

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
 Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$h(x) := \frac{x}{1 + |x|}.$$

- a) Untersuchen Sie h auf Monotonie und Beschränktheit. Ist h injektiv? Berechnen Sie den Bildbereich von h .
- b) Geben Sie eine Abbildung an, die $\mathbb{R}$ auf $(0, 1)$ bijektiv abbildet.

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

- a) $\sum_{k=0}^n (2k+1);$ b) $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n j \cdot (n-k);$
- c) $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1} \quad (n \geq 2);$ d) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad (n \geq 2).$

Hinweis zu c): $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$ für jedes $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ („Partialbruchzerlegung“).

Hinweis zu d): $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2}.$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- a) $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1;$ b) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k};$
- c) $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2};$ d) $6^n - 5n + 4$ ist durch 5 teilbar;
- e) $n \geq 5 \Rightarrow 2^n > n^2;$ f) $n \geq 2 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}.$

Aufgabe 4

- a) Zeigen Sie den *binomischen Lehrsatz*: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

- b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$\text{i) } \sum_{j=0}^{16} \binom{16}{j} (-1)^j 3^{j+1}; \quad \text{ii) } \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}; \quad \text{iii) } \sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 5

Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die aus der Vorlesung bekannte Identität $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$, indem Sie

- einerseits den Wert der Teleskopsumme $\sum_{k=1}^n (k^2 - (k-1)^2)$ berechnen und
- andererseits $\sum_{k=1}^n (k^2 - (k-1)^2)$ nach $\sum_{k=1}^n k$ auflösen.

Ermitteln Sie durch Betrachten einer geeigneten Teleskopsumme eine Formel für $\sum_{k=1}^n k^2$.

Aufgabe 6

Die Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \quad a_2 := \frac{1}{4}, \quad a_n := \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{n^2} \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Finden Sie eine nicht-rekursive Formel für a_n und beweisen Sie diese.

Aufgabe 7

Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von

- a) z^3 ; b) $1/z$; c) $z \cdot w$; d) $\bar{z}^2 + 1/w^2$.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung sind:

- a) $z^2 - 2z + 3 = 0$; b) $z^2 = |z|^2$; c) $z^3 - (3-i)z^2 - iz + 1 + 3i = 0$.

Hinweis: Bei c) gibt es Lösungen der Gleichung auf der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 9¹

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

- a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1+i| = |z-3-3i|\}$; b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \geq 1 \text{ und } |z-1-2i| < 3\}$;
c) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3 \text{ und } \frac{2}{3}\pi < \arg(z) < \frac{4}{3}\pi\}$; d) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) \leq 1\}$.

Aufgabe 10 (P)

- a) Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, dass für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt: $(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2$.
- b) Folgern Sie aus a), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$.
- c) Zeigen Sie: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$.

Hinweis

Die **Klausur zur HM I** findet am Montag, den 28.02.2011, 08.00-10.00 Uhr statt.

Die Anmeldung ist ab Montag, den 15.11.2010, **bis zum Freitag, den 11.02.2011**, über das KIT-Studierendenportal möglich.

¹Diese Aufgabe bezieht sich teilweise auf den Inhalt der Vorlesung vom 15.11.2010.