KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11

Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

„$\Longrightarrow$“: Es gelte $x \leq y$ und wir zeigen nun, wie daraus $x^n \leq y^n$ folgt:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}} = (\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n-1\text{-mal}}) \cdot x \leq \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n-1\text{-mal}} \cdot y \leq$$

$$\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n-2\text{-mal}} \cdot y \cdot y \leq \dots \leq x \underbrace{y \cdot y \cdot \dots \cdot y}_{n-1\text{-mal}} \leq \underbrace{y \cdot y \cdot \dots \cdot y}_{n\text{-mal}} = y^n.$$

„$\Longleftarrow$“: Es gelte $x^n \leq y^n$ und wir zeigen nun durch Widerspruchsbeweis, wie daraus $x \leq y$ folgt: Angenommen, es gilt nicht $x \leq y$. Dann gilt $y < x$ und analog zur Beweisrichtung „$\Longrightarrow$“ erhalten wir daraus $y^n < x^n$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $x^n \leq y^n$. Also war die Annahme falsch, also gilt $x \leq y$.

Aufgabe 2

a) Es gilt

$$2xy \leqslant \varepsilon^2 x^2 + y^2/\varepsilon^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon xy/\varepsilon + y^2/\varepsilon^2 = (\varepsilon x - y/\varepsilon)^2.$$

Die Aussage $0 \leqslant (\varepsilon x - y/\varepsilon)^2$ ist offenbar stets wahr, damit ist a) gezeigt.

b) Unter Verwendung von a) erhalten wir

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \overset{\text{a)}}{\leqslant} x^2 + \varepsilon^2 x^2 + y^2/\varepsilon^2 + y^2 = (1+\varepsilon^2)x^2 + \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\Big)y^2.$$

Aufgabe 3

a) Wir zeigen 1.) $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$ und 2.) $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}$.

Zu 1.)

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \overset{\text{Aufg. 1}}{\Longleftrightarrow} \quad x + y \leqslant x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant 2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Die letzte Ungleichung ist per Definition wahr.

Zu 2.)

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \quad &\overset{|\cdot\sqrt{x}\sqrt{y}>0}{\Longleftrightarrow} \quad x\sqrt{y} + \sqrt{x}\,y \leqslant x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{y} - y\sqrt{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant (x-y)\big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big). \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist wahr, denn:

1. Fall: $x = y$. $0 \leqslant 0$ ist wahr.

2. Fall: $x < y$. Wegen $x < y \iff \sqrt{x} < \sqrt{y}$ ist $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ wahr.

3. Fall: $x > y$. Wegen $x > y \iff \sqrt{x} > \sqrt{y}$ folgt auch hier $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

b) Es gilt

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|} \overset{\text{Aufg. 1}}{\iff} \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{|x-y|}\right)^2 \iff x-2\sqrt{x}\sqrt{y}+y \leqslant |x-y|.$$

Im Fall $x \leqslant y$ ist dies äquivalent zu

$$x-2\sqrt{x}\sqrt{y}+y \leqslant y-x \iff 2x-2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant 0 \iff \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) \leqslant 0.$$

Letzteres ist wahr wegen $x \leqslant y \Rightarrow \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.

Für $x \geqslant y$ (alternativ könnte man dies auch direkt aus obigem Fall folgern, weil der Ausdruck $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$ symmetrisch bzgl. Tausch $x \leftrightsquigarrow y$ ist) ergibt sich:

$$x-2\sqrt{x}\sqrt{y}+y \leqslant x-y \iff 2y-2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant 0 \iff \sqrt{y}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right) \leqslant 0.$$

Letzteres ist wahr wegen $x \geqslant y \Rightarrow \sqrt{x} \geqslant \sqrt{y}$.

Aufgabe 4

Wir bemerken zunächst, dass die Ungleichung $x \leqslant 4+\sqrt{x-2}$ nur für $x \geqslant 2$ sinnvoll ist. Es gilt

$$x \leqslant 4+\sqrt{x-2} \iff x-4 \leqslant \sqrt{x-2}.$$

Im Fall $x \geqslant 4$ ist dies nach Aufgabe 1 äquivalent zu (man beachte $x-4 \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}(x-4)^2 \leqslant x-2 &\iff x^2-8x+16 \leqslant x-2 \iff x^2-9x+18 \leqslant 0 \iff (x-3)(x-6) \leqslant 0\\ &\iff \left(x-3 \leqslant 0 \text{ und } x-6 \geqslant 0\right) \text{ oder } \left(x-3 \geqslant 0 \text{ und } x-6 \leqslant 0\right)\\ &\iff \left(x-3 \geqslant 0 \text{ und } x-6 \leqslant 0\right) \iff x \in [3,6].\end{aligned}$$

Da wir nur $x \geqslant 4$ betrachtet haben, gilt $x \leqslant 4+\sqrt{x-2}$ in diesem Fall genau für $x \in [4,6]$.
Für jedes $x \in [2,4)$ gilt $x-4<0$ und, da die Wurzel nach Definition nichtnegativ ist, genügt jedes $x \in [2,4)$ der Ungleichung $x-4<0 \leqslant \sqrt{x-2}$ und somit auch $x \leqslant 4+\sqrt{x-2}$.
Insgesamt haben wir

$$x \leqslant 4+\sqrt{x-2} \iff x \in [2,6].$$

Aufgabe 5

a)

$$\sum_{j=3}^{5}\frac{j+1}{j-2} = \frac{3+1}{3-2}+\frac{4+1}{4-2}+\frac{5+1}{5-2} = 4+\frac{5}{2}+2 = \frac{17}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{111} 5 = \underbrace{5+5+\ldots+5}_{\text{111-mal}} = 111\cdot 5 = 555$$

$$\begin{aligned}\sum_{l=-2}^{4}(l+1)^2 &= (-2+1)^2+(-1+1)^2+(0+1)^2+(1+1)^2+(2+1)^2+(3+1)^2+(4+1)^2\\ &= 1+0+1+4+9+16+25 = 56\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{3}\sum_{n=m}^{3} n(n+m) &= \sum_{n=0}^{3} n(n+0)+\sum_{n=1}^{3} n(n+1)+\sum_{n=2}^{3} n(n+2)+\sum_{n=3}^{3} n(n+3)\\ &= (0+1+4+9)+(2+6+12)+(8+15)+18 = 75\end{aligned}$$

b)

$$2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \sum_{j=2}^{5} j^3$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \sum_{k=3}^{6} \frac{1}{k}$$

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{100}{99 \cdot 101} = \sum_{n=2}^{100} \frac{n}{(n-1)(n+1)} = \sum_{j=1}^{99} \frac{j+1}{j(j+2)} = \sum_{j=3}^{101} \frac{j-1}{(j-2)j}$$

c) Alle Summen sind gleich, denn jede ergibt $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Dies lässt sich mit Hilfe von Indexverschiebungen einsehen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1} \overset{j:=l+2}{=} \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1} = a_1 + \sum_{j=3}^{n+1} a_{j-1} \overset{k:=n+1-j}{=} a_1 + \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-k}\,.$$

Aufgabe 6

a) Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) =$$

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_n) =$$

$$a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + - \cdots + a_{n-2} - a_{n-1} + a_{n-1} - a_n =$$

$$a_0 + (-a_1 + a_1) + (-a_2 + a_2) + \cdots + (-a_{n-1} + a_{n-1}) - a_n =$$

$$a_0 + 0 + 0 + \cdots + 0 - a_n = a_0 - a_n.$$

Bemerkung: Alternativ kann man obige Rechnung auch etwas formaler so formulieren:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \Big(a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\Big) - \Big(\sum_{k=0}^{n-2} a_{k+1} + a_n\Big) =$$

$$a_0 + \Big(\sum_{j=0}^{n-2} a_{j+1} - \sum_{k=0}^{n-2} a_{k+1}\Big) - a_n = a_0 + 0 - a_n = a_0 - a_n,$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Indexverschiebung $j \leftrightsquigarrow k-1$ benutzt haben.

b) Wegen $q \neq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1-q)\sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 - q^n$$

und die umgeformte Aussage sehen wir folgt ein:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} (q^k - q^{k+1}) \overset{\text{a)}}{=} q^0 - q^n = 1 - q^n.$$

Bemerkung: Die behauptete Identität kann man auch durch vollständige Induktion[1] beweisen:

IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=0}^{1-1} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. (IV)

[1] wird demnächst in der Vorlesung erklärt

Für jedes $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ergibt sich damit

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \cdot \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^n+q^n-q^n\cdot q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Aufgabe 7

Wir setzen

$$A := \{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$B := \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$C := \left\{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x \leqslant 42\right\},$$

$$D := \left\{\frac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\right\} \text{ und}$$

$$E := f([0,1]).$$

a) 1.) Es gilt $\min A = \frac{7}{4}$:
Wir formen zunächst den definierenden Term mittels quadratischer Ergänzung um: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

Daraus lesen wir einerseits ab, dass $x_0^2 - x_0 + 2 = \frac{7}{4}$ gilt; also liegt $\frac{7}{4}$ in A. Andererseits sehen wir $x^2 - x + 2 \geq \frac{7}{4}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein. Also ist $\frac{7}{4}$ das kleinste Element von A.

2.) Aus 1.) folgt direkt $\inf A = \min A = \frac{7}{4}$.

3.) Maximum und Supremum von A exisitieren nicht:
Dazu zeigen wir, daß A nach oben unbeschränkt ist: Sei $k \in \mathbb{R}$. Wir setzen $x := \max\{k, 2\}$. Dann gilt $x^2 - x + 2 = x\underbrace{(x-1)}_{\geq 1} + 2 \geq x + 2 > x \geq k$, daraus folgt die Behauptung.

b) 1.) Es gilt $\max B = \frac{3}{2}$:
Offenbar gilt $\frac{3}{2} = (-1)^2 + \frac{1}{2} \in B$. Sei nun $m \in B$. Es bleibt $m \leq \frac{3}{2}$ zu zeigen: Nach Definition gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $m = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Wir machen folgende Falluntersicheidung:
Falls n ungerade: Dann gilt $m = (-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n} \leq -1 + 1 = 0 \leq \frac{3}{2}$.
Falls n gerade: Dann ist insbesondere $n \geq 2$ und es folgt $m = (-1)^n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
In jedem Fall folgt $m \leq \frac{3}{2}$, also ist $\frac{3}{2}$ das größtes Element von B.

2.) Aus 1.) folgt direkt $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$.

3.) Es gilt $\inf B = -1$:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant (-1)^n \geqslant -1$, also ist -1 eine untere Schranke von B.
Es bleibt zu zeigen, dass -1 die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke K gibt, etwa $K = -1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade n gilt, folgt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$

$$-1 + \varepsilon \leqslant -1 + \frac{1}{n} \iff \varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \iff n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt $-1 = \inf B$.

4.) Es gilt $-1 \notin B$:
Angenommen, $-1 \in B$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 \Longleftrightarrow (-1)^n + 1 = -\frac{1}{n}$. Da auf der linken Seite eine ganze Zahl steht, muss auf der rechten Seite ebenfalls eine solche stehen, so dass $n = 1$ folgt. Jedoch ist die Gleichung $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1$ für $n = 1$ nicht erfüllt. Widerspruch!

5.) Aus 3.) und 4.) folgt direkt: B hat kein Minimum.

c) 1.) Supremum und Maximum von C existieren nicht:
Dazu zeigen wir durch Widerspruchsbeweis, dass C ist nicht nach oben beschränkt ist: Angenommen, Γ ist eine obere Schranke von C, dann gilt $x+\frac{1}{x} \leqslant \Gamma$ für alle $x \in (0, 42]$. Insbesondere können wir dann $x = \frac{1}{n} \in (0, 42]$ einsetzen und erhalten $\frac{1}{n} + n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht gilt dann $n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist.

2.) Es gilt $\min C = 2$:
Es gilt $2 \in C$ (man setze $x = 1$). Außerdem erhalten wir für jedes $x > 0$ durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 1 \geqslant 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 \geqslant 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Also ist 2 das kleinste Element von C.

3.) Aus 2.) folgt direkt $\inf C = \min C = 2$.

d) 1.) Es gilt $\min D = 0$:
Es gilt $0 \in D$ (man setze $x = 0$).Außerdem gilt offenbar $x^2(1 + x^2)^{-1} \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist 0 das kleinste Element von D.

2.) Aus 1.) folgt direkt $\inf D = \min D = 0$.

3.) Es gilt $\sup D = 1$:
Die Menge D ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \leqslant 1 + x^2.$$

Die letzte Ungleichung ist natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Es bleibt zu zeigen, dass 1 die kleinste obere Schranke ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von D ist. Wir müssen also ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit $\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma$. Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1 + x^2), \quad \text{also} \quad (1 - \Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d. h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1 - \Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für ein hinreichend großes x (etwa für $x = \sqrt{\frac{\Gamma}{1-\Gamma} + 1}$) offenbar erfüllt. Daraus folgt die Behauptung.

4.) Es gilt $1 \notin D$:
Angenommen, $1 \in D$. Dann gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $1 = \frac{x^2}{1+x^2}$. Daraus folgt $x^2 + 1 = x^2$ und daraus der Widerspruch $1 = 0$.

5.) Aus 3.) und 4.) folgt direkt: D hat kein Maximum.

e) 1.) Es gilt $\min E = 0$:
Es ist $0 = f(0) \in E$. Außerdem gilt offenbar $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Also ist 0 das kleinste Element von E.

2.) Aus 1.) folgt direkt $\inf E = \min E = 0$.

3.) $\sup E$ und $\max E$ existieren nicht:
Dazu zeigen wir durch Widerspruchsbeweis, dass E ist nicht nach oben beschränkt ist: Angenommen, E ist nach oben beschränkt. Dann gibt es eine obere Schranke $\Gamma \in (1, \infty)$ mit $y \leqslant \Gamma$ für alle $y \in E$, d. h. für alle $x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ gilt $\frac{1}{x} \leqslant \Gamma \Longleftrightarrow \frac{1}{\Gamma} \leqslant x$ $(*)$.

Laut Vorlesung liegt zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen immer eine irrationale Zahl, d. h. für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $a < \xi < b$. Insbesondere gibt es eine irrationale Zahl $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $0 < \xi < 1/\Gamma$. Wegen $1/\Gamma < 1$ haben wir ein $\xi \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ gefunden mit $\xi < \frac{1}{\Gamma}$. Dies steht im Widerspruch zu $(*)$. Somit ist die getroffene Annahme falsch und E tatsächlich nicht nach oben beschränkt.

Aufgabe 8

Es gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha \text{ ist untere Schranke von } M \quad &\iff \quad x \geqslant \alpha \;\text{ für alle } x \in M \quad \iff \quad -x \leqslant -\alpha \;\text{ für alle } x \in M \\ &\iff \quad -\alpha \text{ ist obere Schranke von } -M. \end{aligned}$$

Sei nun M nach unten beschränkt und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von M. Laut Vorbemerkung ist dann $-\alpha$ eine obere Schranke von $-M$. Außerdem ist $-M$ nichtleer, weil M nichtleer ist. Damit existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom das Supremum $\sup(-M) =: \Gamma$. Gemäß Vorbemerkung ist $-\Gamma$ eine untere Schranke von M. Um $-\Gamma = \inf M$ zu zeigen, müssen wir noch begründen, dass $-\Gamma$ die größte untere Schranke von M ist, d. h. dass für jede untere Schranke s von M gilt: $-\Gamma \geqslant s$. Sei dazu s eine untere Schranke von M. Dann ist $-s$ eine eine obere Schranke von $-M$. Wegen $\Gamma = \sup(-M)$ gilt $\Gamma \leqslant -s$. Hieraus folgt $-\Gamma \geqslant s$. Also ist $-\Gamma$ die größte untere Schranke von M und $-\Gamma = \inf M$ ist bewiesen.

Aufgabe 9

a) Da $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ beschränkt sind, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir sollen nun zeigen, dass $A + B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A + B) = \alpha + \beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A + B$ ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.

Wählen wir ein beliebiges $x \in A + B$, so gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a + b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \leqslant \alpha$ und $b \leqslant \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \leqslant \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass $\sup(A + B) \leqslant \alpha + \beta$ ist, d. h. $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke.

Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl $< \alpha + \beta$ ist obere Schranke, d. h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ existiert ein $x \in A + B$ mit $x > \Gamma$.

Sei also $\Gamma < \alpha + \beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und, da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma - b$. Daher existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d. h. es ist $a + b > \Gamma$, und wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A + B$ sein.

Nun zum Infimum: Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A + B$ nach unten beschränkt ist. Da $\inf M = -\sup(-M)$ für beschränkte nichtleere $M \subset \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \inf(A + B) &= -\sup\big(-(A + B)\big) = -\sup\big((-A) + (-B)\big) = -\big(\sup(-A) + \sup(-B)\big) \\ &= -\big(-\inf A + (-\inf B)\big) = \inf A + \inf B. \end{aligned}$$

b) „$\Longrightarrow$“:
Nach Voraussetzung in Kombination mit dem Vollständigkeitsaxiom existiert $\Gamma := \sup C \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $c \leq \Gamma$ für alle $c \in C$. Wegen $\emptyset \neq C \subset (0, \infty)$ folgt $\Gamma > 0$. Sei $x \in {}^1\!/_C$. Es gibt also $c \in C$ mit $x = 1/c$. Insbesondere folgt $x \geq 1/\Gamma$. Also ist $1/\Gamma$ untere Schranke von ${}^1\!/_C$ und nach Definition folgt $\inf({}^1\!/_C) \geq 1/\Gamma > 0$.

„$\Longleftarrow$“:
Nach Voraussetzung ist $\gamma := \inf(1/C) > 0$. Sei $c \in C$. Dann ist $1/c \in 1/C$ und insbesondere $\gamma \leq 1/c$. Es folgt $1/\gamma \geq c$. Also ist $1/\gamma$ obere Schranke von C, also ist C nach oben beschränkt. außerdem ist C per Definition durch 0 nach unten beschränkt. Also ist C beschränkt.

Es bleibt noch $\sup C = \frac{1}{\inf(1/C)}$ unter der Voraussetzung $\inf(1/C) > 0$ zu zeigen:
Wir haben bei der Beweisrichtung „$\Longrightarrow$“ gesehen, dass $\frac{1}{\sup C}$ untere Schranke von $1/C$ ist. Aus der Definition von $\inf(1/C)$ folgt daraus $\inf(1/C) \geq \frac{1}{\sup C}$. Also gilt $\frac{1}{\inf(1/C)} \leq \sup C$. Andererseits haben bei der Beweisrichtung „$\Longleftarrow$“ gesehen, dass $\frac{1}{\inf(1/C)}$ obere Schranke von C ist. Aus der Definition von $\sup C$ folgt daraus $\sup C \leq \frac{1}{\inf(1/C)}$. Aus beidem zusammen folgt schließlich $\sup C = \frac{1}{\inf(1/C)}$.

c) Es gilt $1/\left(1/C\right) = C$, denn es gilt

$$x \in 1/\left(1/C\right) \Longleftrightarrow 1/x \in 1/C \Longleftrightarrow 1/(1/x) \in C \Longleftrightarrow x \in C.$$

Außerdem gilt nach Voraussetzung $\emptyset \neq 1/C \subset (0, \infty)$. Wenden wir b) auf die Menge $1/C$ an, so erhalten wir die Aussage c).

Aufgabe 10

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Wegen $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ ist $f(0) = 0$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ folgt aus $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$

$$f(-x) = -f(x). \tag{1}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt nach $(n-1)$-maliger Verwendung der Voraussetzung

$$f(nx) = f(\underbrace{x + \ldots + x}_{n\text{-mal}}) = f(\underbrace{x + \ldots + x}_{(n-1)\text{-mal}}) + f(x) = \ldots = \underbrace{f(x) + \ldots + f(x)}_{n\text{-mal}} = nf(x). \tag{2}$$

Hieraus folgt mit (1)

$$f(px) = pf(x) \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

[Für $p \in \mathbb{N}$ siehe (2). Im Fall $p = 0$ ergibt sich $f(0 \cdot x) = f(0) = 0 = 0 \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Im Fall $p \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$ ist $-p \in \mathbb{N}$. Deshalb liefert (2) für jedes $x \in \mathbb{R}$: $f(-px) = -pf(x)$. Da $f(-px) = -f(px)$ laut (1) gilt, folgt $f(px) = pf(x)$.]

b) Für beliebige $q \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ schließen wir

$$f(x) = f(q\,\tfrac{1}{q}x) \overset{(2)}{=} q\,f(\tfrac{1}{q}x) \quad\Longleftrightarrow\quad f(\tfrac{1}{q}x) = \tfrac{1}{q}\,f(x). \tag{4}$$

Sei nun $r \in \mathbb{Q}$. Dann existieren $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $r = \frac{p}{q}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$f(rx) = f(\tfrac{p}{q}x) \overset{(3)}{=} pf(\tfrac{1}{q}x) \overset{(4)}{=} \tfrac{p}{q}f(x) = rf(x). \tag{5}$$

Aufgabe 11 (P)

Seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Ist $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = 0$, so ist die Ungleichung klar. Sei also $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 > 0$. Dann folgt mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) a_k + \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) b_k \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right).
\end{aligned}$$

Dividieren durch $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2}$ (> 0) liefert die behauptete Ungleichung.

Aufgabe 12 (P)

Sei $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m,n) := 2^{m-1}(2n-1)$.

Beh.: f ist injektiv. Hierzu müssen wir einsehen: Für alle $(m,n), (m',n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt

$$f(m,n) = f(m',n') \quad \Rightarrow \quad (m,n) = (m',n').$$

Seien dazu $(m,n), (m',n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $f(m,n) = f(m',n')$, d. h.

$$2^{m-1}(2n-1) = 2^{m'-1}(2n'-1). \tag{6}$$

Nun ist $(m,n) = (m',n')$, also $m = m'$ und $n = n'$, zu zeigen. Es gilt

$$2^{m-m'}(2n-1) = 2^{-m'+1}\, 2^{m-1}(2n-1) \overset{(7)}{=} 2^{-m'+1} 2^{m'-1}(2n'-1) = 2n'-1.$$

Da $2n'-1$ ungerade ist, muss auch $2^{m-m'}(2n-1)$ ungerade sein. Dies ist nur für $2^{m-m'} = 1$ bzw. $m = m'$ möglich. Setzen wir das in (7) ein, so folgt

$$2^{m-1}(2n-1) = 2^{m-1}(2n'-1) \quad \Longleftrightarrow \quad 2n-1 = 2n'-1 \quad \Longleftrightarrow \quad n = n'.$$

Insgesamt haben wir $(m,n) = (m',n')$. Hiermit ist die Injektivität von f gezeigt.

Beh.: f ist surjektiv, d. h. $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Wir müssen begründen, dass es zu jedem $x \in \mathbb{N}$ ein $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt mit $x = f(m,n)$.
Sei $x \in \mathbb{N}$. Wir zeigen zunächst, dass $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $u \in \mathbb{N}$ ungerade existieren mit $x = 2^k u$. Dazu betrachten wir $Z := \{y \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid 2^y \text{ teilt } x\}$. Wegen $0 \in Z$ ist $Z \neq \emptyset$. Außerdem gilt $Z \subset \{0, 1, \dots, x\}$, weil $2^y > x$ für alle $y \in \mathbb{N}$ mit $y > x$ ist. Somit ist Z eine endliche, nichtleere Menge. Daher existiert $\max Z =: k$. Insbesondere teilt 2^k die Zahl x, d. h. es gibt ein $u \in \mathbb{N}$ mit $x = 2^k u$. Wäre u gerade, so existiert $v \in \mathbb{N}$ mit $u = 2v$. Dann ist $x = 2^k u = 2^{k+1} v$. Folglich teilt 2^{k+1} die Zahl x, so dass auch $k+1$ in Z liegt, was aber der Maximalität von k widerspricht. Also ist u ungerade. Wir haben

$$x = 2^k u = 2^{k+1-1}(2\frac{u+1}{2} - 1).$$

Setze $m := k+1 \in \mathbb{N}$ und $n := \frac{u+1}{2} \in \mathbb{N}$ (da u ungerade), dann gilt $x = 2^{m-1}(2n-1) = f(m,n)$. Hiermit ist die Surjektivität von f bewiesen.

Bemerkung: Eine Menge A wird als *abzählbar unendlich* bezeichnet, wenn sie die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Dies bedeutet, dass eine Bijektion zwischen A und $\mathbb{N}$ existiert, die Menge A also „durchnummeriert“ werden kann. Wie oben gesehen, gibt es eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, daher ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich.