

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0, \infty)$ gilt: $x \leq y \iff x^n \leq y^n$.

Aufgabe 2

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

a) $2xy \leq \varepsilon^2 x^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} y^2$, b) $(x + y)^2 \leq (1 + \varepsilon^2)x^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right)y^2$.

Hinweis zu b): Verwenden Sie a).

Aufgabe 3

Seien $x, y \in (0, \infty)$. Beweisen Sie:

a) $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}$, b) $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die $x \leq 4 + \sqrt{x - 2}$ erfüllen.

Definition (Summenzeichen):

(zu Aufgabe 5, 6 und 11)

Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ sei $a_j \in \mathbb{R}$. Außerdem sei $m \in \mathbb{Z}$.

Wir definieren $\sum_{j=m}^m a_j := a_m$ und *rekursiv* für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq m$: $\sum_{j=m}^{n+1} a_j := \left(\sum_{j=m}^n a_j\right) + a_{n+1}$.

Dann ist $\sum_{j=m}^n a_j = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$ und insbesondere für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < m$ setzen wir $\sum_{j=m}^n a_j := 0$ („leere Summe“).

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie: $\sum_{j=3}^5 \frac{j+1}{j-2}$, $\sum_{k=1}^{111} 5$, $\sum_{l=-2}^4 (l+1)^2$, $\sum_{m=0}^3 \sum_{n=m}^3 n(n+m)$.

b) Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens:

$$2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{100}{99 \cdot 101}.$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \dots, a_n$ reelle Zahlen. Welche der folgenden Summen sind gleich?

$$\sum_{k=1}^n a_k, \quad \sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1}, \quad \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1}, \quad a_1 + \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-k}.$$

Aufgabe 6

- a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \dots, a_n$ reelle Zahlen.

Berechnen Sie den Wert der sogenannten *Teleskopsumme*: $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})$.

- b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Beweisen Sie die sogenannte *geometrische Summenformel*: $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Aufgabe 7

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

a) $\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

c) $\{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x \leq 42\}$

d) $\{\frac{x^2}{1 + x^2} \mid x \in \mathbb{R}\}$

e) $f([0, 1])$, wobei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Infimum besitzt.

Aufgabe 9

Seien A und B beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Weiter sei $\emptyset \neq C \subset (0, \infty)$. Wir setzen

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\} \quad \text{und} \quad 1/C := \{1/c \mid c \in C\}.$$

Zeigen Sie:

- a) $A + B$ ist beschränkt und es gilt: $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ und $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
- b) C ist genau dann beschränkt, wenn $\inf(1/C) > 0$ ist. In diesem Fall gilt $\sup C = \frac{1}{\inf(1/C)}$.
- c) $1/C$ ist genau dann beschränkt, wenn $\inf C > 0$ ist. In diesem Fall gilt $\sup(1/C) = \frac{1}{\inf C}$.

Aufgabe 10

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

- a) $f(px) = pf(x)$ für jedes $p \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$.
- b) $f(rx) = rf(x)$ für jedes $r \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 11 (P)

Seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad (\text{Minkowskische Ungleichung}).$$

Aufgabe 12 (P)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(m, n) := 2^{m-1}(2n - 1)$ bijektiv ist.