

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

- a) Gegeben seien die Mengen $M = \{2, 4, 7\}$ und $N = \{2, 4, 8, 9\}$. Geben Sie, falls möglich, eine injektive, eine nicht injektive, eine surjektive und eine nicht surjektive Abbildung von M nach N bzw. von N nach M an. Existieren auch bijektive Abbildungen?
- b) Untersuchen Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x+4}{x-3}$ auf Injektivität und Surjektivität.
- c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion π genau dann surjektiv ist, wenn sie injektiv ist.

Aufgabe 2

- a) Für $k \in \{1, 2, 3\}$ seien die Funktionen $f_k: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ definiert durch

$$f_1(x) := x, \quad f_2(x) := 1 + \frac{x}{1-x}, \quad f_3(x) := 1 - \frac{1}{x}.$$

Überprüfen Sie jede dieser Funktionen auf Bijektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

- b) Berechnen Sie $f_j \circ f_k$ für alle $j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 3

- a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner sei die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $f(x) := xb + (1-x)a$ gegeben. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrfunktion von f an.
- b) Nun seien $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$. Ermitteln Sie eine Funktion, die das Intervall $[c, d]$ auf $[a, b]$ bijektiv abbildet.

Aufgabe 4*

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$ mit

- a) $|x-4| = |x+1|$; b) $|2x| > |5-2x|$; c) $|2-|2-x|| \leq 1$;
d) $|x+1| + |x-1| > 2$; e) $\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2$; f) $2x + \frac{1}{1-x} \geq 1$.

Aufgabe 5*

Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{und} \quad \min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

*Diese Aufgaben beziehen sich teilweise auf den Inhalt der Vorlesung vom 29.10.2010.

Aufgabe 6

Sei M eine beliebige Menge und A und B Teilmengen von M .

- a) Zeigen Sie, dass $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ gilt.
- b) Wie lassen sich die charakteristischen Funktionen der Mengen $C_M A$, $A \setminus B$ und $A \cup B$ durch χ_A und χ_B ausdrücken?

Aufgabe 7

Gegeben seien zwei Mengen X und Y sowie eine Funktion $f: X \rightarrow Y$. Zeigen Sie:

- a) $A \subset f^{-1}(f(A))$ für alle $A \subset X$. Ist f injektiv, dann gilt sogar Gleichheit.
- b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ für alle $B \subset Y$. Ist f surjektiv, dann gilt sogar Gleichheit.

Aufgabe 8

Gegeben Sie die Funktion $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ durch
$$\begin{cases} \sigma(2k) := k & \text{für } k = 1, 2, 3, \dots \\ \sigma(2k+1) := -k & \text{für } k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}.$$

- a) Zeigen Sie, dass σ bijektiv ist.
- b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion σ^{-1} . Rechnen Sie dabei insbesondere beide definierenden Gleichungen $\sigma^{-1} \circ \sigma = \text{id}_{\mathbb{N}}$ und $\sigma \circ \sigma^{-1} = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ nach.
- c) Bestätigen Sie mittels Nachrechnen: $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$.

Aufgabe 9 (P)

Für Elemente (x_1, x_2) und (y_1, y_2) der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ seien die Verknüpfungen $\oplus: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{bzw.} \quad (x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

- a) Überprüfen Sie, dass $\oplus$ und $\odot$ dem Assoziativ- und dem Kommutativgesetz genügen.
- b) Beweisen Sie das folgende Distributivgesetz für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$:
 $(x_1, x_2) \odot [(y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2)] = [(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2)] \oplus [(x_1, x_2) \odot (z_1, z_2)].$
- c) Bestimmen Sie das *Nullelement* $(n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Verknüpfung $\oplus$, d. h. das Element, für welches $(x_1, x_2) \oplus (n_1, n_2) = (x_1, x_2)$ für jedes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt ist.
- d) Bestimmen Sie das *Einselement* $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Verknüpfung $\odot$, d. h. das Element, für welches $(x_1, x_2) \odot (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$ für jedes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt ist.
- e) Berechnen Sie für alle Elemente $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, für die dies möglich ist, das zugehörige *inverse Element* $-(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Verknüpfung $\oplus$, d. h. das Element, für welches $(x_1, x_2) \oplus -(x_1, x_2) = (n_1, n_2)$ erfüllt ist.
- f) Berechnen Sie für alle Elemente $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, für die dies möglich ist, das zugehörige *inverse Element* $(x_1, x_2)^{-1} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Verknüpfung $\odot$, d. h. das Element, für welches $(x_1, x_2) \odot (x_1, x_2)^{-1} = (e_1, e_2)$ erfüllt ist.
- g) Welche algebraischen Strukturen tragen $(\mathbb{R}^2, \oplus)$, $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(n_1, n_2)\}, \odot)$ und $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$?

Hinweis:

Wegen Allerheiligen (1.11.2010) wird am **29.10.2010 eine Vorlesung statt der Übung** am Übungstermin (14:00 - 15:30 Uhr, Benz-Hörsaal) abgehalten.