} \geqslant s_f(Z_1) + s_g(Z_2)\,.$$

Da Z_1 eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ war, ergibt sich

$$s_{f+g} \geqslant s_f + s_g(Z_2)\,.$$

Da Z_2 eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ war, ergibt sich

$$s_{f+g} \geqslant s_f + s_g\,. \tag{3}$$

Für das obere Integral wollen wir durch eine ähnliche Rechnung die Abschätzung $S_{f+g} \leqslant S_f + S_g$ einsehen. Wegen

$$\begin{aligned}
\sup(f+g)([x_{j-1},x_j]) &= \sup\{f(x)+g(x) :\; x \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&\overset{\text{Satz 4.6 (2)}}{\leqslant} \sup\{f(x)+g(\tilde{x}) :\; x, \tilde{x} \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&\overset{\text{A5, 2. Üblatt}}{=} \sup\{f(x) :\; x \in [x_{j-1},x_j]\} + \sup\{g(\tilde{x}) :\; \tilde{x} \in [x_{j-1},x_j]\} \\
&= \sup f([x_{j-1},x_j]) + \sup g([x_{j-1},x_j])
\end{aligned}$$

gilt

$$S_{f+g}(Z) = \sum_{j=1}^{n} \sup(f+g)([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leqslant S_f(Z) + S_g(Z) \leqslant S_f(Z_1) + S_g(Z_2)\,,$$

woraus wegen $S_{f+g}(Z) \geqslant \inf\{\, S_{f+g}(Z') : Z' \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\,\} = S_{f+g}$

$$S_{f+g} \leqslant S_f(Z_1) + S_g(Z_2)$$

folgt. Analog wie zuvor schließen wir hieraus

$$S_{f+g} \leqslant S_f + S_g\,. \tag{4}$$

Da stets $s_{f+g} \leqslant S_{f+g}$ gilt, erhalten wir

$$S_{f+g} \overset{(4)}{\leqslant} S_f + S_g \overset{f,g\in R[a,b]}{=} s_f + s_g \overset{(3)}{\leqslant} s_{f+g} \leqslant S_{f+g}\,,$$

also überall "=". Somit ist $f+g \in R[a,b]$, und es gilt

$$\int_a^b (f+g)\,dx = s_{f+g} = s_f + s_g = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx\,.$$

2. Schritt: $\alpha \geqslant 0, f \in R[a,b] \;\Rightarrow\; \alpha f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$.
Sei $\alpha \geqslant 0$ und $f \in R[a,b]$. Für jedes Teilintervall $[y,z]$ von $[a,b]$ gilt

$$\sup(\alpha f)([y,z]) = \sup\{\alpha f(x) : x \in [y,z]\} = \alpha \sup\{f(x) : x \in [y,z]\} = \alpha \sup f([y,z])$$

und

$$\inf(\alpha f)([y,z]) = \inf\{\alpha f(x) : x \in [y,z]\} = \alpha \inf\{f(x) : x \in [y,z]\} = \alpha \inf f([y,z])\,.$$

Damit folgt sofort aus der Definition der Ober- und Untersumme für jede Zerlegung Z von $[a,b]$

$$S_{\alpha f}(Z) = \alpha S_f(Z) \qquad \text{und} \qquad s_{\alpha f}(Z) = \alpha s_f(Z)\,.$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} s_{\alpha f} &= \sup\{\alpha s_f(Z) :\; Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} = \alpha s_f \\ &\overset{f\in R[a,b]}{=} \alpha S_f = \inf\{\alpha S_f(Z) :\; Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} = S_{\alpha f}\,. \end{aligned}$$

Also ist $\alpha f \in R[a,b]$, und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx\,.$$

3. Schritt: $f \in R[a,b] \;\Rightarrow\; -f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (-f)\,dx = -\int_a^b f\,dx$.
Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ eine beliebige Zerlegungen von $[a,b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s_{-f}(Z) &= \sum_{j=1}^{n} \inf(-f)([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \inf\{-f(x) :\; x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} -\sup\{f(x) :\; x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1}) = -\sum_{j=1}^{n} \sup f([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) = -S_f(Z) \end{aligned}$$

und

$$S_{-f}(Z) = \sum_{j=1}^{n} \sup(-f)([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) = -\sum_{j=1}^{n} \inf f([x_{j-1}, x_j]) \cdot (x_j - x_{j-1}) = -s_f(Z)\,.$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} s_{-f} &= \sup\{-S_f(Z): \ Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} = -S_f \\ &\overset{f\in R[a,b]}{=} -s_f = \inf\{-s_f(Z): \ Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} = S_{-f}\,. \end{aligned}$$

Also ist $-f \in R[a,b]$, und es gilt

$$\int_a^b (-f)\,dx = -\int_a^b f\,dx\,.$$

4. Schritt: $\alpha < 0, f \in R[a,b] \;\Rightarrow\; \alpha f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$.

Seien $\alpha < 0$ und $f \in R[a,b]$. Wir benutzen die Darstellung $\alpha = (-1)\cdot|\alpha|$. Aus dem 2. Schritt folgt $|\alpha| f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (|\alpha| f)\,dx = |\alpha| \int_a^b f\,dx$. Hieraus ergibt sich mit dem 3. Schritt: $-|\alpha| f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (-|\alpha| f)\,dx = -|\alpha| \int_a^b f\,dx$ bzw. $\alpha f \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$.

5. Schritt: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in R[a,b] \;\Rightarrow\; \alpha f + \beta g \in R[a,b]$ und $\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g \in R[a,b]$. Nach Schritt 2 oder 4 gilt $\alpha f \in R[a,b]$ mit $\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$ sowie $\beta g \in R[a,b]$ mit $\int_a^b (\beta g)\,dx = \beta \int_a^b g\,dx$. Schritt 1 liefert daher $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ mit

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \int_a^b (\alpha f)\,dx + \int_a^b (\beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx\,.$$

Aufgabe 5

a) Siehe Satz E9.1 aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

b) Seien $f \in R[a,b]$ und $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es gelte $f(x) \neq g(x)$ für höchstens endlich viele $x \in [a,b]$.

Setze $h := f - g$ sowie $M := \{x \in [a,b]: \ f(x) \neq g(x)\}$. Wegen $h(x) = 0$ für alle $x \in [a,b] \setminus M$ ist h auf $[a,b] \setminus M$ stetig. Da M (nach Voraussetzung) endlich viele Elemente enthält, ist f in höchstens endlich vielen Stellen in $[a,b]$ unstetig und damit gemäß a) über $[a,b]$ integrierbar. Wie in Aufgabe 4 gesehen, gilt mit $h, f \in R[a,b]$ auch $g = f - h \in R[a,b]$.

Es verbleibt $\int_a^b h\,dx = 0$ zu beweisen, denn dann liefert Aufgabe 4: $\int_a^b g\,dx = \int_a^b f\,dx$. Wegen $|\int_a^b h\,dx| \leqslant \int_a^b |h|\,dx$ genügt es zu zeigen:

$$\int_a^b |h|\,dx = 0\,.$$

Es gilt $|h(x)| > 0$ für alle $x \in M$ und $h(x) = 0$ für alle $x \in [a,b] \setminus M$. Da M endlich ist, folgt $s_{|h|}(Z) = 0$ für jede Zerlegung Z von $[a,b]$. Demnach ist das untere Integral $s_{|h|} = 0$ und wegen $h \in R[a,b]$ ist $\int_a^b |h|\,dx = s_{|h|} = 0$.

Aufgabe 6

a) Sei $f: [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und es existiere ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$.

Sei $\varepsilon := \frac{1}{2} f(x_0)$. Nach Voraussetzung ist $\varepsilon > 0$ und aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für solche x gilt

$$f(x) = f(x_0) - (-f(x) + f(x_0)) \geqslant f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon\,.$$

Setzt man $\alpha := \max\{a, x_0 - \delta\}$ und $\beta := \min\{b, x_0 + \delta\}$, so gilt $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ und $f(x) \geqslant \varepsilon$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$. Zusammen mit der Abschätzung $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$ folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx \\ &\geqslant \int_a^\alpha 0\,dx + \int_\alpha^\beta \varepsilon\,dx + \int_\beta^b 0\,dx = (\beta - \alpha)\varepsilon > 0\,. \end{aligned}$$

b) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \geqslant g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(x_0) > g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$.

Betrachte die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := f(x) - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig, und es gilt $h(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$. Außerdem ist $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$. Somit sind die Voraussetzungen des a)-Teils für die Funktion h erfüllt. Dieser liefert

$$\int_a^b h(x)\,dx > 0\,,$$

woraus mit Aufgabe 4

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$$

folgt.

Aufgabe 7 (P)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion so, dass $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existieren.

Sei $\varepsilon > 0$. Um nachzuweisen, dass f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, müssen wir ein $\delta > 0$ finden mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - y| < \delta\,.$$

Wegen der Existenz des Grenzwertes $\lim_{x\to\infty} f(x) =: \alpha$ gibt es eine Konstante $M_+ > 0$ mit

$$|f(x) - \alpha| < \tfrac{\varepsilon}{4} \qquad \text{für alle } x \geqslant M_+\,.$$

Für alle $x, y \geqslant M_+$ gilt daher

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \alpha| + |\alpha - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} = \tfrac{\varepsilon}{2}\,. \tag{5}$$

Entsprechend gibt es wegen der Existenz von $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ eine Konstante $M_- > 0$ so, dass für alle $x, y \leqslant -M_-$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6}$$

Setze $M := \max\{M_+, M_-\}$. Da $[-M, M]$ kompakt und f auf $[-M, M]$ stetig ist, ist f nach Satz E8.13 auf $[-M, M]$ gleichmäßig stetig, d.h. es gibt ein $\delta_1 > 0$ mit

$$\forall x, y \in [-M, M] : \ |x - y| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Setze $\delta := \min\{\delta_1, M\}$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig mit $|x - y| < \delta$. O.B.d.A. gelte $x \leqslant y$.
1. Fall: $x > M$.
Dann ist $y > M$ und es gilt nach (5)

$$|f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2. Fall: $x \in [-M, M]$.
Fall 2.1: Für $y \in [-M, M]$ gilt nach (7)

$$|f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Fall 2.2: Für $y > M$ ergibt sich mit (7) und (5)

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Fall: $x < -M$.
Fall 3.1: $y < -M$. Analog wie 1. Fall [mit (6) anstelle von (5)].
Fall 3.2: $y \in [-M, M]$. Analog wie Fall 2.2 [mit (6) anstelle von (5)].
Fall 3.3: $y > M$. Dieser Fall tritt nicht auf wegen

$$|x - y| = y - x > M + M > M \geqslant \delta.$$

Insgesamt haben wir gezeigt: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Aufgabe 8 (P)

a) Es sei $f \in C([a,b])$ mit $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$.

Annahme: Es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$.

Betrachte die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := |f(x)|$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig mit $h(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$ und $h(x_0) = |f(x_0)| > 0$. Nach Aufgabe 6 a) gilt

$$0 < \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$. Demnach ist die Annahme falsch und es gibt kein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$, d.h. für alle $x \in [a,b]$ gilt $f(x) = 0$.

b) Nun sei $f \in C([a,b])$ und für alle $g \in C([a,b])$ gelte $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$.

Speziell für $f = g$ gilt $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$. Da die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x) := (f(x))^2$ stetig ist und $\int_a^b |h(x)|\,dx = 0$ gilt, liefert Teil a): $0 = h(x) = (f(x))^2$ für alle $x \in [a,b]$, also $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
23.12.2008

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe von Riemann-Summen.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^{-k}}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{3n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Aufgabe 2

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, welche dieser Funktionen an der Stelle 0 stetig sind und welche dort differenzierbar sind.

Aufgabe 3

Seien $\alpha > 1$ und $C > 0$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|^\alpha \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(2x)\,e^{\sin x}$

c) $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\ln x)$ **d)** $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\sin x}\,(\sin x)^x$

Aufgabe 5

Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^{\sin x} \sin(e^t)\,dt$. Begründen Sie, dass F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie $F'(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Grenzwerte.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\right)$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgende Abschätzung

$$x\ln x - y\ln y \leqslant (x-y)(1+\ln x) \qquad \text{für } x > y > 0\,.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 7

a) Seien $0 \leqslant a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende Funktion mit $f(a) \geqslant 0$. Die (dann existierende) Umkehrfunktion von f sei $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a,b]$. Zeigen Sie mit Hilfe von Ober- und Untersummen

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = bf(b) - af(a)\,.$$

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die Situation anhand einer Skizze.

b) Folgern Sie hieraus

i) $\int_1^s \ln x\,dx = (\ln s - 1)s + 1$ für alle $s > 1$;

ii) $\int_0^t y^{1/m}\,dy = \frac{m}{m+1}\,t^{\frac{m+1}{m}}$ für alle $t > 0$ und $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 8 (P)

Sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $s, t \geqslant 0$ gilt

$$st \leqslant \int_0^t f(x)\,dx + \int_0^s f^{-1}(y)\,dy \qquad (\textit{Youngsche Ungleichung}).$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn $f(t) = s$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 7 a) samt Skizze.

Aufgabe 9 (P)

Untersuchen Sie folgende Ausdrücke auf Konvergenz und berechnen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

a) $\displaystyle\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\,dx \quad (a \in \mathbb{R}\text{ fest})$

b) $\displaystyle\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h} \ln x\,dx \quad (a \in \mathbb{R}\text{ fest})$

c) $\displaystyle\lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{1}{x}\,dx$

d) $\displaystyle\lim_{h\to 0+} \int_0^1 h^x \cos x\,dx$

Frohe Weihnachten und ein gutes und erfolgreiches neues Jahr 2009!

Übungsklausur Die Übungsklausur zur HM I findet am **Samstag, den 31.01.2009, von 08:00 bis 10:00 Uhr** statt. Wer daran teilnehmen möchte, muss sich im Zeitraum vom 13.01.2009 bis 23.01.2009 in die Listen eintragen, die am Schwarzen Brett neben Raum 3A-17 (Allianzgebäude) aushängen.

ACHTUNG: Es gibt eine spezielle Liste für Studierende der Diplom- oder Lehramtsstudiengänge Physik oder Chemie, die einen Übungsschein benötigen.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 6, 7 und 8**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^{-k}} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\Big)e^{-\frac{k}{n}}\,.$$

Ist $x_k^{(n)} := \frac{k}{n}$ für $k = 0,1,\ldots,n$ gesetzt, so ist $Z_n := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\} = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ und $\xi^{(n)} := (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}) = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1)$ ein zu Z_n passender Zwischenvektor. Wir definieren $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x}$ und erhalten eine Riemann-Summe $\sigma_f(\xi^{(n)}, Z_n) := \sum_{k=1}^{n}(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)})f(x_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n})e^{-\frac{k}{n}}$. Da f als stetige Funktion über $[0,1]$ integrierbar ist und da $|Z_n| = \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, ergibt sich gemäß Satz 10.12

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^{-k}} = \lim_{n\to\infty}\sigma_f(\xi^{(n)}, Z_n) = \int_0^1 f\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx \overset{\text{Bsp. (2) in 10.11}}{=} 1 - e^{-1} = 1 - \tfrac{1}{e}\,.$$

b) Hier betrachten wir die Zerlegung $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 3\}$ des Intervalls $[0,3]$ und den passenden Zwischenvektor $\xi^{(n)} := (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 3)$. Erneut konvergiert die Feinheit von Z_n für $n \to \infty$ gegen Null. Mit der Funktion $g\colon [0,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(\pi x)$ gilt nach Satz 10.12

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}\sin\big(\tfrac{k\pi}{n}\big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\Big(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\Big)\sin\big(\tfrac{k\pi}{n}\big) = \lim_{n\to\infty}\sigma_g(\xi^{(n)}, Z_n) = \int_0^3 g\,dx$$
$$= \int_0^3 \sin(\pi x)\,dx \overset{\text{Bsp. (2) in 10.11}}{=} \frac{1-\cos(3\pi)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\,.$$

Aufgabe 2

Alle Funktionen f_n sind stetig an der Stelle 0, denn für $x \neq 0$ gilt

$$|f_n(x)| = |x^n \sin(x^{-1})| \leqslant x^n\,,$$

woraus $f_n(x) \xrightarrow{x\to 0} 0 = f_n(0)$ folgt.
Die Funktion f_n ist differenzierbar in 0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n\sin(x^{-1})-0}{x} = \lim_{x\to 0}x^{n-1}\sin(x^{-1})$$

existiert. Für $n \geqslant 2$ existiert dieser Grenzwert [es handelt sich dann um $\lim_{x\to 0} f_{n-1}(x) = 0$], für $n = 1$ jedoch nicht: Für die Folge $(x_k)_k := ((\frac{\pi}{2} + k\pi)^{-1})_k$ gilt nämlich $x_k \to 0$ $(k \to \infty)$, aber

$$\frac{f_1(x_k)-f_1(0)}{x_k - 0} = \sin(x_k^{-1}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$$

konvergiert für $k \to \infty$ nicht.

Aufgabe 3

Seien $\alpha > 1$, $C > 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|^\alpha \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass f in x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) = 0$. Es gilt

$$0 \leqslant \lim_{x\to x_0} \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right| \leqslant \lim_{x\to x_0} \frac{C\,|x-x_0|^\alpha}{|x-x_0|} = C \lim_{x\to x_0} |x-x_0|^{\alpha-1} = 0$$

wegen $\alpha - 1 > 0$. Damit ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0\,,$$

d.h. f ist in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = 0$.
Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

a) Nach Definition gilt $f(x) = x^{\sqrt[3]{x}} = e^{\ln(x)\cdot\sqrt[3]{x}}$ für jedes $x > 0$.
Ist $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)\sqrt[3]{x}$ gesetzt, so ist $f(x) = e^{g(x)} = E(g(x))$. Die Kettenregel liefert

$$f'(x) = E'(g(x))\,g'(x) = E(g(x))\,g'(x) = f(x)\,g'(x)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

Weiter gilt nach der Produktregel

$$g'(x) = \ln'(x)\,\sqrt[3]{x} + \ln(x)\,\left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{x}\sqrt[3]{x} + \ln(x)\,\frac{1}{3}\,x^{-2/3} = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3+\ln(x))}{3x}\,, \qquad x \in (0,\infty)\,,$$

also

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3+\log(x))}{3x}\,f(x)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

b) Anwendung der Produkt- und Kettenregel liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -2\sin(2x)\,e^{\sin x} + \cos(2x)\,e^{\sin x}\cos x = \big(\cos(2x)\,\cos x - 2\sin(2x)\big)\,e^{\sin x}\,.$$

c) Mit Hilfe der Kettenregel erhält man für jedes $x \in (1,\infty)$

$$f'(x) = \ln'(\ln x)\,\ln'(x) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,.$$

d) Für jedes $x \in (0,\pi)$ gilt [Man beachte $\sin x > 0$ für alle $x \in (0,\pi)$.]

$$f(x) = x^{\sin x}\,(\sin x)^x = e^{\ln(x)\cdot\sin x}\cdot e^{\ln(\sin x)\cdot x} = e^{\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x} = E(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\,.$$

Mehrmalige Anwendung der Ketten- und Produktregel ergibt für jedes $x \in (0,\pi)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= E'(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\cdot(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)' \\ &= E(\ln(x)\cdot\sin x + \ln(\sin x)\cdot x)\cdot\Big(\frac{1}{x}\sin x + \ln(x)\cos(x) + \frac{\cos x}{\sin x}\,x + \ln(\sin x)\Big) \\ &= x^{\sin x}\,(\sin x)^x\,\Big(\frac{\sin x}{x} + \ln(x)\cos(x) + \frac{x}{\tan x} + \ln(\sin x)\Big)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Wir betrachten die Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x \sin(e^t)\,dt$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \sin x$.
Dann ist f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \sin(e^x)$. Bekanntlich ist auch g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) = \cos x$. Wegen $F(x) = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$ liefert die Kettenregel, dass F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$F'(x) = f'(g(x))\,g'(x) = \sin(e^{\sin x})\,\cos(x) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 6

a) **i)** Wir betrachten die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \cos x$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x > 0$ ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin \xi\,.$$

Speziell zu $x_n := \frac{1}{n}$ existiert ein solches $\xi_n \in (0, \frac{1}{n})$. Dann gilt $\xi_n \to 0$ für $n \to \infty$ und

$$n\big(1 - \cos \tfrac{1}{n}\big) = \frac{1 - \cos x_n}{x_n} = \sin \xi_n \xrightarrow{n\to\infty} \sin 0 = 0\,, \qquad \text{da sin in 0 stetig ist.}$$

ii) Hier betrachten wir die Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \cos \sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x - 1, x + 1)$ mit

$$\frac{f(x + 1) - f(x - 1)}{(x + 1) - (x - 1)} = f'(\xi_x)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos\sqrt{x + 1} - \cos\sqrt{x - 1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}}\,.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\big|\cos\sqrt{x + 1} - \cos\sqrt{x - 1}\big| = \left|\frac{\sin\sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \overset{\xi_x\in(x-1,x+1)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{x - 1}}\,.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

b) Für $t > 0$ setzen wir $f(t) := t \ln t$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(t) = 1 \cdot \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = 1 + \ln t$. Zu $x > y > 0$ existiert gemäß Mittelwertsatz ein $\xi \in (y, x)$ mit

$$x \ln x - y \ln y = (x - y)f'(\xi) = (x - y)(1 + \ln \xi) \leqslant (x - y)(1 + \ln x)\,.$$

Aufgabe 7

a) Seien $0 \leqslant a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende Funktion mit $f(a) \geqslant 0$. Die (dann existierende) Umkehrfunktion von f sei $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a, b]$.

Da die Funktionen f und f^{-1} stetig sind, gilt $f \in R[a, b]$ und $f^{-1} \in R[f(a), f(b)]$.

Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Da f streng monoton wachsend ist, ist $\tilde{Z} := f(Z) = \{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ eine Zerlegung von $[f(a), f(b)]$.

Unter Berücksichtigung der Monotonie von f und f^{-1} erhalten wir

$$\begin{aligned}
S_f(Z) + s_{f^{-1}}(\tilde{Z}) &= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sup f([x_{j-1}, x_j])}_{=f(x_j)}(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\inf f^{-1}([f(x_{j-1}), f(x_j)])}_{=f^{-1}(f(x_{j-1}))=x_{j-1}}(f(x_j) - f(x_{j-1}))\\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big[f(x_j)x_j - f(x_j)x_{j-1} + x_{j-1}f(x_j) - x_{j-1}f(x_{j-1})\Big]\\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big[f(x_j)x_j - x_{j-1}f(x_{j-1})\Big] = f(x_n)x_n - x_0 f(x_0) = f(b)\,b - a\,f(a)\,.
\end{aligned}$$

Wegen $s_{f^{-1}} = \sup\{s_{f^{-1}}(Z') : \ Z' \text{ ist Zerlegung von } [f(a), f(b)]\} \geqslant s_{f^{-1}}(\tilde{Z})$ ergibt sich

$$S_f(Z) + s_{f^{-1}} \geqslant f(b)\,b - a\,f(a) \qquad \text{bzw.} \qquad S_f(Z) \geqslant b\,f(b) - a\,f(a) - s_{f^{-1}}\,.$$

Da Z eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$ war, folgt

$$S_f = \inf\{ \underbrace{S_f(Z)}_{\geqslant b\, f(b) - a\, f(a) - s_{f^{-1}}} : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} \geqslant b\, f(b) - a\, f(a) - s_{f^{-1}}$$

bzw.

$$S_f + s_{f^{-1}} \geqslant b\, f(b) - a\, f(a)\,. \tag{1}$$

Mit einer analogen Rechnung zeigen wir $s_f + S_{f^{-1}} \leqslant b\, f(b) - a\, f(a)$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} s_f(Z) + S_{f^{-1}}(\tilde{Z}) &= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\inf f([x_{j-1}, x_j])}_{=f(x_{j-1})}(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sup f^{-1}([f(x_{j-1}), f(x_j)])}_{=f^{-1}(f(x_j))=x_j}(f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big[f(x_{j-1})x_j - f(x_{j-1})x_{j-1} + x_j f(x_j) - x_j f(x_{j-1}) \Big] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big[f(x_j)x_j - x_{j-1} f(x_{j-1}) \Big] = f(x_n)x_n - x_0 f(x_0) = f(b)\, b - a\, f(a)\,. \end{aligned}$$

Wegen $S_{f^{-1}} = \inf\{S_{f^{-1}}(Z') :\ Z' \text{ ist Zerlegung von } [f(a), f(b)]\} \leqslant S_{f^{-1}}(\tilde{Z})$ ergibt sich

$$s_f(Z) + S_{f^{-1}} \leqslant f(b)\, b - a\, f(a)\,.$$

Da Z eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$ war, folgt wie zuvor

$$s_f + S_{f^{-1}} \leqslant b\, f(b) - a\, f(a)\,. \tag{2}$$

Insgesamt haben wir

$$b\, f(b) - a\, f(a) \overset{(1)}{\leqslant} S_f + s_{f^{-1}} \overset{f \in R[a,b],\, f^{-1} \in R[f(a), f(b)]}{=} s_f + S_{f^{-1}} \overset{(2)}{\leqslant} b\, f(b) - a\, f(a)\,,$$

also überall "=". Folglich ist

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\, dy = S_f + s_{f^{-1}} = b\, f(b) - a\, f(a)\,.$$

b) **i)** Wir wenden Teil a) an mit $a = 0$, beliebigem $b > 0$ und $f(x) := e^x$ für $x \in [0, b]$. Bekanntlich ist die Funktion $f : [0, b] \to [1, e^b]$ bijektiv, stetig und streng monoton wachsend mit $f(0) = 1 \geqslant 0$. Ihre Umkehrfunktion lautet $f^{-1} : [1, e^b] \to [0, b],\ y \mapsto \ln y$. Der a)-Teil liefert für jedes $b > 0$

$$\underbrace{\int_0^b e^x\, dx}_{=e^b - 1} + \int_1^{e^b} \ln y\, dy = b\, e^b \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{e^b} \ln y\, dy = (b-1)e^b + 1\,.$$

Nun sei $s > 1$. Speziell für $b = \ln s > 0$ ergibt sich

$$\int_1^s \ln y\, dy = (\ln s - 1)s + 1\,.$$

ii) Seien $m \in \mathbb{N}$ und $t > 0$. Wir benutzen den a)-Teil in der Situation $a = 0$, $b > 0$ beliebig und $f(x) = x^m$ für $x \in [0, b]$. Die Funktion $f : [0, b] \to [1, b^m]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend mit $f(0) = 0 \geqslant 0$. Die Umkehrfunktion von f ist gegeben durch $f^{-1} : [0, b^m] \to [0, b],\ y \mapsto y^{1/m} = \sqrt[m]{y}$. Gemäß a) erhalten wir

$$\underbrace{\int_0^b x^m\, dx}_{=\frac{1}{m+1} b^{m+1}} + \int_0^{b^m} y^{1/m}\, dy = b\, f(b) = b^{m+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^{b^m} y^{1/m}\, dy = \big(1 - \tfrac{1}{m+1}\big) b^{m+1}\,.$$

Speziell für $b = t^{1/m}$ schließen wir

$$\int_0^t y^{1/m}\, dy = \tfrac{m}{m+1}\, t^{(m+1)/m}\,.$$

Aufgabe 8 (P)

Sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ stetig und streng monoton wachsend mit $f(0)=0$ und $f(x)\to\infty$ $(x\to\infty)$. Weiter seien $s,t \geqslant 0$. Wir wenden das Resultat aus Aufgabe 7 a) an auf f, $a=0$ und $b=f^{-1}(s)$ [Unter den gegebenen Voraussetzungen an f folgt mit dem Zwischenwertsatz $f([0,\infty))=[0,\infty)$. Daher existiert $f^{-1}(s)$.]

$$\int_0^{f^{-1}(s)} f(x)\,dx + \int_0^s f^{-1}(y)\,dy = s\,f^{-1}(s)\,.$$

Addieren wir auf beiden Seiten $\int_{f^{-1}(s)}^t f(x)\,dx$ und benutzen Satz 10.9, so erhalten wir

$$\int_0^t f(x)\,dx + \int_0^s f^{-1}(y)\,dy = f^{-1}(s)\,s + \int_{f^{-1}(s)}^t f(x)\,dx\,.$$

Mit

$$f^{-1}(s)\,s = st - \big(t-f^{-1}(s)\big)s = st - \int_{f^{-1}(s)}^t s\,dx$$

ergibt sich

$$\int_0^t f(x)\,dx + \int_0^s f^{-1}(y)\,dy = st - \int_{f^{-1}(s)}^t s\,dx + \int_{f^{-1}(s)}^t f(x)\,dx = st + \int_{f^{-1}(s)}^t (f(x)-s)\,dx\,.$$

Hieraus folgt die behauptete Aussage, sobald wir

$$\int_{f^{-1}(s)}^t (f(x)-s)\,dx \begin{cases} =0 & \text{für } s=f(t), \\ >0 & \text{für } s\neq f(t) \end{cases} \tag{$*$}$$

gezeigt haben.

1. Fall: $s=f(t)$. Dann ist $f^{-1}(s)=t$ und damit $\int_{f^{-1}(s)}^t (f(x)-s)\,dx = \int_t^t (f(x)-s)\,dx = 0$.

2. Fall: $s<f(t)$ bzw. $f^{-1}(s)<t$. Für alle $x\in[f^{-1}(s),t]$ gilt $s=f(f^{-1}(s))\leqslant f(x)$ bzw. $f(x)-s\geqslant 0$. Wegen $f(t)-s>0$ und der Stetigkeit von $x\mapsto f(x)-s$ ergibt sich nach Aufgabe 6 a) vom 9. Übungsblatt

$$\int_{f^{-1}(s)}^t (f(x)-s)\,dx > 0\,.$$

3. Fall: $s>f(t)$ bzw. $f^{-1}(s)>t$. Für alle $x\in[t,f^{-1}(s)]$ gilt $s=f(f^{-1}(s))\geqslant f(x)$ bzw. $s-f(x)\geqslant 0$. Wegen $s-f(t)>0$ und der Stetigkeit von $x\mapsto s-f(x)$ ergibt sich nach Aufgabe 6 a) vom 9. Übungsblatt

$$\int_t^{f^{-1}(s)} (s-f(x))\,dx > 0\,, \qquad \text{also} \qquad \int_{f^{-1}(s)}^t (f(x)-s)\,dx > 0\,.$$

Damit ist $(*)$ bewiesen.

Bemerkung: Aus obigem Resultat kann man folgern:
Sind $p,q>1$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, dann gilt für alle $s,t\geqslant 0$

$$st \leqslant \frac{s^p}{p}+\frac{t^q}{q}$$

mit Gleichheit genau für $s^p=t^q$.
(Dazu betrachtet man $f(x)=x^{q-1}$ für $x\geqslant 0$. Die Umkehrfunktion von f ist dann gegeben durch $f^{-1}(y)=y^{p-1}$ für $y>0$.)

Aufgabe 9 (P)

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Da $f : x \mapsto \cos(x^2)$ als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig ist, gibt es zu jedem $h > 0$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [a-h, a+h]$ so, dass gilt

$$\int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\,dx = \int_{a-h}^{a+h} 1\,dx\,\cos(\xi_h^2) = \big((a+h)-(a-h)\big)\cos(\xi_h^2) = 2h\cos(\xi_h^2)\,.$$

Also ist $\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\,dx = 2\cos(\xi_h^2)$ für jedes $h > 0$. Für $h \to 0+$ konvergiert ξ_h gegen a und wegen der Stetigkeit von f konvergiert damit auch $\cos(\xi_h^2)$ gegen $\cos(a^2)$. Zusammen folgt

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h} \cos(x^2)\,dx = 2\cos(a^2)\,.$$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Für jedes $h > 0$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [a+h, a+2h]$ mit

$$\int_{a+h}^{a+2h} \ln x\;dx = ((a+2h)-(a+h))\ln\xi_h = h\ln\xi_h\,.$$

Demzufolge ist $\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h} \ln x\;dx = \ln\xi_h$. Mit $h \to \infty$ geht ξ_h gegen ∞ und damit strebt auch $\ln\xi_h$ gegen ∞. Also konvergiert der Ausdruck $\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h} \ln x\;dx$ für $h \to \infty$ nicht.

c) Wir zeigen, dass der Grenzwert nicht existiert. Sei dazu $h > 1$ und $[h]$ bezeichne die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich h ist, d.h. $[h] := \max\{k \in \mathbb{N} :\ k \leqslant h\}$.

Wir zerlegen das Intervall $[1, [h]]$ in die $[h]-1$ Intervalle $[n, n+1]$ für $n = 1, 2, \ldots, [h]-1$. Jedes dieser Intervalle hat die Länge 1. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert für jedes dieser Intervalle ein $\xi_n \in [n, n+1]$ mit $\int_n^{n+1} 1/x\;dx = 1/\xi_n \geqslant 1/(n+1)$.

[Hier kann man auch mit der Monotonie des Integrals argumentieren: Wegen $1/x \geqslant 1/(n+1)$ für alle $x \in [n, n+1]$ gilt nach Satz 10.3 (1): $\int_n^{n+1} 1/x\;dx \geqslant \int_n^{n+1} 1/(n+1)\;dx = 1/(n+1)$.]

Damit gilt

$$\int_1^h \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{[h]} \frac{1}{x}\,dx + \underbrace{\int_{[h]}^h \frac{1}{x}\,dx}_{\geqslant 0} \geqslant \int_1^{[h]} \frac{1}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{[h]-1}\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \geqslant \sum_{n=1}^{[h]-1} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{[h]} \frac{1}{k}\,.$$

Für $h \to \infty$ und damit $[h] \to \infty$ konvergiert diese Summe nicht [$\to$ harmonische Reihe]. Deshalb existiert der Grenzwert $\lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{1}{x}\,dx$ nicht.

Dies lässt sich auch mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung einsehen, denn für jedes $h > 0$ gilt

$$\int_1^h \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^h = \ln h - \ln 1 = \ln h \to \infty \qquad \text{für } h \to \infty\,.$$

d) Wir zeigen, dass der Grenzwert 0 ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$.

Wir zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in zwei Teilintervalle so, dass der Betrag des Integrals über ein Teilintervall durch $\varepsilon/2$ abgeschätzt werden kann.

Das erste Intervall soll die Länge $\varepsilon/2$ haben. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi \in [0, \varepsilon/2]$ mit

$$\Big|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos x\;dx\Big| = \Big|\frac{\varepsilon}{2}\Big|\;|h^\xi|\;|\cos\xi| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für jedes } h \in (0,1)\,.$$

Für $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$ gilt $\xi \geqslant \varepsilon/2$. Sei nun $h > 0$ so klein, dass $h^{\varepsilon/2} < \varepsilon/2$ ist. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für ein $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$

$$\Big| \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1} h^x \cos x \; dx \Big| \leqslant \underbrace{(1 - \varepsilon/2)}_{\leqslant 1} |h^\xi| \; |\cos \xi| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammen können wir abschätzen

$$\Big| \int_0^1 h^x \cos x \; dx \Big| = \Big| \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x \cos x \; dx + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1} h^x \cos x \; dx \Big| \leqslant \Big| \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x \cos x \; dx \Big| + \Big| \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1} h^x \cos x \; dx \Big| < \varepsilon.$$

Also ist $\lim\limits_{h \to 0+} \int_0^1 h^x \cos x \, dx = 0$.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
13.01.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ und entscheiden Sie, welche der beiden Zahlen e^π, π^e die größere ist.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen konstant sind, und bestimmen Sie die jeweilige Konstante.

a) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arctan(x) + \arctan(x^{-1})$

b) $g\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin(\cos x) - \arccos(\sin x)$

Aufgabe 3

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := 1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1}$.

a) Beweisen Sie, dass f injektiv ist, und zeigen Sie $f'(x) = 1 - (f(x))^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie damit die Ableitung der Umkehrfunktion von f.

c) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von f^{-1} und berechnen Sie damit erneut die Ableitung von f^{-1}.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$ sowie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie folgende Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^3\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-2}^2 |x-1|\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,\cos x\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$ **e)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\,dt$ **f)** $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$

g) $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx \quad (k \in \mathbb{Z})$ **h)** $\displaystyle\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx$ **i)** $\displaystyle\int_1^4 \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Untersuchen Sie jeweils, ob die Regel von de l'Hospital anwendbar ist, und berechnen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) := x + \sin(x)\cos(x)$ und $g(x) := f(x)e^{\sin x}$

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$

Aufgabe 8

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geqslant 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Für welche Startwerte $x_0 \in (0, \infty)$ konvergiert das Newton-Verfahren?

Aufgabe 9

Für $\lambda > 0$ ist die Funktion $f_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_\lambda(x) := \arctan(\lambda x)$.

a) Begründen Sie, dass 0 die einzige Nullstelle von f_λ ist.

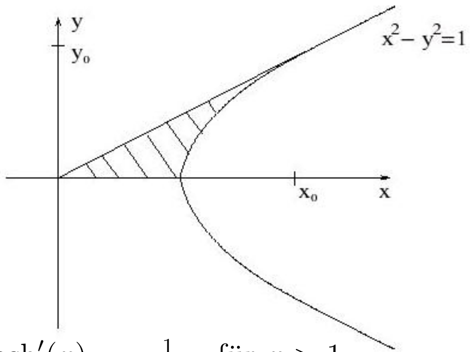
b) Führen Sie für $\lambda = 3$ zwei Iterationsschritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = \frac{1}{3}$ durch.

c) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x_0| \geqslant \frac{2}{\lambda}$ nicht konvergent ist.

Hinweis: Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $|x_n| \geqslant \frac{2}{\lambda}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 10 (P)

Sei (x_0, y_0) der Schnittpunkt der skizzierten Geraden mit der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der schraffierten Fläche gleich $\frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)$ ist.



Hinweis: Verwenden Sie $\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ für $x > 1$.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4, 6, 8 und 9**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2008/09
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachten wir f'. Für jedes $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \begin{cases} > 0 & \text{für } x < e, \\ < 0 & \text{für } x > e. \end{cases}$$

Somit ist f auf $\begin{cases} (0,e) \\ (e,\infty) \end{cases}$ streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$. Für $x, y \in (0,\infty)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x^y > y^x \quad &\iff \quad e^{y\cdot\ln(x)} > e^{x\cdot\ln(y)} \quad \overset{\text{Exp.fkt. streng mon. wachsend}}{\iff} \quad y \cdot \ln(x) > x \cdot \ln(y) \\ &\iff \quad \frac{\ln(x)}{x} > \frac{\ln(y)}{y} \quad \iff \quad f(x) > f(y)\,. \end{aligned}$$

Da $\pi > e$ und f auf (e,∞) streng monoton fallend ist, folgt $f(\pi) < f(e)$. Deshalb liefert obige Äquivalenzkette $e^\pi > \pi^e$.

Aufgabe 2

a) Nach der Kettenregel ist die Funktion f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x^{-1})^2} \cdot \left(-x^{-2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

Da die Ableitung von f auf $(0,\infty)$ verschwindet, ist f dort konstant. Für alle $x > 0$ gilt

$$f(x) = f(1) = 2\arctan(1) = 2 \cdot \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

b) Auf den gedruckten Übungsblättern hat sich leider ein Vorzeichenfehler eingeschlichen. Korrekt muss die Definition von g lauten: $g\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin(\cos x) - \arccos(\sin x)$.

Auf $(0,\pi/2)$ ist g differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} \cdot (-\sin x) - \frac{-1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} \cdot \cos x \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2(x)}} \cdot (-\sin x) - \frac{-1}{\sqrt{\cos^2(x)}} \cdot \cos x = \frac{-\sin x}{|\sin(x)|} + \frac{\cos x}{|\cos(x)|} \\ &= -1 + 1 = 0\,, \qquad \text{da } \sin x > 0, \cos x > 0 \text{ für alle } x \in (0,\pi/2)\,. \end{aligned}$$

Folglich ist g auf $(0,\pi/2)$ konstant mit

$$g(x) = g(\pi/4) = \arcsin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - \arccos(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \pi/4 - \pi/4 = 0 \qquad \text{für alle } x \in (0,\pi/2)\,.$$

Außerdem sind

$$\begin{aligned} g(0) &= \arcsin(1) - \arccos(0) = \pi/2 - \pi/2 = 0\,, \\ g(\pi/2) &= \arcsin(0) - \arccos(1) = 0 - 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Es gilt $f'(x) = 8(e^{2x}+4)^{-2} \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen

$$\begin{aligned}1-(f(x))^2 &= 1 - \big(1 - 8(e^{2x}+4)^{-1}\big)^2 = 1 - \big(1 - 16(e^{2x}+4)^{-1} + 64(e^{2x}+4)^{-2}\big)\\ &= 16(e^{2x}+4)^{-1} - 64(e^{2x}+4)^{-2} = 16(e^{2x}+4)^{-2}\big((e^{2x}+4)-4\big) = 16e^{2x}(e^{2x}+4)^{-2}\end{aligned}$$

gilt auch die behauptete Gleichung.

b) f hat als Bildbereich $(-1,1)$, denn $x \mapsto (e^{2x}+4)^{-1}$ hat als Bildbereich $(0, \frac{1}{4})$. Da stets $f'(x) \neq 0$ gilt, liefert der Satz über die Umkehrfunktion, dass $f^{-1}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \overset{\text{a)}}{=} \frac{1}{1-(f(f^{-1}(y)))^2} = \frac{1}{1-y^2} \qquad \text{für alle } y \in (-1,1)\,.$$

c) Wir lösen $f(x) = y$ nach x auf:

$$\begin{aligned}1 - 8(e^{2x}+4)^{-1} = y &\iff (1-y)^{-1} = \tfrac{1}{8}(e^{2x}+4) \iff 8(1-y)^{-1} - 4 = e^{2x}\\ &\iff x = \tfrac{1}{2}\ln\big(8(1-y)^{-1}-4\big)\,.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für jedes $y \in (-1,1)$

$$(f^{-1})'(y) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{8(1-y)^{-1}-4} \cdot \frac{8}{(1-y)^2} = \frac{4}{8(1-y)-4(1-y)^2} = \frac{4}{4-4y^2} = \frac{1}{1-y^2}\,.$$

d) Es gilt $f(0) = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$, $f'(0) = 1 - (-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$, $f^{-1}(-\frac{3}{5}) = 0$ und $(f^{-1})'(-\frac{3}{5}) = \frac{25}{16}$.

$$T(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0), \qquad \text{also} \qquad T(x) = \tfrac{16}{25}x - \tfrac{3}{5}$$

ist die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$. Die Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$ hat die Gleichung

$$T(y) = (f^{-1})'(y_0)(y-y_0) + f^{-1}(y_0), \qquad \text{also} \qquad T(y) = \tfrac{25}{16}y + \tfrac{15}{16}\,.$$

Aufgabe 4

a) Wir verwenden partielle Integration mit $f(x) = \arcsin x$ und $g'(x) = 1$:

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,dx &= \int 1 \cdot \arcsin x\,dx = x \arcsin x - \int x \arcsin'(x)\,dx\\ &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,.\end{aligned}$$

b) Hier substituieren wir $u = e^x$. Dies liefert $du = e^x\,dx$ und damit

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1}{u^2+1}\,du\Big|_{u=e^x} = \arctan(u)\big|_{u=e^x} = \arctan(e^x)\,.$$

c) Wir substituieren $u = 1-x$. Dies liefert $du = (-1)\,dx$, also

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \int \frac{1-u}{\sqrt{u}}(-1)\,du\Big|_{u=1-x} = \int (u^{1/2} - u^{-1/2})\,du\Big|_{u=1-x} = \tfrac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\Big|_{u=1-x}\\ &= \tfrac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Hier kann man sofort eine Stammfunktion hinschreiben:

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,dx = \tfrac{1}{8}(1+2x)^4\,\big|_{x=0}^{1} = \tfrac{1}{8}(3^4-1^4) = 10\,.$$

b) Wir zerlegen das Intervall:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |x-1|\,dx &= \int_{-2}^{1} |x-1|\,dx + \int_{1}^{2} |x-1|\,dx = \int_{-2}^{1} (1-x)\,dx + \int_{1}^{2} (x-1)\,dx \\ &= \big(x-\tfrac{1}{2}x^2\big)\Big|_{-2}^{1} + \big(\tfrac{1}{2}x^2-x\big)\Big|_{1}^{2} \\ &= \big(1-\tfrac{1}{2}\big) - (-2-2) + (2-2) - \big(\tfrac{1}{2}-1\big) = 5\,.\end{aligned}$$

c) Wegen $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$ ist $\frac{1}{2}\sin^2 x$ eine Stammfunktion von $\sin x\cos x$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x\big|_{x=0}^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}\big(\sin^2(\tfrac{1}{2}\pi)-\sin^2(0)\big) = \tfrac{1}{2}(1-0) = \tfrac{1}{2}\,.$$

d) Auch hier kann man die Stammfunktion leicht finden:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx &= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}}\,dx \\ &= -\tfrac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}\,\Big|_{x=0}^{1} = -\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{9}\,) = \tfrac{1}{4}(3-\sqrt{5}\,)\,.\end{aligned}$$

e) Hier wenden wir die Substitutionsregel mit $g(t)=\sqrt{t}$ an. Wir ersetzen also $\sqrt{t}$ durch x und $g'(t)\,dt = (2\sqrt{t}\,)^{-1}\,dt$ durch dx. Dabei müssen wir auch die Integrationsgrenzen anpassen: $t=1$ entspricht $x=g(1)=1$ und $t=4$ entspricht $x=g(4)=2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\,dt &= \int_1^4 \frac{2}{1+\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+x}\,dx = 2\ln|1+x|\,\big|_{x=1}^{2} = 2\big(\ln(3)-\ln(2)\big) = 2\ln\tfrac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

f) Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir partielle Integration für $f(x)=\ln x$ und $g'(x)=x$. Mit $f'(x)=x^{-1}$ und $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ folgt

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln x\,dx &= \int_1^e f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_{x=1}^{e} - \int_1^e f'(x)g(x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x\big|_{x=1}^{e} - \int_1^e \tfrac{1}{2}x^2x^{-1}\,dx = \tfrac{1}{2}(e^2\ln e-\ln 1) - \int_1^e \tfrac{1}{2}x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}e^2 - \big(\tfrac{1}{4}x^2\big)\big|_{x=1}^{e} = \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}(e^2-1) = \tfrac{1}{4}(e^2+1)\,.\end{aligned}$$

g) Sei $k\in\mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst das Integral ohne Betrag:

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x\,dx &= -\cos x\big|_{x=(k-1)\pi}^{k\pi} = -\cos(k\pi)+\cos((k-1)\pi) \\ &= -(-1)^k+(-1)^{k-1} = (-(-1)+1)(-1)^{k-1} = 2(-1)^{k-1}\,.\end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion ihre Nullstellen genau in $k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ hat, ist $\sin x$ auf dem ganzen Intervall $[(k-1)\pi, k\pi]$ entweder $\geqslant 0$ oder $\leqslant 0$. Folglich gilt

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx = \left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin x\,dx\right| = 2\,.$$

h) Wieder kommt partielle Integration zum Einsatz: $f(x) = \sin x$ und $g'(x) = \sin x$.

$$\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \sin x \cdot (-\cos x)\Big|_{x=0}^{\pi} - \int_0^\pi \cos x \cdot (-\cos x)\,dx = \int_0^\pi (\cos x)^2\,dx$$
$$= \int_0^\pi \big(1 - (\sin x)^2\big)\,dx = \pi - \int_0^\pi (\sin x)^2\,dx$$

Betrachtet man nun den ersten und letzten Term in dieser Gleichungskette, so folgt

$$2\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \pi\,, \qquad \text{also} \qquad \int_0^\pi (\sin x)^2\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

i) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$, d.h. $x = t^2$. Dann ist $dx = 2t\,dt$ und aus $x : 1 \to 4$ ergibt sich $t : 1 \to 2$

$$\int_1^4 \arctan\sqrt{\sqrt{x} - 1}\,dx = \int_1^2 \arctan(\sqrt{t-1}\,) \cdot 2t\,dt\,;$$

nun substituieren wir $u = \sqrt{t-1}$, also $t = u^2 + 1$, $dt = 2u\,du$, $t : 1 \to 2$ wird zu $u : 0 \to 1$,

$$= \int_0^1 \arctan(u) \cdot 2(u^2+1) \cdot 2u\,du = \int_0^1 (4u^3 + 4u)\arctan(u)\,du\,.$$

(Natürlich hätten wir die beiden Substitutionen auch zu einer zusammenfassen können.) Dann führen wir eine partielle Integration aus mit $f(u) = \arctan(u)$ und $g'(u) = 4u^3 + 4u$:

$$= (u^4 + 2u^2)\arctan(u)\,\Big|_{u=0}^{1} - \int_0^1 (u^4 + 2u^2)\frac{1}{1+u^2}\,du$$
$$= 3\arctan(1) - \int_0^1 \frac{(u^2+1)^2 - 1}{1+u^2}\,du = \tfrac{3}{4}\pi - \int_0^1 (u^2+1)\,du + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du$$
$$= \tfrac{3}{4}\pi - (\tfrac{1}{3}u^3 + u)\Big|_{u=0}^{1} + \arctan(u)\Big|_{u=0}^{1} = \tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{4}\pi = \pi - \tfrac{4}{3}\,.$$

Aufgabe 6

a) Wir versuchen, ob wir die Regeln von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2\cos(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + x^2\sin(1/x)\frac{1}{x^2}}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + \sin(1/x)}{\cos x}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n/\cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x\cos(1/x) = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

b) Zu untersuchen ist hier $f(x)/g(x)$ für $f(x) := \int_0^x e^{t^2}\,dt$ und $g(x) := x^{-1}e^{x^2}$. Wir wenden die Regel von de l'Hospital an: Der zu untersuchende Grenzwert ist vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$" (Beachte: für $x \geqslant 0$ gilt $f(x) \geqslant \int_0^x 1\,dt = x$) und wegen

$$f'(x) = e^{x^2}, \qquad g'(x) = -x^{-2}e^{x^2} + x^{-1}e^{x^2} \cdot 2x = (2 - x^{-2})e^{x^2}$$

gilt: Die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x stets $\neq 0$ und der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{(2 - x^{-2})e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2 - x^{-2}} = \frac{1}{2}$$

existiert. Folglich ist auch der zu untersuchende Grenzwert $\frac{1}{2}$.

c) Sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ streben für $x \to \infty$ gegen ∞. Als Ableitungen erhalten wir $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$ und

$$g'(x) = f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}(2\cos^2 x + x\cos x + \sin x \cos^2 x)$$
$$= e^{\sin x}\cos x\,(2\cos x + x + \sin x \cos x)\,.$$

Also wird $g'(x)$ auch für beliebig große x durch den Faktor $\cos x$ immer wieder 0. Daher ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}}$$

existiert nicht (Betrachte $x_n := (n + \frac{1}{2})\pi$), obwohl für jene x, für die $g'(x) \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{e^{\sin x}(2\cos x + x + \sin x\cos x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0\,.$$

Aufgabe 7

a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0+} x\,\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0\,.$$

In $(*)$ verwendeten wir die Regel von de l'Hospital ($-\frac{1}{x^2} \neq 0$ für alle $x > 0$.). Hiermit folgt wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0+} x\ln(x)} = e^0 = 1\,.$$

b) Hier kann man die Regel von de l'Hospital zweimal anwenden (jeweils „$\frac{\infty}{\infty}$“ und die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x ungleich 0). Dies führt auf

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{(falls die Grenzwerte existieren),}$$

hilft also nicht, den Grenzwert zu berechnen. Einfaches Kürzen mit e^x liefert aber

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1\,.$$

c) Auch hier wenden wir zweimal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (jeweils für „$\frac{0}{0}$“; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 1 keine Nullstellen). Wegen $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x(x\ln x)' = x^x(1 + \ln x)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x)^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2\,.$$

Aufgabe 8

Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geqslant 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

gegeben, so ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{für } x < 0 \end{cases} = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}\,.$$

Das Newton-Verfahren liefert für einen beliebigen Startwert $x_0 \in (0, \infty)$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\sqrt{x_0}}{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}} = x_0 - 2x_0 = -x_0\,,$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{-\sqrt{-x_1}}{\frac{1}{2\sqrt{-x_1}}} = -x_0 - \frac{-\sqrt{x_0}}{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}} = -x_0 + 2x_0 = x_0\,.$$

Folglich ergibt das Newton-Verfahren die alternierende Folge $x_n = \begin{cases} x_0 & \text{für gerades } n, \\ -x_0 & \text{für ungerades } n. \end{cases}$
Diese Folge ist für alle $x_0 \in (0, \infty)$ divergent.

Aufgabe 9

Für $\lambda > 0$ ist die Funktion $f_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_\lambda(x) := \arctan(\lambda x)$.

a) Es gilt $f_\lambda(0) = 0$. Da f_λ injektiv ist, besitzt f_λ keine weiteren Nullstellen.

b) Nach der Kettenregel ist die Funktion f_3 auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f_3'(x) = \arctan'(3x) \cdot 3 = \frac{3}{1 + (3x)^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Die ersten beiden Iterationsschritte des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = \frac{1}{3}$ lauten

$$x_1 = x_0 - \frac{f_3(x_0)}{f_3'(x_0)} = \frac{1}{3} - \frac{\arctan(1)}{\frac{3}{1+1}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}\,,$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f_3(x_1)}{f_3'(x_1)} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{\arctan(1 - \frac{\pi}{2})}{\frac{3}{1+(1-\frac{\pi}{2})^2}} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{1 + (1 - \frac{\pi}{2})^2}{3} \arctan(1 - \tfrac{\pi}{2})\,.$$

c) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x_0| \geqslant \frac{2}{\lambda}$. Wir wollen zeigen, dass das Newton-Verfahren nicht konvergent ist, d.h. dass die durch

$$x_{n+1} := x_n - f_\lambda'(x_n)^{-1} f_\lambda(x_n)\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht konvergiert. Zuerst beweisen wir mittels vollständiger Induktion: $|x_n| \geqslant \frac{2}{\lambda}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Nach Wahl des Startwerts x_0 ist $|x_0| \geqslant \frac{2}{\lambda}$ erfüllt.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte $|x_n| \geqslant \frac{2}{\lambda}$ (IV). Zu zeigen ist, dass dann $|x_{n+1}| \geqslant \frac{2}{\lambda}$ gilt.

Per Definition gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_\lambda(x_n)}{f_\lambda'(x_n)} = x_n - \frac{\arctan(\lambda x_n)}{\frac{\lambda}{1+\lambda^2 x_n^2}} = x_n - \frac{\arctan(\lambda x_n)\,(1 + \lambda^2 x_n^2)}{\lambda}\,.$$

Nach (IV) ist $\lambda|x_n| \geqslant 2$. Wegen der Monotonie von arctan folgt $\arctan(\lambda|x_n|) \geqslant \arctan(2) \geqslant 1$ und damit

$$\left|\frac{\arctan(\lambda x_n)\,(1 + \lambda^2 x_n^2)}{\lambda}\right| = \arctan(\lambda|x_n|)\,\frac{(1 + \lambda^2 x_n^2)}{\lambda} \geqslant 1 \cdot \lambda x_n^2 = \underbrace{\lambda|x_n|}_{\geqslant 2}\,|x_n| \geqslant 2|x_n|\,.$$

Die umgekehrte Dreiecksungleichung liefert

$$|x_{n+1}| \geqslant \left|\frac{\arctan(\lambda x_n)\,(1 + \lambda^2 x_n^2)}{\lambda}\right| - |x_n| \geqslant 2|x_n| - |x_n| = |x_n| \overset{\text{(IV)}}{\geqslant} \frac{2}{\lambda}\,.$$

Daher ist $(x_n)_n$ keine Nullfolge, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert nicht gegen die Nullstelle von f_λ.

Dem vorigen Induktionsbeweis können wir entnehmen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert: Wegen

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{\arctan(\lambda x_n)\,(1+\lambda^2 x_n^2)}{\lambda}\right| \geqslant 2|x_n| \geqslant \frac{4}{\lambda} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und somit divergent.

Aufgabe 10 (P)

Sei (x_0, y_0) der Schnittpunkt im ersten Quadranten der Geraden mit der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.
Für $x, y \geqslant 0$ gilt $x^2 - y^2 = 1$ genau dann, wenn $y = \sqrt{x^2-1}$ ist.
Das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(x_0, 0)$ und (x_0, y_0) hat den Flächeninhalt

$$F_D := \frac{1}{2}\, x_0\, y_0 = \frac{1}{2}\, x_0 \sqrt{x_0^2 - 1}\,.$$

Die gesuchte Fläche erhalten wir, indem wir hiervon die Fläche unter der Hyperbel

$$F_H := \int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\, dx$$

subtrahieren. Partielle Integration führt auf

$$\begin{aligned}\int_1^{x_0} 1 \cdot \sqrt{x^2-1}\, dx &= \Big(x\sqrt{x^2-1}\Big)\Big|_{x=1}^{x_0} - \int_1^{x_0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\, dx \\ &= x_0\sqrt{x_0^2-1} - \int_1^{x_0} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx - \int_1^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx\,.\end{aligned}$$

Kürzen wir den Integranden im zweiten Summanden und addieren auf beiden Seiten $\int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\, dx$, so bekommen wir

$$2\int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\, dx = x_0\sqrt{x_0^2-1} - \int_1^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx\,.$$

Wegen $\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ für $x > 1$ und $\operatorname{Arcosh}(1) = 0$ folgt

$$\int_1^{x_0} \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\, x_0\sqrt{x_0^2-1} - \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Arcosh}(x)\Big)\Big|_{x=1}^{x_0} = \frac{1}{2}\, x_0\sqrt{x_0^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\,.$$

Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$F_D - F_H = \frac{1}{2}\, x_0\sqrt{x_0^2-1} - \left(\frac{1}{2}\, x_0\sqrt{x_0^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Arcosh}(x_0)\,.$$

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
20.01.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie Maximum und Minimum der Funktionen

a) $f\colon [-3,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - 4x^2 + 2\,;$

b) $g\colon [0,10] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -6x + (|x-3|+2)^2\,.$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\,(\ln x)^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y\ln y}{\sinh y - y}\,dy$

c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx \quad (s<0,\ t\in\mathbb{R})$ **d)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\ln(1+t)\,dt$

Aufgabe 3

Es sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\,dx$$

konvergiert, und berechnen Sie $I_n(\lambda)$.
Hinweis: Drücken Sie $I_n(\lambda)$ mittels $I_n(1)$ aus und finden Sie mit Hilfe von partieller Integration eine Rekursionsformel, wie man $I_{n+1}(1)$ berechnen kann, wenn $I_n(1)$ bekannt ist.

Aufgabe 4

a) Untersuchen Sie die uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$ **ii)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$

b) Existieren die folgenden Grenzwerte?

i) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\ln|x|\,dx + \int_\varepsilon^1 \ln|x|\,dx\right)$ **ii)** $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx\right)$

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie das *Integralkriterium:* Ist die Funktion $f : [2,\infty) \to (0,\infty)$ monoton fallend, so sind äquivalent:

$$\int_2^\infty f(x)\,dx \text{ konvergiert} \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{n=2}^\infty f(n) \text{ konvergiert}\,.$$

— bitte wenden —

b) Untersuchen Sie, für welche $\alpha > 0$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ konvergiert.

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f;0)$ von $f\colon x \mapsto \ln(1+x)$ und zeigen Sie

$$0 \leqslant \ln(1+x) - T_4(f;0)(x) \leqslant \tfrac{1}{5}\,x^5 \qquad \text{für alle } x \geqslant 0\,.$$

b) Bestimmen Sie Zahlen a, b und c, für die gilt:

$$\bigl|\ln(2+x) - a - bx\bigr| \leqslant c\,x^2 \qquad \text{für alle } x \in [-1,1]\,.$$

c) Approximieren Sie die Funktion $f(x) := e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ durch das Taylorpolynom $T_2(f;\frac{1}{2})$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an so, dass für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$\bigl|f(x) - T_2(f;\tfrac{1}{2})(x)\bigr| \leqslant C\,\bigl|x - \tfrac{1}{2}\bigr|^3\,.$$

Aufgabe 7

a) Zeigen Sie, dass für alle $|x| < 1$ gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\,.$$

b) Bestimmen Sie durch gliedweises Differenzieren den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 - n} \qquad \text{für } |x| < 1\,.$$

c) Die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x) := \ln(1-x^2)$. Berechnen Sie $f^{(20)}(0)$ sowie $f^{(31)}(0)$.

Aufgabe 8

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := x^2 + 2x - 3$. Berechnen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $1/f$ darstellt. Bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Aufgabe 9 (P)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen.

a) $y' = \bigl(x + \frac{2}{x}\bigr)y$ **b)** $y' = 2xy + x$ **c)** $y' + y\cos x = \sin x\,\cos x$

Aufgabe 10 (P)

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= x\sqrt{1-y^2}\,, \\ y(0) &= y_0\,, \qquad \text{wobei } y_0 \in [-1,1]\,. \end{aligned}$$

Für welche y_0 existiert eine eindeutige Lösung?

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4, 5, 7 und 10**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2008/09

Institut für Analysis

HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Die Funktion f ist auf dem gesamten Intervall $[-3, 2]$ differenzierbar. In jeder Maximum- oder Minimumstelle im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung von f. Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)\,.$$

Die Nullstellen von f' lauten 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wir müssen neben diesen drei Stellen (die alle im Intervall $[-3, 2]$ liegen!) auch die Ränder des Intervalls $[-3, 2]$ untersuchen: $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -2$, $f(-3) = 47$, $f(2) = 2$. Das Maximum von f ist folglich 47, das Minimum ist -2.

b) Die Funktion g ist außer in 3 differenzierbar. Wir müssen also die Randpunkte von $[0, 10]$, den Punkt 3 sowie alle Punkte im Innern von $[0, 10] \setminus \{3\}$ untersuchen, an denen die Ableitung von g verschwindet. Auf $[0, 3]$ gilt

$$g(x) = -6x + (3 - x + 2)^2 = -6x + (5 - x)^2 = x^2 - 16x + 25\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 16\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 8 \notin [0, 3]$. Also hat g' in $[0, 3]$ keine Nullstelle. Auf $[3, 10]$ gilt

$$g(x) = -6x + (x - 1)^2 = x^2 - 8x + 1\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 8\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 4 \in (3, 10)$. Wir müssen also die Punkte $0, 3, 4, 10$ untersuchen: $g(0) = 25$, $g(3) = -14$, $g(4) = -15$, $g(10) = 21$. Damit ist -15 das Minimum und 25 das Maximum von g.

Aufgabe 2

a) Für beliebiges $R > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \ln x$, $dt = x^{-1}\,dx$

$$\int_2^R \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln R} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R}\,.$$

Für $R \to \infty$ strebt dies gegen $(\ln 2)^{-1}$; das uneigentliche Integral konvergiert also und hat diesen Wert.

b) Wir zeigen, dass dieses Integral „am linken Rand“ divergent ist: Für jedes $y \in (0, e^{-1}]$ gilt $-\ln y \geqslant 1$. Mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung von $\sinh y$ erkennt man

$$\sinh y - y = \big(y + \tfrac{1}{3!}y^3 + \tfrac{1}{5!}y^5 + \cdots\big) - y = \tfrac{1}{3!}y^3 + \tfrac{1}{5!}y^5 + \cdots = \tfrac{1}{3!}y^3 h(y)$$

mit $h(y) := (1 + \frac{3!}{5!}y^2 + \cdots)$. Für $y \to 0$ gilt $h(y) \to 1$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $h(y) \leqslant 3!$ für alle $y \in (0, \varepsilon]$. Für diese y ergibt sich $0 < \sinh y - y \leqslant y^3$. Zusammen erhält man

$$\frac{-y\ln y}{\sinh y - y} \geqslant \frac{y}{\sinh y - y} \geqslant \frac{y}{y^3} = y^{-2} \geqslant 0 \qquad \text{für alle } y \in (0, \min\{\varepsilon, e^{-1}\}]\,.$$

Mit dem Minorantenkriterium folgt die Divergenz von $\int_0^\varepsilon \frac{-y\ln y}{\sinh y - y}\,dy$, weil das uneigentliche Integral $\int_0^\varepsilon y^{-2}\,dy$ divergent ist. Hiermit divergiert auch $\int_0^\varepsilon \frac{y\ln y}{\sinh y - y}\,dy$.

c) Seien $s < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ fest. Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $R > 0$

$$\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cdot\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx\,.$$

Erneute partielle Integration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t^2\cos(tx)\,dx\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx &= \frac{e^{sx}}{s}\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \frac{e^{sx}}{s^2}\,t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R \\ &= \frac{e^{sR}}{s}\cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2}\,t\sin(tR) - 0 \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s}\,.\end{aligned}$$

(Man beachte $s < 0$.) Also ist das Integral $\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx$ konvergent, und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1+\frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2+t^2}\,.$$

d) Aus der Ungleichung $1 + t \leqslant e^t$ folgt $\ln(1+t) \leqslant t$ für alle $t \geqslant 0$. Also ist

$$|e^{-t}\ln(1+t)| \leqslant te^{-t} \qquad \text{für alle } t \geqslant 0\,.$$

Da das Integral $\int_0^\infty te^{-t}\,dt$ (vgl. Aufgabe 3 mit $n = 1$ und $\lambda = 1$) existiert, konvergiert das zu untersuchende Integral nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 3

Wir zeigen zunächst, dass das uneigentliche Integral $I_0(1)$ konvergiert und dass sein Wert $= 1$ ist:

$$I_0(1) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_{x=0}^R = \lim_{R\to\infty} -e^{-R} + e^{-0} = 1\,.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Partielle Integration mit $f(x) = x^n$ und $g'(x) = e^{-x}$ liefert

$$\begin{aligned}I_n(1) &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R x^n e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\left[x^n(-e^{-x})\right]_{x=0}^R - \int_0^R nx^{n-1}(-e^{-x})\,dx\right) \\ &= \lim_{R\to\infty} -R^n e^{-R} + nI_{n-1}(1) = nI_{n-1}(1)\,. \qquad (*)\end{aligned}$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt per vollständiger Induktion, dass das Integral $I_n(1)$ konvergiert mit Wert $n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$:
IA: $n = 0$. Zuvor haben wir gesehen, dass $I_0(1)$ konvergiert und dass $I_0(1) = 1 = 0!$ gilt.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Das Integral $I_n(1)$ konvergiere und es gelte $I_n(1) = n!$ (IV). Damit ergibt sich

$$I_{n+1}(1) \overset{(*)}{=} (n+1)I_n(1) \overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)n! = (n+1)!\,.$$

Für jedes $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ führt die Substitution $y = \lambda x, dy = \lambda\,dx$ auf

$$I_n(\lambda) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R x^n e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\lambda R}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^n e^{-y}\,\frac{dy}{\lambda} = \lambda^{-(n+1)}\lim_{R\to\infty}\int_0^{\lambda R} y^n e^{-y}\,dy = \lambda^{-(n+1)}I_n(1) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}\,.$$

Aufgabe 4

a) **i)** Da der Integrand an der Stelle 0 nicht definiert ist, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx$ genau dann, wenn die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^{0} \ln|x|\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{0}^{1} \ln|x|\,dx$$

konvergent sind, also genau dann, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{\eta\to 0+} \int_{-1}^{-\eta} \ln|x|\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \ln|x|\,dx$$

existieren.

Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_{\varepsilon}^{1} \ln|x|\,dx = \int_{\varepsilon}^{1} \ln x\,dx = \big[x\ln x - x\big]_{\varepsilon}^{1} = (0-1) - (\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon) = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} -1\,.$$

Damit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x|\,dx$.

Sei nun $\eta \in (0,1)$. Mit der Substitution $y = -x$, $dy = (-1)\,dx$ erkennen wir

$$\int_{-1}^{-\eta} \ln|x|\,dx = \int_{-1}^{-\eta} \ln(-x)\,dx = \int_{1}^{\eta} \ln(y)\,(-1)\,dy = \int_{\eta}^{1} \ln y\,dy \xrightarrow{\eta\to 0+} -1$$

(siehe oben!). Damit ist auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{0} \ln|x|\,dx$ konvergent.

Insgesamt folgt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x|\,dx$ konvergiert und dass gilt:

$$\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx = \lim_{\eta\to 0+} \int_{-1}^{-\eta} \ln|x|\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \ln|x|\,dx = -1 - 1 = -2\,.$$

ii) Erneut ist der Integrand an der Stelle 0 nicht definiert. Deshalb muss man untersuchen, ob die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

konvergent sind, also ob die Grenzwerte

$$\lim_{\eta\to 0+} \int_{-1}^{-\eta} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

existieren.

Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_{\varepsilon}^{1} = -\ln\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} \infty\,.$$

Damit ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergent, so dass auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ divergiert.

b) **i)** Wie in **a) i)** gesehen, sind $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x|\,dx = -1$ und $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \ln|x|\,dx = -1$ konvergent. Daher konvergiert auch deren Summe: $\lim_{\varepsilon\to 0+}\big(\int_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x|\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \ln|x|\,dx\big)$ $= -1 - 1 = -2$.

ii) Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln|x|\big]_{-1}^{-\varepsilon} + \big[\ln|x|\big]_{\varepsilon}^{1} = \ln\varepsilon - 0 + 0 - \ln\varepsilon = 0\,.$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx\right) = 0\,.$$

Man beachte: Dieser Grenzwert existiert, obwohl das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ divergent ist! Man spricht hier vom sog. Cauchychen Hauptwert.

Aufgabe 5

a) Da die Funktion f monoton fallend ist, gilt auf jeden Fall $f \in R[2,\beta]$ für alle $\beta > 2$. Wegen $f > 0$ ist $\beta \mapsto \int_2^\beta f(x)\,dx$ monoton wachsend, so dass die Konvergenz des uneigentlichen Integrals äquivalent zur Existenz einer Konstanten C mit $\int_2^\beta f(x)\,dx \leqslant C$ für alle $\beta > 0$ ist.

Ebenso liefert das Monotoniekriterium für Reihen 7.2 (1), dass die Konvergenz von $\sum_{n=2}^\infty f(n)$ äquivalent zur Existenz eines $K > 0$ mit $\sum_{n=2}^m f(n) \leqslant K$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant 2$ ist.

„$\Longrightarrow$“ Es existiere ein C wie oben angegeben. Weil f monoton fallend ist, gilt

$$\sum_{n=3}^m f(n) = \sum_{n=3}^m \int_{n-1}^n f(n)\,dx \leqslant \sum_{n=3}^m \int_{n-1}^n f(x)\,dx = \int_2^m f(x)\,dx \leqslant C$$

für alle $m \geqslant 3$, d. h. mit $K := f(2) + C$ ergibt sich die Konvergenz der Reihe.

„$\Longleftarrow$“ Setzt man umgekehrt die Existenz von K voraus, so erhält man die Abschätzung

$$\int_2^\beta f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=2}^{[\beta]} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=2}^{[\beta]} \int_n^{n+1} f(n)\,dx = \sum_{n=2}^{[\beta]} f(n) \leqslant K$$

für alle $\beta > 2$, d. h. mit $C := K$ sieht man die Konvergenz des uneigentlichen Integrals ein.

Hierbei bezeichnet $[\beta]$ die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich β ist, d.h. $[\beta] := \max\{k \in \mathbb{N} : \; k \leqslant \beta\}$.

b) Die durch $f(x) := \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ definierte Funktion $f\colon [2,\infty) \to (0,\infty)$ ist monoton fallend und positiv. Nach dem Integralkriterium aus **a)** konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^\infty f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx$$

konvergiert. Die Substitution $y := \ln x$, $dy = \frac{1}{x}\,dx$ liefert

$$\int_2^R \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{y^\alpha}\,dy\,.$$

Im Fall $\alpha \leqslant 1$ divergiert die rechte Seite für $R \to \infty$, im Fall $\alpha > 1$ konvergiert die rechte Seite für $R \to \infty$ (vgl. Beispiel 12.1 (1)). Also konvergiert die Reihe genau für $\alpha > 1$.

Aufgabe 6

a) Die durch $f(x) := \ln(1+x)$ definierte Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f''''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}\,,$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

sind

$$f(0) = 0\,, \qquad f'(0) = 1\,, \qquad f''(0) = -1\,, \qquad f'''(0) = 2\,, \qquad f''''(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_4(f;0)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T_4(f;0)(x) &= \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 + x + \tfrac{1}{2!}\,(-1)x^2 + \tfrac{1}{3!}\,2x^3 + \tfrac{1}{4!}\,(-6)x^4 \\ &= x - \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{1}{4}\,x^4\,. \end{aligned}$$

Sei $x \geqslant 0$. Um die Abschätzung $0 \leqslant \ln(1+x) - T_4(f;0)(x) \leqslant \frac{1}{5}\,x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x gibt mit

$$f(x) = T_4(f;0)(x) + \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4+1)!}\,(x-0)^{4+1}\,,$$

also mit

$$f(x) - T_4(f;0)(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5\,.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leqslant \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 \leqslant \frac{1}{5}\,x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \geqslant 0\,,\\
\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \leqslant \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(1+0)^5}\,x^5 = \frac{1}{5}\,x^5\,.
\end{aligned}$$

b) Für die durch $f(x) := \ln(2+x)$ gegebene Funktion $f\colon (-2,\infty) \to \mathbb{R}$, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}\,.$$

Also haben wir $f(0) = \ln 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1,1]$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}\,x^2 = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\,.$$

Daher gilt wegen $\xi \in [-1,1]$

$$\left| f(x) - \ln 2 - \frac{x}{2} \right| = \left| \frac{x^2}{2(2+\xi)^2} \right| \leqslant \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

Wir können somit $a = \ln 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

c) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}\,, \qquad f''(x) = e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f'''(x) = -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}\,.$$

Daher sind

$$f(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + \tfrac{2}{3}\,, \qquad f'(\tfrac{1}{2}) = -e^{-1/2} - \tfrac{4}{9}\,, \qquad f''(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + 2\cdot\tfrac{8}{27} = e^{-1/2} + \tfrac{16}{27}$$

und das Taylorpolynom $T_2(f;\frac{1}{2})$ lautet

$$\begin{aligned}
T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!}(x-\tfrac{1}{2})^k = f(\tfrac{1}{2}) + f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2\\
&= e^{-1/2} + \tfrac{2}{3} + (-e^{-1/2} - \tfrac{4}{9})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(e^{-1/2} + \tfrac{16}{27})(x-\tfrac{1}{2})^2\,.
\end{aligned}$$

Sei $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein ξ zwischen $\frac{1}{2}$ und x mit

$$f(x) = T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) + \frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!}(x-\tfrac{1}{2})^{2+1}\,,$$

also mit

$$\big|f(x) - T_2(f;\tfrac{1}{2})(x)\big| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}\,|x-\tfrac{1}{2}|^3\,.$$

Wegen $\xi \geqslant 0$ ergibt sich

$$\frac{|f'''(\xi)|}{3!} = \frac{1}{6}\Big(e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4}\Big) = \frac{e^{-\xi}}{6} + \frac{1}{(1+\xi)^4} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{(1+0)^4} = \frac{7}{6}\,;$$

demnach gilt die gewünschte Abschätzung z.B. mit $C = \frac{7}{6}$.

Aufgabe 7

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist die Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

absolut konvergent und damit konvergent, denn es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|} - 1\,.$$

Somit folgt für den Konvergenzradius R dieser Potenzreihe $R \geqslant 1$. Gemäß Satz 13.3 ist f auf $(-1,1)$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ergibt sich

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}\,.$$

Wegen

$$\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

stimmen die Ableitungen von f und $x \mapsto \ln(1+x)$ überein. Daher unterscheiden sich beide Funktionen nur durch eine additive Konstante. Wegen $f(0) = 0 = \ln(1+0)$ ist diese $= 0$ und die behauptete Identität ist bewiesen.

Bemerkung: Die Reihendarstellung von $g(x) := \ln(1+x)$ um 0 lässt sich auch mit Hilfe des Satzes von Taylor herleiten. Man verwendet dazu $g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$.

b) Bezeichnen wir die Funktion, die durch die Reihe definiert wird, mit f (man beachte, dass f wegen $\sum_{n=2}^{\infty} |(-1)^n \frac{x^n}{n^2-n}| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|} - 1 - |x|$ wohldefiniert ist!), so gilt für $|x| < 1$

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^{n-1}}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\,.$$

Diese Reihe stellt laut a)-Teil die Funktion $x \mapsto \ln(1+x)$ dar, d. h. es ist $f'(x) = \ln(1+x)$. Aufgrund von $(y \ln y - y)' = \ln y$ folgt

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - (1+x) + c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Wegen $f(0) = 0$ ergibt sich $c = 1$. Somit erhält man als Endergebnis

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-2}}{n^2-n} = (1+x)\ln(1+x) - x\,.$$

Bemerkung: Man kommt auch ohne Differenzieren aus; wegen der Darstellung

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n} \right) = x \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

lässt sich der Wert direkt mit Hilfe der Logarithmusreihe aus a) ermitteln.

c) Für jedes $x \in (-1,1)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\big((1-x)(1+x)\big) = \ln(1-x) + \ln(1+x) \overset{\text{a)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n + (-1)^{n+1}}{n}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-1 + (-1)^{n+1}}{n}}_{=:a_n}\, x^n \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 13.3 der Vorlesung gesehen, ergibt sich

$$\begin{aligned} f^{(20)}(0) &= 20!\, a_{20} = 20!\, \frac{-1-1}{20} = -2 \cdot 19!\,, \\ f^{(31)}(0) &= 31!\, a_{31} = 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \qquad \text{also} \qquad 1 = (x^2+2x-3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n\,.$$

Nun gilt wegen $x^2+2x-3 = (x+1)^2-4$

$$\begin{aligned}(x^2+2x-3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n \\ &= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2}-4a_n)(x+1)^n\,.\end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen hat diese Potenzreihe den Wert 1 genau dann, wenn die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$-4a_0 = 1, \qquad -4a_1 = 0, \qquad a_{n-2}-4a_n = 0 \quad \text{für alle } n \geqslant 2\,.$$

Es folgt: $a_0 = -\frac{1}{4}$, $a_1 = 0$ und $a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}$ für $n \geqslant 2$. Vollständige Induktion liefert: $a_{2k+1} = 0$ und $a_{2k} = -(\frac{1}{4})^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
Wegen $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = (\frac{1}{4})^{(1+1/k)/2} \xrightarrow{k\to\infty} (\frac{1}{4})^{1/2} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = 0$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,)^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$.

Aufgabe 9 (P)

a) Aus $y' = (x+\frac{2}{x})y$ folgt durch Trennung der Veränderlichen $\frac{y'}{y} = x+\frac{2}{x}$ und wir erhalten durch Integration für $x \neq 0$

$$\ln(|y|) = \int \frac{y'}{y}\,dy = \int x + \frac{2}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 2\ln(|x|) + c = \tfrac{1}{2}x^2 + \ln(x^2) + c \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

Hieraus ergibt sich

$$|y(x)| = e^{x^2/2+\ln(x^2)+c} \qquad \text{für } c \in \mathbb{R},$$

also

$$y(x) = e^c\,x^2\,e^{x^2/2} \qquad \text{oder} \qquad y(x) = -e^c\,x^2\,e^{x^2/2} \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

Da überdies $y = 0$ eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist, folgt

$$y(x) = C\,x^2\,e^{x^2/2} \qquad \text{für } C \in \mathbb{R}.$$

Alternativ kann man hier auch sofort die Formel aus Beispiel E10.4 4) verwenden.

b) Hier handelt es sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung. Die Lösungen y_H der homogenen Gleichung $y_H' = 2xy_H$ sind $y_H(x) = ce^{x^2}$ für $c \in \mathbb{R}$. Die Lösungen y der inhomogenen Gleichung $y' = 2xy + x$ kann man mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel

$$y(x) = ce^{x^2} + e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}t\,dt$$

erhalten. Wegen

$$\int_0^x e^{-t^2}t\,dt = -\tfrac{1}{2}\int_0^x e^{-t^2}(-2t)\,dt = -\tfrac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^x = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + \tfrac{1}{2}$$

ist

$$y(x) = ce^{x^2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{x^2} = Ce^{x^2} - \tfrac{1}{2} \qquad \text{für } C \in \mathbb{R}\,.$$

c) Die homogene Gleichung $y' + y\cos x = 0$ bzw. $y' = -y\cos x$ hat die allgemeine Lösung

$$y_H(x) = e^{\int -\cos x\,dx} = e^{-\sin x + \tilde{c}} = ce^{-\sin x} \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}\,.$$

Eine Lösung y_P der inhomogenen Gleichung $y' + y\cos x = \sin x\,\cos x$ finden wir mit Variation der Konstanten

$$\begin{aligned} y_P(x) \quad &= \quad e^{-\sin x}\int e^{\sin x}\sin x\,\cos x\,dx \overset{\text{Subst. } t=\sin x}{=} e^{-\sin x}\int te^t\,dt\Big|_{t=\sin x} \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} \quad e^{-\sin x}\big(te^t - \int e^t\,dt\big|_{t=\sin x}\big) = e^{-\sin x}\big(te^t - e^t + C\big|_{t=\sin x}\big) \\ &= \quad e^{-\sin x}\big(\sin x\, e^{\sin x} - e^{\sin x} + C\big) = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x} \qquad \text{für } C \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Beispielsweise für $C = 0$ ist $y_P(x) = \sin x - 1$. Die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung $y' + y\cos x = \sin x\,\cos x$ erhalten wir, indem wir zu einer speziellen Lösung des inhomogenen Problems y_P die allgemeine Lösung y_H des homogenen Problems addieren:

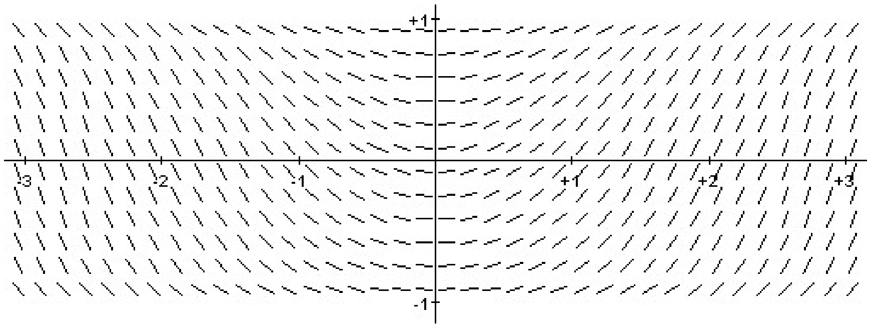
$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = ce^{-\sin x} + \sin x - 1 \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 10 (P)

Gesucht sind alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= x\sqrt{1-y^2}\,, \\ y(0) &= y_0\,, \qquad \text{wobei } y_0 \in [-1,1]\,. \end{aligned} \tag{AWP}$$

Man kann sofort ablesen: Jede Lösung y der Gleichung $y' = x\sqrt{1-y^2}$ ist auf $(0,\infty)$ monoton wachsend (weil dann $y'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in (0,\infty)$ gilt) und auf $(-\infty,0)$ monoton fallend (weil $y'(x) \leqslant 0$ für alle $x \in (-\infty,0)$ gilt).



Richtungsfeld von $y' = x\sqrt{1-y^2}$.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass für den Anfangswert $y(0) = y_0 \in (-1,1)$ gilt. Trennung der Veränderlichen führt auf

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{\sqrt{1-y(t)^2}}\,dt = \int_0^x t\,dt$$

und mittels der Substitution $\eta = y(t)$, $d\eta = y'(t)\,dt$ erhät man unter Berücksichtigung von $y(0) = y_0$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta = \frac{x^2}{2}\,,$$

woraus

$$\arcsin y(x) = \frac{x^2}{2} + \arcsin y_0$$

folgt. Wegen $\arcsin : (-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist der Definitionsbereich von y enthalten in

$$\begin{aligned} I :&= \left\{x \in \mathbb{R} :\ \tfrac{x^2}{2} + \arcsin y_0 \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 \in (-\pi - 2\arcsin y_0, \pi - 2\arcsin y_0)\right\}. \end{aligned}$$

Im Fall $y_0 > -1$ gilt $\arcsin y_0 > -\frac{\pi}{2}$, also ist $-\pi - 2\arcsin y_0 < 0$. Damit ergibt sich

$$I = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 \in [0, \pi - 2\arcsin y_0)\right\} = \left(-\sqrt{\pi - 2\arcsin y_0}, \sqrt{\pi - 2\arcsin y_0}\right).$$

Im Fall $|y_0| < 1$ gilt also für die Lösung y von (AWP)

$$y(x) = \sin\left(\tfrac{x^2}{2} + \arcsin y_0\right) \qquad \text{für } x \in I\,.$$

Offenbar erfüllen sowohl $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, als auch $y(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$, die Differentialgleichung $y' = x\sqrt{1-y^2}$.

Wir fassen zusammen:

Im Fall $y_0 = 1$ (dann ist $I = \emptyset$ wegen $\arcsin(1) = \pi/2$) existiert die eindeutige Lösung von (AWP)

$$y(x) = 1 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\,.$$

Im Fall $y_0 \in (-1,1)$ existiert die eindeutige Lösung von (AWP)

$$y(x) = \begin{cases} \sin\left(\tfrac{x^2}{2} + \arcsin y_0\right) & \text{für } x \in I\,, \\ 1 & \text{für } x \notin I\,. \end{cases}$$

Im Fall $y_0 = -1$ existiert keine eindeutige Lösung von (AWP). Beispielsweise sind

$$y_1(x) = -1 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

oder auch (wegen $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$)

$$y_2(x) = \begin{cases} \sin\left(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{\pi}{2}\right) & \text{für } x \in (-\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi})\,, \\ 1 & \text{für } x \notin (-\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi}) \end{cases}$$

Lösungen von (AWP).

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
27.01.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$?

a) $\left\{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \exists C > 0\, \forall j \in \mathbb{N} : |x_j| \leqslant C\right\}$

b) $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,\middle|\, f(0) = 0\right\}$

c) $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,\middle|\, f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\right\}$

d) $\left\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \,\middle|\, f \text{ ist surjektiv}\right\}$

Aufgabe 2

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V_1, V_2 seien Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

a) $V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum von V.

b) $V_1 \cup V_2$ ist im allgemeinen kein Untervektorraum von V.

c) $V_1 + V_2 := \left\{v_1 + v_2 \,\middle|\, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\right\}$ ist ein Untervektorraum von V.

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

a) Jede Menge M von Vektoren aus V mit $0 \in M$ ist linear abhängig.

b) Ist $M := \{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus M als Linearkombination der anderen Vektoren aus M darstellen.

c) Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_n$, dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

d) Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \ldots, v_n + v$ linear unabhängig.

e) Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2, v_3 linear unabhängig.

Aufgabe 4

In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V seien linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ sowie linear unabhängige Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_m$ gegeben. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_m$ sind linear unabhängig.

b) $\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \operatorname{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m) = \{0\}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Zeigen Sie:

i) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear abhängig.

ii) Es gibt keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Aufgabe 6

a) Im $\mathbb{C}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Vergleichen Sie die Vektorräume:

$$\operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3), \qquad \operatorname{lin}(v_1, v_2), \qquad \operatorname{lin}(v_1, v_3), \qquad \operatorname{lin}(v_2, v_3).$$

b) Seien $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 7 (P)

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme.

a) $y'' - 2y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

b) $y'' - 5y' + 4y = e^{2x}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

Hörsaalverteilung der Übungsklausur am Samstag, den 31.01.2009, von 08:00 bis 10:00:

Fachrichtung	Anfangsbuchstabe Nachname	Hörsaal
ETEC/Geodäsie	A-L	Audimax
ETEC/Geodäsie	M-Z	Fasanengarten-Hörsaal
Physik/Chemie	A-Z	Gerthsen-Hörsaal

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **2, 3 und 4**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2008/09
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Um zu zeigen, dass $A := \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists C > 0\ \forall j \in \mathbb{N}:\ |x_j| \leqslant C\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist, verwenden wir den Satz 14.4:

(i) $A \neq \emptyset$ wegen $(0)_{j\in\mathbb{N}} = (0,0,0,\ldots) \in A$. (Nehme z.B. $C = 1$)

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x_j), (y_j) \in A$. Dann gibt es $C, C' > 0$ mit $|x_j| \leqslant C$ und $|y_j| \leqslant C'$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Daher gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$

1) $|x_j + y_j| \leqslant |x_j| + |y_j| \leqslant C + C'$, d.h. $(x_j) + (y_j) \in A$;

2) $|\alpha x_j| = |\alpha| \cdot |x_j| \leqslant C|\alpha| \leqslant C|\alpha| + 1 =: \tilde{C}$ (damit $\tilde{C} > 0$), also $\alpha(x_j) \in A$.

b) Wie zuvor benutzen wir den Satz 14.4, um zu begründen, dass $B := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f(0) = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$ ist:

(i) $B \neq \emptyset$, weil die Nullabbildung $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$ in B liegt.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in B$. Dann gilt

1) $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, also $f + g \in B$;

2) $(\alpha f)(0) = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot 0 = 0$, also $\alpha f \in B$.

c) $C := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, weil z.B. die Funktionen

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \qquad \text{und} \qquad g : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - x$$

in C liegen, ihre Summe wegen $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, jedoch nicht.

d) $D := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ ist surjektiv}\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, weil z.B. die Nullfunktion $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$ nicht in D liegt.

(Wäre D ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, so müsste mit $g \in D$ auch die Nullfunktion $0 \cdot g = 0$ in D liegen!)

Aufgabe 2

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V_1, V_2 seien Untervektorräume von V.

a) $V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum von V:

(i) $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 \cap V_2$, also $x, y \in V_1$ sowie $x, y \in V_2$. Dann gilt

1) $x+y \in V_1$ [da V_1 UVR von V] und $x+y \in V_2$ [da V_2 UVR von V], also $x+y \in V_1 \cap V_2$.

2) $\alpha x \in V_1$ [da V_1 UVR von V] und $\alpha y \in V_2$ [da V_2 UVR von V], also $\alpha x \in V_1 \cap V_2$.

Nun verwende man Satz 14.4.

b) Gegenbeispiel: Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ betrachten wir die durch die Einheitsvektoren $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorräume

$$V_1 := \mathrm{lin}(\{e_1\}) = \{\alpha e_1 : \ \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \text{sowie} \qquad V_2 := \mathrm{lin}(\{e_2\}) = \{\beta e_2 : \ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist $V_1 \cup V_2$ nicht abgeschlossen bezüglich der Addition: In $V_1 \cup V_2$ liegen e_1 und e_2, nicht aber der Vektor $e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ ist ein Untervektorraum von V:

(i) $V_1 + V_2 \neq \emptyset$, denn $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 = \underbrace{0}_{\in V_1} + \underbrace{0}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 + V_2$. Dann gibt es $x_1, y_1 \in V_1$ sowie $x_2, y_2 \in V_2$ mit $x = x_1 + x_2$ bzw. mit $y = y_1 + y_2$. Es folgt

$$\alpha x + y = \alpha(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = \underbrace{(\alpha x_1 + y_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\alpha x_2 + y_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2\,.$$

Also gilt $\alpha x + y \in V_1 + V_2$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 + V_2$. Insbesondere sind dann $x + y \in V_1 + V_2$ [mit $\alpha = 1$] sowie $\alpha x \in V_1 + V_2$ [mit $y = 0$].

Nun benutze man Satz 14.4.

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$.

a) Ist $M \subset V$ mit $0 \in M$, so gilt $\mathrm{lin}(M) = \mathrm{lin}(M \setminus \{0\})$. Daher ist M linear abhängig.

b) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise ist $M = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2 = V$ linear abhängig, jedoch kann $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht als Linearkombination des Nullvektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dargestellt werden, d.h. es existiert kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. [Weiteres Gegenbeispiel siehe Aufgabe 5 a)]

c) Existiert ein Vektor $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (d.h. es gibt eindeutige $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$), so wird auch der Nullvektor $0 = v - v$ eindeutig dargestellt. Folglich lässt sich der Nullvektor nur als tiviale Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ darstellen. Also sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

d) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ sind die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Wählt man $v := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, so sind die Vektoren $v_1 + v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 + v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig, denn es gilt $0 \cdot (v_1 + v) + 1 \cdot (v_2 + v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $V = \mathbb{C}^2$. Dort sind $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Außerdem sind v_1 und $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Die Vektoren v_2 und v_3 sind jedoch nicht linear unabhängig, denn es gilt $v_2 - v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V seien linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ und linear unabhängige Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_m$ gegeben sowie die beiden Aussagen

$$A = \text{“}v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_m \text{ sind linear unabhängig”}$$
$$B = \text{“}\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \operatorname{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m) = \{0\}\text{”}$$

Behauptung: $A \iff B$.

Wir zeigen $A \implies B$ durch Kontraposition, d.h. wir verifizieren $\neg B \implies \neg A$:
Sei also $\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \operatorname{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m) \neq \{0\}$, etwa $0 \neq v \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \operatorname{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m)$.
Wir müssen zeigen, dass dann $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig sind.
Wegen $v \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \operatorname{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m)$ gilt $v \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_k)$ und $v \in \operatorname{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m)$. Daher existieren Skalare $\alpha_j \in \mathbb{K}$ (nicht alle $= 0$, da $v \neq 0$) mit $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j$ sowie $\beta_j \in \mathbb{K}$ (nicht alle $= 0$, da $v \neq 0$) mit $v = \beta_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \beta_m v_m = \sum_{j=k+1}^m \beta_j v_j$. Es folgt

$$0 = v - v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j - \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j + \sum_{j=k+1}^{m} (-\beta_j) v_j \,.$$

Also ist eine nichttriviale Linearkombination der $v_1, \ldots, v_m$ gefunden, die den Nullvektor darstellt. Somit sind $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig.

Nun zu $B \implies A$. Wir zeigen $\neg A \implies \neg B$:
Seien also $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors, d.h. es existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_m \in \mathbb{K}$ (nicht alle $= 0$) mit

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j + \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j \,, \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j = - \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j \,. \tag{$*$}$$

Ist ein α_j ungleich 0, so gilt $\sum_{j=1}^k \alpha_j v_j \neq 0$ [da $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind] und wegen $(*)$ auch $\sum_{j=k+1}^m \beta_j v_j \neq 0$.
Ist ein β_j ungleich 0, so gilt $\sum_{j=k+1}^m \beta_j v_j \neq 0$ [da $v_{k+1}, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind] und wegen $(*)$ auch $\sum_{j=1}^k \alpha_j v_j \neq 0$.
Zusammen folgt $\sum_{j=1}^k \alpha_j v_j \neq 0$ und $\sum_{j=k+1}^m \beta_j v_j \neq 0$. Ist $v := \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j$ gesetzt, so gilt $0 \neq v \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_k)$ und

$$v \overset{(*)}{=} \sum_{j=k+1}^{m} (-\beta_j) v_j \in \operatorname{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m) \,.$$

Also ist $\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \operatorname{lin}(v_{k+1}, \ldots, v_m) \neq \{0\}$.

Aufgabe 5

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

i) Offenbar ist $v_1 = -2v_3$. Daher gilt $v_1 + 0v_2 + 2v_3 = 0$, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

Im allgemeinen erkennt man nicht sofort, ob gegebene Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Um die Vektoren v_1, v_2, v_3 auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, können wir v_1, v_2, v_3 als Zeilen in eine Matrix schreiben und diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[vertausche erste und zweite Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[multipliziere die dritte Zeile mit 2]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Summe der zweiten und dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Zeilen der letzten Matrix linear abhängig sind, sind es v_1, v_2, v_3 auch.

ii) Wäre $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$ für $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so müsste für die erste Komponente gelten: $3 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$. Dies ist nicht möglich. Deshalb gibt es keine $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$, also mit

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} \alpha_1 & & +\ \alpha_3 a & = & 0 \\ & \alpha_2 & +\ \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & -\ \alpha_2 & +\ \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & -a\alpha_3 \\ \alpha_2 & = & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & = & -2\alpha_3 \end{array} \right.$$

Nur für $a = 2$ gibt es eine Lösung, die sich von $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ unterscheidet (z.B. $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$, dann gilt $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$).

Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 nur für $a = 2$ linear abhängig.

Aufgabe 6

a) Im $\mathbb{C}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Wir halten zunächst folgendes fest: Ist V ein beliebiger Vektorraum und gilt $U_1 \subset U_2 \subset V$, so folgt $\mathrm{lin}(U_1) \subset \mathrm{lin}(U_2) \subset V$. Außerdem haben wir $\mathrm{lin}(\mathrm{lin}(U)) = \mathrm{lin}(U)$ für jede Teilmenge $U \subset V$. [Beides folgt unmittelbar aus der Definition des linearen Aufspanns.]

Also ist klar, dass die drei Vektorräume $\mathrm{lin}(v_1, v_2)$, $\mathrm{lin}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{lin}(v_2, v_3)$ Teilmengen von $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3)$ sind. Um zu sehen, ob $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3)$ tatsächlich größer ist als die anderen Mengen, untersuchen wir nun, ob die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind, d. h. wir fragen uns, ob es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| > 0$ und $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ gibt. Für solche Zahlen muss wegen der zweiten Komponente der Vektoren $\lambda_3 = -\lambda_1$ gelten. Offenbar ist $v_1 - v_3 = -2v_2$. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind also in der Tat linear abhängig; es gilt $v_1 + 2v_2 - v_3 = 0$. Folglich haben wir

$$\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{lin}(v_1, v_2, v_1 + 2v_2) \subset \mathrm{lin}(\mathrm{lin}(v_1, v_2)) = \mathrm{lin}(v_1, v_2)\,.$$

Völlig analog ergibt sich, dass $\mathrm{lin}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{lin}(v_2, v_3)$ Obermengen von $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3)$ sind. Alle vier zu betrachtenden Vektorräume sind somit identisch.

b) Eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist durch die drei Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Um $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$ zu zeigen, reicht es zu begründen, dass wir jeden dieser Basisvektoren durch b_1, b_2, b_3 darstellen können: $e_1 = b_3 - b_2$, $e_3 = b_3 - b_1$, $e_2 = b_1 - e_1 = b_1 - (b_3 - b_2) = b_1 - b_3 + b_2$.

Um $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$ nachzuweisen, können wir auch zeigen, dass die drei Vektoren b_1, b_2, b_3 des $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ folgt dann $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$.
Wir schreiben b_1, b_2, b_3 als Zeilen in eine Matrix und bringen diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Differenz der ersten von der dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit gilt (mit den Bezeichnungen von 14.7) $n = r = 3$ und die Vektoren b_1, b_2, b_3 sind linear unabhängig.

Aufgabe 7 (P)

a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass man die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung sofort in der Hand hat, wenn man die Nullstellen des zugehörigen Polynoms $\lambda^2 - 2\lambda + 3$ kennt; dies sind $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}\, i$. Folglich hat die vorliegende Gleichung die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 e^x \sin(\sqrt{2}\, x) + C_2 e^x \cos(\sqrt{2}\, x) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Dann ist $y(0) = C_2$ und wegen

$$y'(x) = C_1 e^x \sin(\sqrt{2}\, x) + C_1 e^x \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}\, x) + C_2 e^x \cos(\sqrt{2}\, x) - C_2 e^x \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\, x)$$

gilt $y'(0) = \sqrt{2}\, C_1 + C_2$. Die Bedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2$ implizieren daher $C_2 = 1$ und $C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die (eindeutige) Lösung lautet mithin

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, e^x \sin(\sqrt{2}\, x) + e^x \cos(\sqrt{2}\, x)\,.$$

b) Das Polynom $\lambda^2 - 5\lambda + 4$ hat die Nullstellen 1 und 4. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y'' - 5y' + 4y = 0$ lautet folglich

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y'' - 5y' + 4y = e^{2x}$ machen wir den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = Ce^{2x}$. Dann ist $y_{\mathrm{p}}'(x) = 2Ce^{2x}$ und $y_{\mathrm{p}}''(x) = 4Ce^{2x}$, also

$$y_{\mathrm{p}}'' - 5y_{\mathrm{p}}' + 4y_{\mathrm{p}} = 4Ce^{2x} - 10Ce^{2x} + 4Ce^{2x} = -2Ce^{2x}\,.$$

Damit dies $= e^{2x}$ wird, muss $C = -\frac{1}{2}$ gewählt werden. Es folgt $y_{\mathrm{p}}(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$, und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{4x} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Aus $y(0) = 1$ folgt $-\frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 1$ und aus $y'(0) = -1$ folgt $-1 + C_1 + 4C_2 = -1$. Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, folgt $-3C_2 = \frac{3}{2}$, also $C_2 = -\frac{1}{2}$ und damit $C_1 = 2$. Die (eindeutige) Lösung lautet daher

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - \tfrac{1}{2}e^{4x}\,.$$

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
03.02.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

14. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie (gegebenenfalls in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern) die Zeilennormalform und den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Lösungen $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ der folgenden linearen Gleichungssysteme.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ -2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 & = & -3 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 & = & -1 \end{array}$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob das Gleichungssystem lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Aufgabe 4

Im komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^4$ seien der Vektor $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5i - 1 \\ 1 - i \\ c^2 \end{pmatrix}$ und der Untervektorraum

$$U = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 - i \\ 1 + i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ -c - i \\ c^2 + 2ci \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i - 1 + c \\ -c - i \\ 2i \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{C}$, für die $y \in U$ gilt.

Aufgabe 5

In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V seien die linear unabhängigen Vektoren a_1, a_2, a_3 gegeben. Die Vektoren b_1, b_2, b_3 werden definiert durch $b_1 := (\alpha - 1)a_2 + 2a_3,\ b_2 := 2a_1 + (2\alpha - 3)a_2 + 4a_3,\ b_3 := a_1 + (\alpha - 1)a_2 + a_3$.

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren b_1, b_2, b_3 linear unabhängig?

b) Nun sei $\alpha = 0$. Für welche β lässt sich der Vektor $x := a_1 + \beta a_2 + 2a_3$ mittels der Vektoren b_1, b_2 und b_3 darstellen? Geben Sie diese Darstellung an.

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^3,\ f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}7y\\ix+y\\3x-4iy\end{pmatrix}$ **b)** $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2,\ f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}7y+2\\ix+y\end{pmatrix}$

c) $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C},\ f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})=(x-i)(y+4)$ **d)** $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C},\ f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})=(x-2i)(y+3)-(x+1)(y-6i)$

Aufgabe 7

a) Gegeben sei die Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x_1,x_2)\mapsto(x_1+x_2,x_1+x_2)$.
Ist ϕ linear? Bestimmen Sie Kern ϕ und Bild ϕ.

b) Sei $A=\begin{pmatrix}-3&0&2\\1&1&0\\-2&1&2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$. Berechnen Sie eine Basis von Kern A und von Bild A.

Aufgabe 8

Es sei $n\in\mathbb{N}$ und $\phi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (x_1,x_2,\dots,x_n)\mapsto\sum_{k=1}^n kx_k$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von Kern ϕ und eine Basis von Bild ϕ.

c) Für welche n ist ϕ injektiv?

Aufgabe 9 (P)

Für $f\in C([0,1])$ definiere $\|f\|_1:=\displaystyle\int_0^1|f(t)|\,dt$.

a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $C([0,1])$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\big(C([0,1]),\|\cdot\|_1\big)$ nicht vollständig ist.

Hinweis: Betrachten Sie $f_n(t):=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\in[0,1/2)\\ n(t-1/2), & t\in[1/2,1/2+1/n)\\ 1, & t\in[1/2+1/n,1]\end{cases}$ für $t\in[0,1]$ und $n\in\mathbb{N}$.

Aufgabe 10 (P)

Sei $(H,(\cdot|\cdot))$ ein Prä-Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H und $x\in H$. Zeigen Sie:

$$\|x_n-x\|\xrightarrow{n\to\infty}0\qquad\Longleftrightarrow\qquad\|x_n\|\xrightarrow{n\to\infty}\|x\|\ \text{ und }\ (x_n|y)\xrightarrow{n\to\infty}(x|y)\text{ für jedes }y\in H$$

Klausur zur HM I: Montag, 16.03.2009, 08:00 - 10:00 Uhr

!!! Anmeldeschluss ist Freitag, der 13.02.2009 !!!

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 5, 7, 8 und 9**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.
Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2008/09
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1

Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2} Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{2} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 6Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to -\frac{1}{3} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + \frac{7}{2} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In der Zeilennormalform von A gibt es drei nichtverschwindende Zeilen, also hat A Rang 3.
Nun zur Matrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_3 \to \frac{1}{2} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(j=2,3,4)]{Z_j \to Z_j - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2} Z_2]{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{2} Z_3]{Z_4 \to Z_4 + Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} =: \widetilde{B}$$

Fall 1: $\alpha = 10$ und $\beta = 4$. In diesem Fall steht die Zeilennormalform von B bereits da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da hier genau 3 nichtverschwindende Zeilen existieren, hat B in diesem Fall Rang 3.
Fall 2: $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$. Dann erhalten wir

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\beta - 4)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und lesen ab: In diesem Fall hat B Rang 4.
Fall 3: $\alpha \neq 10$. Dann setzen wir $\delta := (\beta - 4)/(\alpha - 10)$ und erhalten

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\alpha-10)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 4Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 6Z_4,\ Z_2 \to Z_2 + Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3-6\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1+4\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta \end{pmatrix}$$

Die Matrix B besitzt somit auch in diesem Fall Rang 4.

Aufgabe 2

a) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

liegt bereits in Zeilennormalform vor:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(Stellen wir uns hier das Endergebnis beim Lösungsalgorithmus vor, so wären hier womöglich noch Nullzeilen, die aber einfach ignoriert werden dürfen). Diese Treppe verläuft nicht regelmäßig. Nun verwenden wir den (-1)-Ergänzungstrick. In jeder Spalte der Koeffizientenmatrix sollte eine neue Stufe anfangen! Dies erzwingen wir, indem wir zwei Zeilen der Form $0 \ldots 0\ -1\ 0 \ldots 0$ einfügen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Jetzt können wir die Lösung ablesen: die beiden *Spalten* mit den neu hinzugekommenen Stufen (an den -1-en erkennbar) sind eine Basis des homogenen Lösungsraums, und die letzte *Spalte* ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung! Gemäß Folgerung (1) in 14.11 ergibt sich für die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Das Einfügen jener -1-Zeilen ist nichts anderes als das Setzen von freien Parametern. Betrachten wir das ursprüngliche Gleichungssystem mit Variablen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

setzen zwei Parameter (aber mit Minuszeichen!)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

lassen in jeder Zeile nur eine Variable stehen

$$\begin{aligned} x_1 &= 3+\lambda+2\mu \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 &= 1+4\mu \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

und schreiben vektoriell

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 = & 2 \\ -2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 = & -3 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 = & -1 \end{array}$$

zu lösen, bestimmen wir die Zeilennormalform der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 + 2Z_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_2]{\substack{Z_2 \to -Z_2 \\ Z_3 \to -\frac{1}{3}Z_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und verwenden den (-1)-Ergänzungstrick, d.h. wir lassen Nullzeilen in der Zeilennormalform weg und ergänzen Zeilen mit -1 und sonst Nullen, so dass auf der Diagonalen nur ± 1 steht:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nun können wir die allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ des Gleichungssystems ablesen:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3

Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|y)$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \alpha Z_2]{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha^2 & 2-\alpha \end{array}\right) =: (*)$$

1. Fall: $\beta \neq \alpha^2$. Dann setzen wir zur Abkürzung $\gamma := (2-\alpha)/(\beta-\alpha^2)$ und erhalten

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (\beta-\alpha^2)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - \alpha Z_3]{Z_1 \to Z_1 - (2+\alpha) Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-(2+\alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1-\alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

Man sieht: In diesem Fall ist das Gleichungssystem $Ax = y$ eindeutig lösbar; die Lösung $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ ist gegeben durch $x_1 = 2 - (2+\alpha)\gamma$, $x_2 = 1 - \alpha\gamma$ und $x_3 = \gamma$.

2. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha \neq 2$. Dann ergibt sich

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (2-\alpha)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Der Rang der erweiterten Matrix ist größer als der von A. Folglich besitzt das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ in diesem Fall keine Lösung.

3. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha = 2$. Dann steht die Zeilennormalform bereits da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Der Rang der erweiterten Matrix und der Rang von A stimmen überein, das Gleichungssystem ist also lösbar. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $Ax = y$ ist

$$x_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ erhält man, indem man $x_3 = \lambda$ setzt [oder den (-1)-Ergänzungstrick verwendet]:

$$x_h = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = y$ ist folglich

$$x = x_p + x_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Aufgabe 4

Definiere

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\\ 2\end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix}0\\ -1-i\\ 1+i\\ 0\end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix}0\\ -i\\ -c-i\\ c^2+2ci\end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix}i\\ i-1+c\\ -c-i\\ 2i\end{pmatrix}.$$

Gesucht sind alle $c \in \mathbb{C}$, für welche das lineare Gleichungssystem $\sum_{j=1}^{4} x_j v_j = y$ eine Lösung $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ hat. Wir wenden Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1\\ i & -1-i & -i & i-1+c & 5i-1\\ 0 & 1+i & -c-i & -c-i & 1-i\\ 2 & 0 & c^2+2ci & 2i & c^2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - iZ_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1\\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1\\ 0 & 1+i & -c-i & -c-i & 1-i\\ 0 & 0 & c^2+2ci & 0 & c^2-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1\\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1\\ 0 & 0 & -c-2i & 0 & 3i\\ 0 & 0 & c^2+2ci & 0 & c^2-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + cZ_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & i & 1\\ 0 & -1-i & -i & i+c & 4i-1\\ 0 & 0 & -c-2i & 0 & 3i\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2+3ci-2 \end{array}\right)$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist unlösbar für $0 \neq c^2 + 3ci - 2 = (c+i)(c+2i)$, also für $c \in \mathbb{C} \setminus \{-2i, -i\}$. Wegen der dritten Zeile ist die Lösungsmenge auch für $c = -2i$ leer. Nur im Fall $c = -i$ ist das lineare Gleichungssystem lösbar. Fazit: Genau für $c = -i$ gilt $y \in U$.

Aufgabe 5

a) Wir untersuchen, für welche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ man $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$ erhält. Es gilt

$$\begin{aligned} &\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3\\ &\quad = \lambda_1\big((\alpha-1)a_2 + 2a_3\big) + \lambda_2\big(2a_1 + (2\alpha-3)a_2 + 4a_3\big) + \lambda_3\big(a_1 + (\alpha-1)a_2 + a_3\big)\\ &\quad = \big(2\lambda_2 + \lambda_3\big)a_1 + \big((\alpha-1)\lambda_1 + (2\alpha-3)\lambda_2 + (\alpha-1)\lambda_3\big)a_2 + \big(2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3\big)a_3\,. \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von a_1, a_2, a_3 wird dies genau dann $= 0$, wenn die Koeffizienten der a_1, a_2, a_3 verschwinden. Folglich gilt $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$ genau dann, wenn λ_1, λ_2 und λ_3 das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0\\ (\alpha-1)\lambda_1 + (2\alpha-3)\lambda_2 + (\alpha-1)\lambda_3 &= 0\\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Die Matrix dieses homogenen linearen Gleichungssystems formen wir um:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1\\ \alpha-1 & 2\alpha-3 & \alpha-1\\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Zeilen tauschen}]{Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2}\\ 0 & 2 & 1\\ \alpha-1 & 2\alpha-3 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - Z_2,\ Z_2 \to \frac{1}{2}Z_2]{Z_3 \to Z_3 - (\alpha-1)Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & -1 & \frac{1}{2}(\alpha-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}$$

Man sieht: Die Matrix hat Rang 3 genau dann, wenn $\alpha \neq 0$ ist. Obiges Gleichungssystem besitzt also genau im Fall $\alpha \neq 0$ nur die triviale Lösung. Folglich sind die Vektoren b_1, b_2, b_3 genau dann linear unabhängig, wenn $\alpha \neq 0$ ist.

b) Sei $x := a_1 + \beta a_2 + 2a_3$. Wir suchen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = x$. Wegen

$$\begin{aligned}\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 &= \lambda_1(-a_2 + 2a_3) + \lambda_2(2a_1 - 3a_2 + 4a_3) + \lambda_3(a_1 - a_2 + a_3)\\ &= (2\lambda_2 + \lambda_3)a_1 + (-\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3)a_2 + (2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3)a_3\end{aligned}$$

und der linearen Unabhängigkeit von a_1, a_2, a_3 läuft dies darauf hinaus, eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Wir formen die erweiterte Matrix dieses Gleichungssystems um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & \beta \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_2]{Z_3 \to Z_3 + 2Z_2,\ Z_2 \to -Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -\beta \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2+2\beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to \frac{1}{2}Z_2]{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -\beta \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3+2\beta \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - 3Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\beta - \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3+2\beta \end{array}\right)$$

Das System ist nur für $\beta = -\frac{3}{2}$ lösbar. Die Zeilennormalform lautet dann

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem hat also keine eindeutige Lösung; die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (\eta \in \mathbb{R} \text{ und } \mu = -\tfrac{1}{2}\eta)\,.$$

Fazit: Die Darstellung des Vektors x gelingt genau dann, wenn $\beta = -\frac{3}{2}$ ist. Es gilt dann

$$x = \mu b_1 + (\tfrac{1}{2} - \mu)b_2 + 2\mu b_3 \qquad (\mu \in \mathbb{R})\,.$$

Aufgabe 6

a) Diese Abbildung ist linear, denn für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 7(\lambda x_2 + y_2) \\ i(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) \\ 3(\lambda x_1 + y_1) - 4i(\lambda x_2 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 7x_2 \\ ix_1 + x_2 \\ 3x_1 - 4ix_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7y_2 \\ iy_1 + y_2 \\ 3y_1 - 4iy_2 \end{pmatrix} = \lambda f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix})\,. \end{aligned}$$

b) Die Abbildung ist nicht linear, denn es gilt $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Für eine lineare Abbildung ϕ muss jedoch stets $\phi(\vec{0}) = \phi(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot \phi(\vec{0}) = \vec{0}$ gelten.

c) Auch dieses f ist nicht linear, da wieder $f(\vec{0}) \neq 0$ gilt. Man beachte aber: Auch

$$g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) := xy$$

wäre nicht linear (trotz $g(\vec{0}) = 0$), denn es gilt $g(e_1 + e_2) = 1 \neq 0 + 0 = g(e_1) + g(e_2)$.

d) Entgegen dem ersten Anschein ist f linear. Dies folgt aus Beispiel (1) in 14.15, denn

$$\begin{aligned} f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= (x-2i)(y+3)-(x+1)(y-6i) = xy+3x-2iy-6i-(xy-6ix+y-6i) \\ &= (3+6i)x-(1+2i)y = \underbrace{\begin{pmatrix} 2+6i & -1-2i \end{pmatrix}}_{=:A\in\mathbb{C}^{1\times 2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Aufgabe 7

a) Wegen $\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist ϕ nach Beispiel (1) in 14.15 linear. Es gilt

$$\text{Kern }\phi = \{x\in\mathbb{R}^2 \,:\, \phi(x)=0\} = \{x\in\mathbb{R}^2 \,:\, Ax=0\} = \text{Kern } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Letzteres liest man unter Verwendung des (-1)-Ergänzungstricks der Zeilennormalform $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ von A ab. Gemäß Definition ist

$$\text{Bild }\phi = \{\phi(x) \,:\, x\in\mathbb{R}^2\} = \{Ax \,:\, x\in\mathbb{R}^2\} = \text{Bild } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\},$$

weil Bild A der lineare Aufspann der Spalten von A ist.

b) Zunächst bringen wir A mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1\to -\frac{1}{3}Z_1]{\substack{Z_2\to Z_2+\frac{1}{3}Z_1 \\ Z_3\to -\frac{1}{2}Z_3+\frac{1}{3}Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3\to Z_3+\frac{1}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab:

$$\text{Kern } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

Folglich ist $\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von Kern A und es gilt dim Kern $A = 1$. Die Dimensionsformel liefert dim Bild $A = 3 - \text{dim Kern } A = 3-1 = 2$. Da die beiden Vektoren $Ae_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in$ Bild A linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Bild A, also

$$\text{Bild } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Aufgabe 8

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n kx_k$ eine Abbildung.

a) Aufgrund von

$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

ist $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nach Beispiel (1) in 14.15 linear.

Alternativ kann man die Linearität von ϕ auch wie folgt begründen:

Für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\phi(\alpha x + y) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + y_n \end{pmatrix}) = \sum_{k=1}^n k(\alpha x_k + y_k) = \alpha \sum_{k=1}^n kx_k + \sum_{k=1}^n ky_k = \alpha\phi(x) + \phi(y)\,.$$

b) Wegen $\phi(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = 1 \cdot a = a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt Bild $\phi = \mathbb{R}$, also ist $\{1\}$ eine Basis von Bild $A =$ Bild ϕ. Insbesondere ist dim Bild $A = 1$.

Nun überlegen wir uns, wie viele Basisvektoren Kern $\phi =$ Kern A aufspannen. Die Dimensionsformel liefert $n = \dim \text{Bild } A + \dim \text{Kern } A$, folglich ist dim Kern $A = n - 1$.

Zur Bestimmung von Kern $A =$ Kern ϕ verwenden wir den (-1)-Ergänzungstrick:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Jeder der $n-1$ Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ist in Kern ϕ enthalten. Da die angegebenen $n-1$ Vektoren linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Kern ϕ:

$$\text{Kern } \phi = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}\}\,.$$

c) Wegen ϕ injektiv $\iff$ Kern $\phi = \{0\}$ $\iff$ dim Kern $\phi = 0$ ist ϕ genau für $n = 1$ injektiv.

Aufgabe 9 (P)

Für eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiere $\|f\|_1 := \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$.

a) Um zu zeigen, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $C([0,1])$ ist, müssen wir (N1), (N2), (N3) aus Definition E11.3 überprüfen:

(N1) Zu zeigen: Gilt $\int_0^1 |f(t)|\,dt = 0$ für eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, so ist $f(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$. Dies haben wir bereits in Aufgabe 8 a) vom 9. Übungsblatt gesehen.

(N2) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jede stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\|\alpha f\|_1 = \int_0^1 |\alpha f(t)|\,dt = \int_0^1 |\alpha| \cdot |f(t)|\,dt = |\alpha| \int_0^1 |f(t)|\,dt = |\alpha| \|f\|_1 .$$

(N3) Für beliebige stetige Funktionen $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \|f+g\|_1 &= \int_0^1 |(f+g)(t)|\,dt = \int_0^1 |f(t)+g(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 |f(t)| + |g(t)|\,dt \\ &= \int_0^1 |f(t)|\,dt + \int_0^1 |g(t)|\,dt = \|f\|_1 + \|g\|_1 . \end{aligned}$$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \in [0, 1/2) \\ n(t-1/2), & t \in [1/2, 1/2+1/n) \\ 1, & t \in [1/2+1/n, 1] \end{cases}$, $t \in [0,1]$.

Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_1 &= \int_0^1 |(f_n + f_m)(t)|\,dt = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,dt \\ &= \int_0^{1/2} \underbrace{|f_n(t) - f_m(t)|}_{=0-0=0}\,dt + \int_{1/2}^{1/2+1/m} \underbrace{|f_n(t) - f_m(t)|}_{\leqslant |f_n(t)|+|f_m(t)| \leqslant 1+1=2}\,dt + \int_{1/2+1/m}^1 \underbrace{|f_n(t) - f_m(t)|}_{1-1=0}\,dt \\ &\leqslant 2\big(1/2 + 1/m - 1/2\big) = 2/m . \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $2/\varepsilon < m_0$ und für alle $n > m \geqslant m_0$ ergibt sich $\|f_n - f_m\|_1 \leqslant 2/m \leqslant 2/m_0 < \varepsilon$. Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchyfolge.

Annahme: Es existiert $f \in C([0,1])$ mit $\|f_n - f\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 &= \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt \\ &= \int_0^{1/2} |f(t)|\,dt + \int_{1/2}^{1/2+1/n} |f_n(t) - f(t)|\,dt + \int_{1/2+1/n}^1 |1 - f(t)|\,dt . \end{aligned}$$

Wegen $\|f_n - f\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$ und $1/2 + 1/n \to 1/2$ $(n \to \infty)$ folgt

$$\int_0^{1/2} |f(t)|\,dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_{1/2}^1 |1 - f(t)|\,dt = 0 .$$

Gemäß Aufgabe 8 a) vom 9. Übungsblatt muss die stetige Funktion f

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1/2 \\ 1, & 1/2 < t < 1 \end{cases}$$

erfüllen. Dies widerspricht der Annahme, dass f stetig ist.

Fazit: Es gibt eine $\|\cdot\|_1$-Cauchyfolge in $C([0,1])$, die keinen Grenzwert in $C([0,1])$ hat, d.h. $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ ist nicht vollständig.

Aufgabe 10 (P)

Vorbemerkung: Jede Norm $\|\cdot\|$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V erfüllt die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\big|\|u\| - \|v\|\big| \leqslant \|u - v\| \qquad \text{für alle } u, v \in V\,.$$

Beweis (wortwörtlich wie beim Betrag in 4.3 (6)): Seien $u, v \in V$. Dann gilt

$$\|u\| = \|(u-v) + v\| \leqslant \|u - v\| + \|v\| \quad \iff \quad \|u\| - \|v\| \leqslant \|u - v\|$$

und analog

$$\|v\| = \|(v-u) + u\| \leqslant \|v - u\| + \|u\| = \|u - v\| + \|u\| \quad \iff \quad \|v\| - \|u\| \leqslant \|u - v\|\,.$$

Zusammen ergibt sich die behauptete Ungleichung.

Sei $(H, (\cdot|\cdot))$ ein Prä-Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H und $x \in H$. Behauptung:

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \iff \qquad \|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|x\| \;\text{ und }\; (x_n|y) \xrightarrow{n\to\infty} (x|y) \text{ für jedes } y \in H$$

Beweis:
"$\Rightarrow$": Es gelte $\|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Die umgekehrte Dreiecksungleichung liefert

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leqslant \|x_n - x\| \to 0\,, \qquad \text{also} \quad \|x_n\| \to \|x\| \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

Für jedes $y \in H$ gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\big|(x_n|y) - (x|y)\big| = \big|(x_n - x|y)\big| \leqslant \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} \cdot \|y\| \to 0\,, \qquad \text{also} \quad (x_n|y) \to (x|y) \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

"$\Leftarrow$": Nun gelte $\|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|x\|$ und $(x_n|y) \xrightarrow{n\to\infty} (x|y)$ für alle $y \in H$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\|^2 &= (x_n - x|x_n - x) = (x_n|x_n - x) - (x|x_n - x) = (x_n|x_n) - (x_n|x) - (x|x_n) + (x|x) \\
&= \|x_n\|^2 - \big((x_n|x) + \overline{(x_n|x)}\big) + \|x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x_n|x) + \|x\|^2 \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\underbrace{(x|x)}_{=\|x\|^2\in\mathbb{R}} + \|x\|^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09
10.02.2009

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

15. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|a\|_2 = 1$, also $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Für $x \in \mathbb{R}^3$ definiere $P_a(x) := (x|a)\, a$.

- **i)** Begründen Sie, dass die Abbildung $P_a \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear ist.
- **ii)** Geben Sie die Darstellungsmatrix von P_a bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ an.

b) Die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\phi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3\,, \qquad \phi(e_2 + e_3) = e_1\,, \qquad \phi(e_1 + e_2 + e_3) = e_2 - e_3\,.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$A+B, \quad A+C, \quad 3C, \quad AB, \quad BA, \quad CB, \quad (A+B)C, \quad A^*C, \quad C^TB.$$

Aufgabe 3

a) Finden Sie $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} e & f & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Berechnen Sie alle Matrizen $L \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, welche $LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $AR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erfüllen.

c) Bestimmen Sie eine Matrix $X \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, die der folgenden Gleichung genügt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3-i & 1 \\ 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = X + I_3\,.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ soll durch Zeilenoperationen umgeformt werden. Bestimmen Sie für jede mögliche Zeilenumformung eine Matrix B so, dass BA die Matrix ist, welche sich nach Ausführen der Zeilenumformung ergibt.

Aufgabe 5

Im $\mathbb{R}^{4\times 4}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 3}$ sind die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass A und B regulär sind. Ist C regulär? Bestimmen Sie $A^{-1}, B^{-1}, (AB)^{-1}$, $(A^T)^{-1}$ sowie $((AB)^T)^{-1}$.

b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $(AB)x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6

Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die folgenden Vektoren aus $\mathbb{C}^3$ an:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es eine bijektive, lineare Abbildung $\Phi\colon V \to \mathbb{C}^n$ gibt.

Aufgabe 8 (P)

Sei $(H, (\cdot|\cdot))$ ein Prä-Hilbertraum und $x, y \in H$. Zeigen Sie:

a) Gilt $(x|z) = (y|z)$ für alle $z \in H$, dann ist $x = y$.

b) $\|x\| = \sup\limits_{z\in H,\, \|z\|\leqslant 1} |(x|z)|$.

ACHTUNG Terminänderung: Die Übung am Freitag, den 13.02.2009, **beginnt bereits um 13:30 Uhr** und endet um 15:00 Uhr.

Klausur zur HM I: Montag, 16.03.2009, 08:00 - 10:00 Uhr

!!! Anmeldeschluss ist Freitag, der 13.02.2009 !!!

Hinweis Die mit **(P)** gekennzeichneten Aufgaben beziehen sich auf den Stoff aus den Ergänzungen zur HM I für Studierende der Physik.

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2008/09

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|a\|_2^2 = (a|a) = 1$. Für $x \in \mathbb{R}^3$ definiere $P_a(x) := (x|a)\,a$.

i) Die Abbildung $P_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist linear, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit den Eigenschaften des Skalarproduktes im $\mathbb{R}^3$

$$P_a(\alpha x + y) = (\alpha x + y|a)\,a = \alpha(x|a)\,a + (y|a)\,a = \alpha P_a(x) + P_a(y)\,.$$

ii) Um die Darstellungsmatrix von P_a bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$ anzugeben, berechnen wir das Bild $P_a(e_j)$ des Basisvektors e_j (für $j \in \{1,2,3\}$) und stellen dieses als Linearkombination von e_1, e_2 und e_3 (den Basisvektoren im Zielraum) dar. Wegen $a = (a_1, a_2, a_3) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ ergibt sich für jedes $j \in \{1,2,3\}$

$$P_a(e_j) = (e_j|a)\,a = a_1 a = (a_ja_1)e_1 + (a_ja_2)e_2 + (a_ja_3)e_3\,.$$

Damit lautet die j-te Spalte der gesuchten Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} a_ja_1 \\ a_ja_2 \\ a_ja_3 \end{pmatrix}$ für $j \in \{1,2,3\}$.

Also ist die Darstellungsmatrix von P_a bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ gleich

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_2a_1 & a_3a_1 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_3a_2 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wir können alternative Basen des $\mathbb{R}^3$ “vorne” und “hinten” wählen (jedoch war die Aufgabenstellung eine andere!). Sei etwa a das erste Basiselement und $x, y \in \mathbb{R}^3$ so, dass a, x, y eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist. Diese Basis wählen wir sowohl “vorne” als auch “hinten”. Da a, x, y orthonormal sind, gilt dann $P_a(a) = a = 1a + 0x + 0y$ sowie $P_a(x) = P_a(y) = 0 = 0a + 0x + 0y$. Bezüglich dieser Basis hat die Darstellungsmatrix von P_a die besonders einfache Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Aufgrund der Linearität von ϕ gilt

$$\phi(e_1) = \phi(e_1 + e_2 + e_3) - \phi(e_2 + e_3) = (e_2 - e_3) - e_1 = (-1)e_1 + 1e_2 + (-1)e_3\,,$$
$$\phi(e_2) = \phi(e_2 + e_3) - \phi(e_3) = e_1 - (2e_1 + 3e_2 + 5e_3) = (-1)e_1 + (-3)e_2 + (-5)e_3\,,$$
$$\phi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3\,.$$

Somit lautet die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wenn nicht vorgegeben ist, bezüglich welcher Basen man die Darstellungsmatrix angeben soll, so kann man die Aufgabe sehr einfach lösen, indem man die Basen besonders geschickt wählt: Nimmt man "vorne" etwa die Basis $e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3$ und "hinten" die Basis $2e_1 + 3e_2 + 5e_3, e_1, e_2 - e_3$ (Man sieht leicht, dass es sich dabei tatsächlich um Basen des $\mathbb{R}^3$ handelt), dann bildet ϕ den j-ten Basisvektor der "vorderen" Basis auf den j-ten Basisvektor der "hinteren" Basis ab, weshalb die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basen die Einheitsmatrix I_3 ist. Beachte: ϕ ist nicht die Identitätsabbildung!

Aufgabe 2

Die Summe $A + C$ ist nicht definiert, weil die Spaltenanzahl von A und C nicht übereinstimmt. Auch das Produkt CB ist undefiniert, denn bei Matrizenprodukten muss die Anzahl der Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors sein. Alle anderen Ausdrücke können wir berechnen:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3C = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 3 & -3i \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i & -3-5i & 6+6i \\ 1 & 2-3i & 2 \\ 6+i & -12-2i & 14+3i \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3i & 12+2i & -11-i \\ 6+2i & 7+3i & -8+i \\ 0 & 3 & 3-3i \end{pmatrix}$$

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5i & 6 \\ 6-i & 6-2i \\ 2i & -6-7i \end{pmatrix}$$

$$A^*C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-i \\ -3i & 1 & 4 \\ -1 & 1+i & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4-2i \\ 12 & 8-i \\ -5 & -5-i \end{pmatrix}$$

$$C^T B = \begin{pmatrix} i & 1 & 2 \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 6 & 2+3i \\ -i & 6+i & -2i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a) Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \\ d \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} e & f & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & g & e & h \end{pmatrix}$$

muss gelten $a = b = e = g = 0$, $c = f = 2$ und $d = h = 9$.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Für $L = (l_{jk})_{j=1}^{2}{}_{k=1}^{2} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$LA = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l_{11} + 2l_{12} \\ 0 & l_{21} + 2l_{22} \end{pmatrix}.$$

Also gilt $LA = 0$ genau dann, wenn $l_{11} + 2l_{12} = 0$ und $l_{21} + 2l_{22} = 0$ sind. Wir können l_{12} und l_{22} beliebig wählen, etwa $l_{12} = s \in \mathbb{R}$ und $l_{22} = t \in \mathbb{R}$. Es muss nun gelten $l_{11} = -2s$ und $l_{21} = -2t$. Folglich gilt $LA = 0$ genau für Matrizen der Form

$$L = \begin{pmatrix} -2s & s \\ -2t & t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Für $R = (r_{jk})_{j=1}^{2}{}_{k=1}^{2} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$AR = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{21} & r_{22} \\ 2r_{21} & 2r_{22} \end{pmatrix}.$$

Also gilt $AR = 0$ genau dann, wenn $r_{21} = 0$ und $r_{22} = 0$ sind. Dabei können r_{11} und r_{12} beliebig gewählt werden, etwa $r_{11} = u$ und $r_{12} = v$ ($u, v \in \mathbb{R}$ beliebig). Folglich gilt $AR = 0$ genau für

$$R = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u, v \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

c) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 3-i & 1 \\ 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wir können $AX = X + I_3$ umformen zu $AX - X = I_3$, also $(A - I_3)X = I_3$. Gesucht ist die inverse Matrix von $A - I_3$, also $x_{jk} \in \mathbb{C}$ mit

$$\begin{pmatrix} -1 & 3-i & 1 \\ 0 & -1 & -2i \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt der Matrizen auf der linken Seite ist gleich

$$\begin{pmatrix} -x_{11} + (3-i)x_{21} + x_{31} & -x_{12} + (3-i)x_{22} + x_{32} & -x_{13} + (3-i)x_{23} + x_{33} \\ -x_{21} - 2ix_{31} & -x_{22} - 2ix_{32} & -x_{23} - 2ix_{33} \\ -x_{31} & -x_{32} & -x_{33} \end{pmatrix}.$$

Vergleicht man die erste Spalte dieser Matrix mit der ersten Spalte der Einheitsmatrix auf der rechten Seite, so erhält man das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -x_{11} + (3-i)x_{21} + x_{31} &= 1 \\ -x_{21} - 2ix_{31} &= 0 \\ -x_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Wir gehen die Gleichungen von unten nach oben durch und lesen ab: $x_{31} = 0$, $x_{21} = 0$ und $x_{11} = -1$. Die Gleichungssysteme, die man durch Vergleich der zweiten bzw. dritten Spalte bekommt, lauten:

$$\begin{aligned} -x_{12} + (3-i)x_{22} + x_{32} &= 0 \\ -x_{22} - 2ix_{32} &= 1 \\ -x_{32} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -x_{13} + (3-i)x_{23} + x_{33} &= 0 \\ -x_{23} - 2ix_{33} &= 0 \\ -x_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Hier ergibt sich: $x_{32} = 0$, $x_{22} = -1$ und $x_{12} = (3-i)x_{22} = -3+i$. Und schließlich: $x_{33} = -1$, $x_{23} = -2ix_{33} = 2i$, $x_{13} = (3-i)x_{23} + x_{33} = (3-i)2i - 1 = 1 + 6i$. Die gesuchte Matrix ist

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -3+i & 1+6i \\ 0 & -1 & 2i \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man $(A - I_3)^{-1}$ mit einem analogen Ansatz wie in Aufgabe 5 berechnen.

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Die Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ werden wir jeweils definieren, indem wir ihre Zeilen, die wir mit $x_1^T, \dots, x_n^T$ bezeichnen, angeben.
Im folgenden brauchen wir ständig: Für jede Matrix $D \in \mathbb{C}^{n\times m}$ ist $e_j{}^T D$ die j-te Zeile von D, wobei e_j der j-te Einheitsvektor von $\mathbb{C}^n$ ist.

(Z1): Multiplizieren von Zeile j mit $\alpha \neq 0$. Es soll also gelten: $e_j{}^T BA = \alpha(e_j{}^T A)$ und $e_k{}^T BA = e_k{}^T A$ für $k \neq j$, d. h. $x_j^T A = \alpha(e_j{}^T A)$ und $x_k^T A = e_k{}^T A$ für $k \neq j$. Dies ist offenbar für $x_j^T = \alpha e_j{}^T$ und $x_k^T = e_k{}^T$ für $k \neq j$ erfüllt.

(Z2): Addieren des β-fachen von Zeile k zu Zeile j, wobei $\beta \in \mathbb{C}$ und $k \neq j$ sind. Hier soll $x_j^T A = e_j{}^T BA = e_j{}^T A + \beta(e_k{}^T A) = (e_j{}^T + \beta e_k{}^T)A$ und $x_l^T A = e_l{}^T BA = e_l{}^T A$ für $l \neq j$ gelten. Dies erreichen wir mit $x_j^T = e_j{}^T + \beta e_k{}^T$ und $x_l^T = e_l{}^T$ für $l \neq j$.

(Z3): Vertauschen von Zeile j und k. Dabei soll $x_j^T A = e_j{}^T BA = e_k{}^T A$ und $x_k^T A = e_k{}^T BA = e_j{}^T A$ sowie $x_l^T A = e_l{}^T BA = e_l{}^T A$ für $l \neq j, k$ gelten. Daher wählen wir $x_j^T = e_k{}^T$ und $x_k^T = e_j{}^T$ sowie $x_l^T = e_l{}^T$ für $l \neq j, k$.

Aufgabe 5

a) Mit Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 5Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & -5 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_1]{Z_3 \to Z_3 + 5Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - 3Z_3]{Z_4 \to Z_4 - 6Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & -14 & -15 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -30 & -30 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 + 2Z_1]{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & 15 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{permutieren}]{\text{Zeilen}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass A regulär ist, und haben zugleich $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ berechnet.

Für die Matrix B ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - Z_2]{Z_4 \to Z_4 - 3Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist B regulär mit $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

hat die Matrix C den Rang 2, so dass C nicht regulär ist.

Da A und B regulär sind, gilt:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 42 & 49 & 10 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -38 & -45 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 & -2 \\ 1 & 5 & 15 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$((AB)^T)^{-1} = ((AB)^{-1})^T = \begin{pmatrix} 42 & 5 & 12 & -38 \\ 49 & 5 & 15 & -45 \\ 10 & 1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hier verwendeten wir das folgende Resultat: Ist $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär, so ist auch D^T regulär und es gilt $(D^T)^{-1} = (D^{-1})^T$.

In der Tat ergibt sich mit den Rechenreglen für transponierte Matrizen

$$(D^{-1})^T D^T = (DD^{-1})^T = I_n^T = I_n \qquad \text{und} \qquad D^T (D^{-1})^T = (D^{-1}D)^T = I_n^T = I_n\,.$$

b) Da A und AB regulär sind, bekommen wir die eindeutig bestimmten Lösungen

$$x = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad x = (AB)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

Gegeben sind die linear unabhängigen Vektoren aus $\mathbb{C}^3$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahren kann man ein Orthonormalsystem b_1, b_2, b_3 konstruieren so, dass $\operatorname{lin}\{b_1, b_2, b_3\} = \operatorname{lin}\{x_1, x_2, x_3\}$ ist. Dabei werden die Vektoren b_1, b_2, b_3 rekursiv definiert durch

$$\tilde{b}_1 := x_1, \quad b_1 := \frac{\tilde{b}_1}{\|\tilde{b}_1\|} \qquad \text{und} \qquad \tilde{b}_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(x_k|\tilde{b}_j)}{(\tilde{b}_j|\tilde{b}_j)}\,\tilde{b}_j\,, \quad b_k := \frac{\tilde{b}_k}{\|\tilde{b}_k\|} \quad \text{für } k = 2, 3\,.$$

Für die gegebenen Vektoren x_1, x_2, x_3 ergibt sich

$$\tilde{b}_1 := x_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad b_1 := \frac{\tilde{b}_1}{\|\tilde{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

und wegen

$$(x_2|\tilde{b}_1) = (\begin{pmatrix}2\\2i\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) = 2\cdot\overline{1} + 2i\cdot\overline{0} + 0\cdot\overline{1} = 2$$

erhalten wir

$$\tilde{b}_2 := x_2 - \frac{(x_2|\tilde{b}_1)}{\|\tilde{b}_1\|^2}\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix}2\\2i\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix},$$

$$b_2 := \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{|1|^2+|2i|^2+|-1|^2}}\begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung von $\tilde{b}_3$ brauchen wir die Skalarprodukte

$$(x_3|\tilde{b}_1) = (\begin{pmatrix}5\\3i\\1\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) = 5\cdot\overline{1} + 3i\cdot\overline{0} + 1\cdot\overline{1} = 6,$$

$$(x_3|\tilde{b}_2) = (\begin{pmatrix}5\\3i\\1\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix}) = 5\cdot\overline{1} + 3i\cdot\overline{2i} + 1\cdot\overline{(-1)} = 5 - 6i^2 - 1 = 10.$$

Damit ergibt sich dann

$$\tilde{b}_3 := x_3 - \sum_{j=1}^{2}\frac{(x_3|\tilde{b}_j)}{\|\tilde{b}_j\|^2}\tilde{b}_j = \begin{pmatrix}5\\3i\\1\end{pmatrix} - \frac{6}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{10}{6}\begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-i\\-1\end{pmatrix},$$

$$b_3 := \frac{\tilde{b}_3}{\|\tilde{b}_3\|} = \frac{1}{\frac{1}{3}\sqrt{|1|^2+|-i|^2+|-1|^2}}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-i\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-i\\-1\end{pmatrix}.$$

Die drei linear unabhängigen Vektoren b_1, b_2, b_3 sind orthonormal. Wegen $\mathbb{C}\text{-}\dim \mathbb{C}^3 = 3$ bilden b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 7

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim V = n$ und $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Wir definieren

$$\Phi\colon V \to \mathbb{C}^n,\ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n \mapsto \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$$

und zeigen, dass Φ die gewünschten Eigenschaften besitzt.
Zunächst halten wir fest, dass Φ wohldefiniert ist, weil die Darstellung eines Vektors aus V als Linearkombination der Basisvektoren $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eindeutig ist.

Φ ist linear, denn für jedes $x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$, $y = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ergibt sich

$$\Phi(\lambda x + y) = \Phi\big((\lambda\alpha_1 + \beta_1)b_1 + (\lambda\alpha_2 + \beta_2)b_2 + \ldots + (\lambda\alpha_n + \beta_n)b_n\big) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \beta_1 \\ \lambda\alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \lambda\Phi(x) + \Phi(y)\,.$$

Φ ist surjektiv: Ist $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ beliebig vorgegeben, so liegt $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$ in V und es gilt

$$\Phi(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Φ ist injektiv: Sind $v, w \in V$ mit $\Phi(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \Phi(w)$, so folgt $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n = w$, weil die Koordinaten bezüglich einer Basis eindeutig bestimmt sind.

Bemerkung: Eine bijektive, lineare Abbildung $U \to W$ zwischen zwei Vektorräumen U, W nennt man auch *Isomorphismus*. Zwei Vektorräume U, W heißen *isomorph*, falls es einen Isomorphismus $U \to W$ gibt. Damit haben wir gezeigt, dass V isomorph zu $\mathbb{C}^n$ ist.

Aufgabe 8 (P)

a) Da $(x - y|z) = (x|z) - (y|z) = 0$ für alle $z \in H$ ist, gilt diese Gleichung insbesondere für $z = x - y$, also $\|x - y\|^2 = (x - y|x - y) = 0$. Mit (N1) folgt $x - y = 0$ bzw. $x = y$.

b) Wir zeigen, dass sowohl $\|x\| \geqslant \sup\limits_{z\in H,\, \|z\|\leqslant 1} |(x|z)|$ als auch $\|x\| \leqslant \sup\limits_{z\in H,\, \|z\|\leqslant 1} |(x|z)|$ gilt.

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$\sup_{z\in H,\, \|z\|\leqslant 1} |(x|z)| \leqslant \sup_{z\in H,\, \|z\|\leqslant 1} \|x\| \cdot \|z\| = \|x\|\,.$$

Andererseits gilt für $x \neq 0$

$$\|x\| = \tfrac{1}{\|x\|}\,(x|x) = (x, \tfrac{x}{\|x\|}) \leqslant \sup_{z\in H,\, \|z\|\leqslant 1} |(x|z)|\,.$$

Für $x = 0$ ist die Aussage trivial.