KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis 18.11.2010
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von

i) $(1+\sqrt{3}\,i)^{42}$; **ii)** $\sum_{k=1}^{22}(1-i)^k$; **iii)** $(1+i)^{2n}+(1-i)^{2n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

b) Bestimmen Sie zu folgenden Gleichungen alle Lösungen in $\mathbb{C}$:

i) $z^6+1=0$; **ii)** $z^5=1-i$; **iii)** $z^7=(1+\sqrt{3}\,i)^{49}$; **iv)** $z^3=-8$.

c) Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie: $|z+w|^2+|z-w|^2=2|z|^2+2|w|^2$.
Was bedeutet dies geometrisch?

Aufgabe 2

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Zeigen Sie anhand der Definition, dass (a_n) gegen eine Zahl a konvergiert.

b) Geben Sie zu $\varepsilon := 10^{-10}$ ein $N \in \mathbb{N}$ an mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie jeweils $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

a) $a_n = \dfrac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3}$; **b)** $a_n = (-1)^n + 1/n$; **c)** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n^2} \dfrac{k}{n^4}$;

d) $a_n = \dfrac{(2\sqrt{n}+3)^2}{(3\sqrt[3]{n}+2)^3}$; **e)** $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$; **f)** $a_n = \dfrac{(1+n)^{42}-n^{42}}{n^{41}}$;

g) $a_n = \dfrac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$; **h)** $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}+\left(\frac{3+4i}{15}\right)^n & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Hinweis zu h): Beachten Sie Aufgabe 6.

Aufgabe 4

Sei $a \in \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind.

(I) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(II) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$ gilt: $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

(III) Zu jedem $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$ gilt: $|a_n - a| < 3t^2$.

Aufgabe 5

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeigen Sie:

a) (z_n) konvergiert genau dann, wenn $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ konvergieren.
In diesem Fall gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + i \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n$.

b) (z_n) konvergiert genau dann, wenn $(\overline{z_n})$ konvergiert. In diesem Fall gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}$.

Aufgabe 6

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeigen Sie:

a) Ist (a_n) konvergent, so konvergiert auch jede Teilfolge von (a_n) und zwar gegen den gleichen Grenzwert.

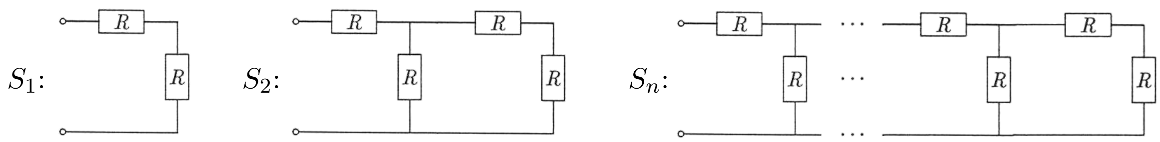
b) Besitzt (a_n) eine divergente Teilfolge, so divergiert (a_n).

c) Es kann sein, dass die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren, (a_n) jedoch nicht.

d) (a_n) konvergiert genau dann, wenn die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}$ gilt. In diesem Fall stimmen diese Grenzwerte mit dem Grenzwert von (a_n) überein.

Aufgabe 7

R sei ein fester Ohmscher Widerstand. Durch Aneinanderhängen von $n \in \mathbb{N}$ Bauelementen entsteht die folgende Schaltung S_n:



a) Leiten Sie eine Rekursionsvorschrift für den Gesamtwiderstand W_n von S_n her.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n := W_n/R$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist.

c) Begründen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert, und berechnen Sie diesen.
Hinweis: Dieser Aufgabenteil bezieht sich teilweise auf den Inhalt der Vorlesung vom 22.11.2010.

Aufgabe 8

Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$: $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.
Hinweis: Versuchen Sie, mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung zu argumentieren.

Aufgabe 9

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 10 (P)

a) Gegeben seien $0 \leqslant q < 1$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ mit $|a_{n+1}-a_n| \leqslant q^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Zeigen Sie, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ eine Cauchy-Folge ist.

b) Durch $a_0 := 0,\ a_1 := 1,\ a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n+a_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$ wird eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ definiert. Folgern Sie aus a), dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ konvergent ist, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis:
Die **Klausur zur HM I** findet am Montag, den 28.02.2011, 08.00-10.00 Uhr statt.
Die Anmeldung ist bis Freitag, den 11.02.2011, über das KIT-Studierendenportal möglich.