KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) (i) Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \lor B$	$\neg(A \lor B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \land (\neg B)$	$\neg(A \lor B) \iff (\neg A) \land (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	w	f	f	w	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w

(ii) Wahrheitswerttafel:

A	B	C	$B \lor C$	$A \land (B \lor C)$	$A \land B$	$A \land C$	$(A \land B) \lor (A \land C)$	$\mathcal{F}_1$
w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	w	w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f	w
f	w	w	w	f	f	f	f	w
f	w	f	w	f	f	f	f	w
f	f	w	w	f	f	f	f	w
f	f	f	f	f	f	f	f	w

,

wobei $\mathcal{F}_1 := A \land (B \lor C) \iff (A \land B) \lor (A \land C)$.

(iii) Wahrheitswerttafel:

A	B	$A \iff B$	$A \land B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \land (\neg B)$	$(A \land B) \lor \big((\neg A) \land (\neg B)\big)$	$\mathcal{F}_2$
w	w	w	w	f	f	f	w	w
w	f	f	f	f	w	f	f	w
f	w	f	f	w	f	f	f	w
f	f	w	f	w	w	w	w	w

,

wobei $\mathcal{F}_2 := \big[A \iff B\big] \iff \big[(A \land B) \lor \big((\neg A) \land (\neg B)\big)\big]$.

b) Im folgenden schreiben wir kurz $\neg D$ statt $(\neg D)$, wobei D eine beliebige Aussage sei; also z. B. $\neg\neg A$ statt $\neg(\neg A)$ und $\neg A \lor \neg B$ statt $(\neg A) \lor (\neg B)$.
Wir benutzen, dass

$$D \iff \neg\neg D \tag{$*$}$$

für jede Aussage D gilt (siehe Vorlesung).

(i) Es gilt

$$\neg A \lor \neg B \overset{(*)}{\iff} \neg\neg(\neg A \lor \neg B) \overset{\text{a.i)}}{\iff} \neg(\neg\neg A \land \neg\neg B) \overset{(*)}{\iff} \neg(A \land B).$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

(ii) Es gilt

$$A \lor (B \land C) \overset{(*)}{\iff} \neg\neg\big(A \lor (B \land C)\big) \overset{\text{a.i)}}{\iff} \neg\big(\neg A \land \neg(B \land C)\big) \overset{\text{b.i)}}{\iff}$$
$$\neg\big(\neg A \land (\neg B \lor \neg C)\big) \overset{\text{a.ii)}}{\iff} \neg\big((\neg A \land \neg B) \lor (\neg A \land \neg C)\big) \overset{\text{a.i)}}{\iff}$$
$$\neg(\neg A \land \neg B) \land \neg(\neg A \land \neg C) \overset{\text{b.i)}}{\iff} (\neg\neg A \lor \neg\neg B) \land (\neg\neg A \lor \neg\neg C) \overset{(*)}{\iff}$$
$$(A \lor B) \land (A \lor C).$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

c) Es sei
A die Aussage „Ich bin reich“,
B die Aussage „Ich bin glücklich“ und
C die Aussage „Das Wetter ist schön“.

In a.i) haben wir gezeigt, dass die Negation der Aussage „Ich bin reich oder glücklich“ lautet: „Ich bin arm und unglücklich“.
In b.i) haben wir gezeigt, dass die Negation der Aussage „Ich bin reich und glücklich“ lautet: „Ich bin arm oder unglücklich“.
In a.ii) haben wir gezeigt: „Das Wetter ist schön und ich bin reich oder glücklich“ ist genau dann wahr, wenn „Das Wetter ist schön und ich bin reich“ oder „Das Wetter ist schön und ich bin glücklich“ wahr ist.
In b.ii) haben wir gezeigt: „Das Wetter ist schön oder ich bin reich und glücklich“ ist genau dann wahr, wenn „Das Wetter ist schön oder ich bin reich“ und „Das Wetter ist schön oder ich bin glücklich“ wahr ist.

Aufgabe 2

a) R_1 bedeutet $\neg C \Longrightarrow \neg B$.
R_2 bedeutet $(B \vee C) \wedge \neg(B \wedge C)$.
R_3 bedeutet $[(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)] \wedge \neg[(A \wedge C) \wedge (\neg A \wedge \neg C)]$.

b) Zum (leichteren) Ausfüllen der Wahrheitswerttafeln formen wir die Aussagen zunächst äquivalent um. Es gilt:

$$\mathrm{R}_1 \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} (\neg C \Longrightarrow \neg B) \overset{\text{Vorl.}}{\Longleftrightarrow} (B \Longrightarrow C).$$

$$\mathrm{R}_2 \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \big((B \vee C) \wedge \neg(B \wedge C)\big) \overset{\text{b.i)}}{\Longleftrightarrow} \big((B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C)\big) \overset{\text{a.ii)}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\big([(B \vee C) \wedge \neg B] \vee [(B \vee C) \wedge \neg C]\big) \overset{\text{a.ii)}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\big([(B \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg B)] \vee [(B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C)]\big) \overset{\text{Vorl.}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\big([\text{falsch} \vee (C \wedge \neg B)] \vee [(B \wedge \neg C) \vee \text{falsch}]\big) \overset{\text{Üb.}}{\Longleftrightarrow} \big([C \wedge \neg B] \vee [B \wedge \neg C]\big) \overset{\text{a.iii)}}{\Longleftrightarrow} \big(C \Longleftrightarrow \neg B\big).$$

$$\mathrm{R}_3 \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \big([(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)] \wedge \neg[(A \wedge C) \wedge (\neg A \wedge \neg C)]\big) \overset{\text{Üb.}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\big([(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)] \wedge \neg[A \wedge \neg A \wedge C \wedge \neg C)]\big) \overset{\text{Vorl.}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\big([(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)] \wedge \neg[\text{falsch} \wedge \text{falsch})]\big) \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\big([(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)] \wedge \neg\text{falsch}\big) \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\big([(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)] \wedge \text{wahr}\big) \overset{\text{Üb.}}{\Longleftrightarrow} \big((A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)\big) \overset{\text{a.iii)}}{\Longleftrightarrow} \big(A \Longleftrightarrow C\big).$$

Wir erhalten folgende Wahrheitswerttafel:

			R_1		R_2	R_3	
A	B	C	$B \Longrightarrow C$	$\neg B$	$C \Longleftrightarrow (\neg B)$	$A \Longleftrightarrow C$	$\mathrm{R}_1 \wedge \mathrm{R}_2 \wedge \mathrm{R}_3$
w	w	w	w	f	f	w	f
w	w	f	f	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	w	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	f	f	w	w	f
f	f	w	w	w	w	f	f
f	f	f	w	w	f	w	f

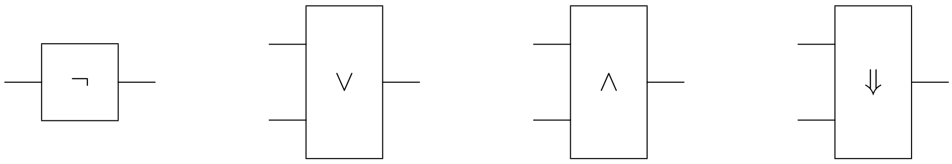
Nur in der dritten Zeile sinde alle drei Aussagen R_1, R_2 und R_3 gleichzeitig „wahr“; also lautet die Lösung: Anton und Chris kommen, Berta nicht.

Aufgabe 3

a) Das Anliegen von Spannung wird mit „wahr“ identifiziert, deren Fehlen mit „falsch“. Dann gilt: Ein $\neg$-Gatter mit Eingang A liefert an seinem Ausgang $\neg A$. Ein $\vee$-Gatter mit den Eingängen A und B liefert an seinem Ausgang $A \vee B$.

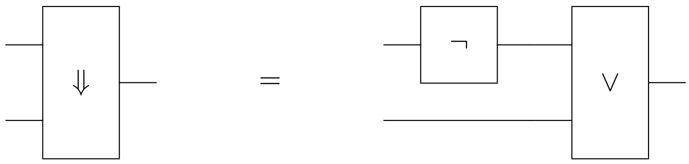
Damit ergibt sich: Ein $\wedge$-Gatter ist ein Bauteil mit zwei Eingängen und einem Ausgang; am Ausgang liegt genau dann Spannung an, wenn an beiden Eingängen Spannung anliegt. Ein $\Longrightarrow$-Gatter ist ein Bauteil mit zwei Eingängen A und B und einem Ausgang; am Ausgang liegt genau dann Spannung an, wenn am Eingang B Spannung anliegt oder an A keine Spannung anliegt. Wie man schon aus dieser Beschreibung sieht, sind also bei einem $\Longrightarrow$-Gatter die Eingänge nicht „gleichberechtigt“.

Wir verwenden folgende Symbole für die Gatter:

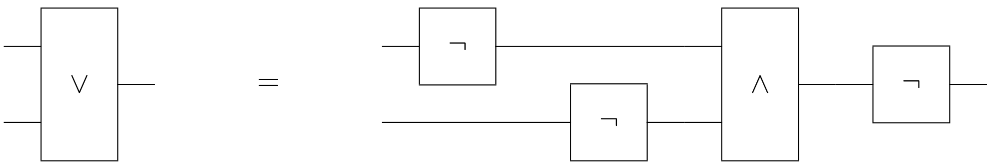


Links sind dabei jeweils die Eingänge und rechts der Ausgang. Beim $\Longrightarrow$-Gatter ist zu beachten, dass der obere Eingang der Eingang A sein soll (daher auch die Pfeilrichtung).

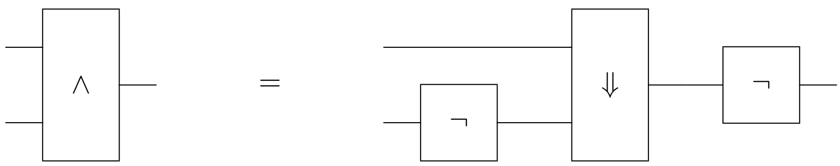
b) Laut Vorlesung gilt $[A \Longrightarrow B] \iff [(\neg A) \vee B]$. Also:



c) Es gilt $A \vee B \iff \neg\neg(A \vee B) \overset{\textbf{1.i)}}{\iff} \neg\big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)$. Wir haben somit folgenden Bauplan:



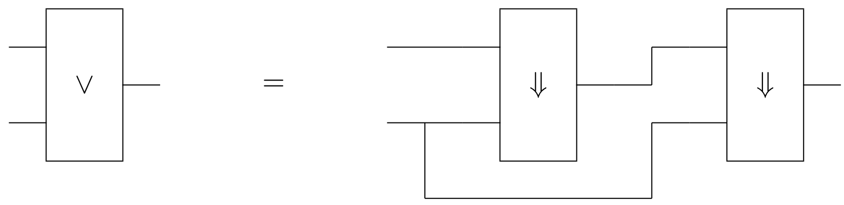
d) Wie in **c)** sieht man: $A \wedge B \iff \neg\big((\neg A) \vee (\neg B)\big)$. Wegen $\big[(\neg A) \vee (\neg B)\big] \iff \big[A \Longrightarrow (\neg B)\big]$ erhalten wir: $A \wedge B \iff \neg\big(A \Longrightarrow (\neg B)\big)$. Auch diese Bauanleitung zeichnen wir auf:



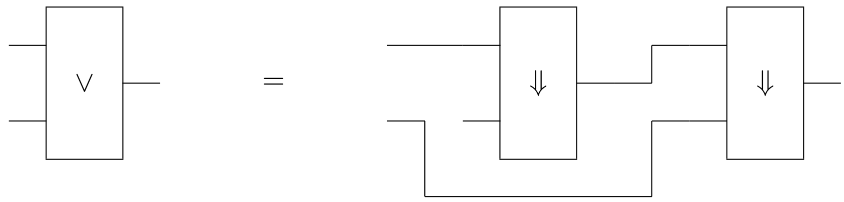
e) Bei der folgenden Umformung benutzen wir im ersten Schritt, dass $\neg B \vee B$ stets wahr ist (siehe Vorlesung) und dass daher $D \wedge (\neg B \vee B) = D$ für jede Aussage D gilt.

$$A \vee B \iff (A \vee B) \wedge (\neg B \vee B) \overset{\textbf{b.ii)}}{\iff} (A \wedge \neg B) \vee B \iff \big[\neg\neg(A \wedge \neg B)\big] \vee B$$
$$\overset{\textbf{b.i)}}{\iff} \big[\neg(\neg A \vee B)\big] \vee B \iff \big[\neg(A \Longrightarrow B)\big] \vee B \iff \big[(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow B\big]$$

Dies liefert das folgende Schema:



Bemerkung: Eine andere Möglichkeit sieht wie folgt aus:



Hier wird also der untere Eingang des linken $\Longrightarrow$-Gatters nirgends angeschlossen, so dass er stets ohne Spannung bleibt. Auf diese Weise wirkt das linke $\Longrightarrow$-Gatter dann wie ein $\neg$-Gatter auf seinen oberen Eingang – symbolisch geschrieben: $\neg A \iff (A \Longrightarrow \text{falsch})$. Die Richtigkeit des Bauplans ergibt sich dann aus der Gleichheit $A \vee B \iff \big[(\neg A) \Longrightarrow B\big]$.

Aufgabe 4

a) Die Aussage „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad und der Straßenbahn" entsteht aus den beiden Teilaussagen

A : „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad."
B : „Alle Karlsruher fahren mit der Straßenbahn."

mittels der logischen Verknüpfung $\wedge$ (und). Weiter gilt

$$\big(\neg(A \wedge B)\big) \iff \big((\neg A) \vee (\neg B)\big),$$

also lautet die Negation obiger Aussage

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad fährt,
oder es gibt einen Karlsruher, der nicht mit der Straßenbahn fährt"

bzw. kurz:

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad oder nicht mit der Straßenbahn fährt".

b) Es sei A die Aussage „Morgen ist schlechtes Wetter" und B die Aussage „Alle Studierenden gehen in die Bibliothek", dann müssen wir $A \Longrightarrow B$ verneinen. Es gilt:

$$\big(\neg(A \Longrightarrow B)\big) \iff \big(\neg\big((\neg A) \vee B\big)\big) \iff \big((\neg(\neg A) \wedge (\neg B))\big) \iff \big(A \wedge (\neg B)\big).$$

Somit lautet die Negation des Satzes: „Morgen ist schlechtes Wetter, und es gibt (trotzdem) einen Studierenden, der nicht in die Bibliothek geht".

c) Betrachten wir die drei Aussagen

A : „Im Kino läuft Star Trek",
B : „Im Kino läuft James Bond",
C : „Ich gehe ins Kino",

dann entspricht die Aussage „Ich gehe immer ins Kino, wenn Star Trek oder James Bond laufen“: $(A \vee B) \Longrightarrow C$. Wegen $(E \Longrightarrow C) \iff (\neg E \vee C)$ ist

$$\neg\big((\underbrace{A \vee B}_{=E}) \Longrightarrow C\big) \iff \neg\big(\neg(\underbrace{A \vee B}_{=E}) \vee C\big) \iff \big((A \vee B) \wedge \neg C\big).$$

In Worten: „Im Kino läuft ein Star-Trek- oder ein James-Bond-Film, und ich gehe (dennoch) nicht ins Kino“.

d) Die Menge aller Menschen werde mit M bezeichnet. Wir wollen die Aussage $\underset{x \in M}{\exists} A(x)$ negieren, wobei die Aussageform $A(x)$ durch

$$A(x): \text{„Mathematik macht } x \text{ keinen Spaß.“}$$

gegeben ist. Wegen

$$\neg\Big(\underset{x \in M}{\exists} A(x)\Big) \iff \underset{x \in M}{\forall} \neg A(x)$$

ist die Negation der ursprünglichen Aussage: „Allen Menschen macht Mathematik Spaß“.

Aufgabe 5

a) **(i)** Die Menge all derer, die in Karlsruhe im ersten Hochschulsemester sind und Physik studieren, lässt sich ausdrücken durch

$$\big\{x \mid x \in S_1 \wedge x \in P\big\} = S_1 \cap P.$$

(ii) Die Menge aller Karlsruher Studierenden, die im ersten oder dritten Hochschulsemester sind, aber nicht Elektroingenieurwesen studieren, ist gleich

$$\big\{x \mid (x \in S_1 \vee x \in S_3) \wedge x \notin E\big\} = \big\{x \mid x \in S_1 \cup S_3 \wedge x \notin E\big\} = (S_1 \cup S_3) \setminus E.$$

(iii) Die Menge aller Studierenden in Karlsruhe entspricht

$$\big\{x \mid x \in S_1 \vee x \in S_2 \vee x \in S_3 \vee x \in S_4 \vee \ldots\big\} = \big\{x \mid \underset{j \in \mathbb{N}}{\exists} x \in S_j\big\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j.$$

b) $C_S(G \cup P)$ ist das Komplement von $G \cup P$ bezogen auf S, also die Menge aller Karlsruher Studierender, die weder Geodäsie noch Physik studieren.

Aufgabe 6

Seien M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen.

a) Es gelte $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$. Um $M_1 \subset M_3$ zu zeigen, müssen wir begründen, warum jedes Element aus M_1 auch in M_3 liegt. Sei hierzu $x \in M_1$ beliebig. Wegen $M_1 \subset M_2$ liegt x auch in M_2 und aufgrund von $M_2 \subset M_3$ ist x auch in M_3 enthalten.

Da $x \in M_1$ beliebig war, haben wir eingesehen, dass jedes Element aus M_1 ebenfalls in M_3 liegt, d.h. $M_1 \subset M_3$.

b) Die Äquivalenz der drei Aussagen **i)**, **ii)**, **iii)** erhalten wir am geschicktesten aus der Implikationskette „**i)** $\Longrightarrow$ **ii)** $\Longrightarrow$ **iii)** $\Longrightarrow$ **i)**“.

„**i)** $\Longrightarrow$ **ii)**“: Es gelte $M_1 \subset M_2$. Um nun die Gleichheit der beiden Mengen $M_1 \cap M_2$ und M_1 zu zeigen, brauchen wir nur die eine Inklusion $M_1 \subset M_1 \cap M_2$ einzusehen (die umgekehrte Inklusion gilt ohnehin). Sei dazu $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subset M_2$ ist auch $x \in M_2$. Dann ist aber x sowohl in M_1 als auch in M_2, also in $M_1 \cap M_2$.

„**ii)** $\Longrightarrow$ **iii)**“: Hier müssen wir unter der Voraussetzung $M_1 \cap M_2 = M_1$ nur die Inklusion $M_1 \cup M_2 \subset M_2$ nachweisen (die umgekehrte Inklusion $M_1 \cup M_2 \supset M_2$ gilt immer). Sei also $x \in M_1 \cup M_2$. Ist $x \in M_2$, so ist nichts zu zeigen. Ist $x \in M_1 = M_1 \cap M_2$, so ist $x \in M_2$, was zu zeigen war.

„**iii)** $\Longrightarrow$ **i)**“: Es gelte $M_1 \cup M_2 = M_2$. Zu zeigen ist $M_1 \subset M_2$. Sei hierzu $x \in M_1$. Dann ist jedenfalls $x \in M_1 \cup M_2 = M_2$.

Aufgabe 7 (P)

a) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 0$. Um $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ zu zeigen, führen wir einen indirekten Beweis. Wir nehmen dazu an, dass (mindestens) eine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von Null verschieden ist, d.h. $a_k \neq 0$ für ein $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann folgt $a_k^2 > 0$. Da $a_i^2 \geqslant 0$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ gilt, ergibt sich $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant a_k^2 > 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 0$.

Also ist die Annahme falsch und die Negation der Annahme wahr. Folglich ist keine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ungleich Null, d.h. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Um $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zu zeigen, führen wir einen Widerspruchsbeweis.

Zur Abkürzung definieren wir $x := \sqrt{m} + \sqrt{n}$.

Annahme: $x \in \mathbb{Q}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} = x - \sqrt{m} \qquad &\Longrightarrow \qquad n = (x - \sqrt{m})^2 = x^2 - 2x\sqrt{m} + m \\ &\overset{x \geqslant \sqrt{m} > 0}{\Longrightarrow} \qquad \sqrt{m} = \frac{x^2 + m - n}{2x} \\ &\overset{x \in \mathbb{Q}}{\Longrightarrow} \qquad \sqrt{m} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Dies widerspricht der Voraussetzung $\sqrt{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Somit ist die getroffene Annahme falsch und die Negation der Annahme wahr. Das bedeutet $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.