

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
 Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
 Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) i) In Polardarstellung läßt sich $1 + \sqrt{3}i$ schreiben als

$$1 + \sqrt{3}i = 2(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)).$$

Mit der Formel von Moivre folgt

$$(1 + \sqrt{3}i)^{42} = 2^{42}(\cos(42 \cdot \pi/3) + i \sin(42 \cdot \pi/3)) = 2^{42}.$$

- ii) Wir bemerken zunächst, daß sich die Aussagen aus Übungsblatt 3 Aufgabe 6 (Teleskopsumme, geometrische Summenformel) samt der zugehörigen Beweise wortwörtlich ins Komplexe übertragen lassen. Es gilt also

- $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ komplexe Zahlen.
- $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Wir verwenden die geometrische Summenformel und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{22} (1-i)^k &= -1 + \sum_{k=0}^{22} (1-i)^k = -1 + \frac{1 - (1-i)^{23}}{1 - (1-i)} = -1 + \frac{1 - (1-i)^{23}}{i} \cdot \frac{-i}{-i} \\ &= -1 - i(1 - (1-i)^{23}). \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $(1-i)^{23}$ benutzen wir die Darstellung

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)) = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) - i \sin(\pi/4))$$

und die Formel von Moivre

$$\begin{aligned} (1-i)^{23} &= \sqrt{2}^{23} (\cos(\pi/4) - i \sin(\pi/4))^{23} = 2^{23/2} (\cos(23 \cdot \pi/4) - i \sin(23 \cdot \pi/4)) \\ &= 2^{23/2} (\cos(24 \cdot \pi/4 - \pi/4) - i \sin(24 \cdot \pi/4 - \pi/4)) \\ &= 2^{23/2} (\cos(3 \cdot 2\pi - \pi/4) - i \sin(3 \cdot 2\pi - \pi/4)) \\ &= 2^{23/2} (\cos(-\pi/4) - i \sin(-\pi/4)) = 2^{23/2} (2^{-1/2} + i2^{-1/2}) = 2^{11}(1+i). \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{22} (1-i)^k = -1 - i(1 - 2^{11}(1+i)) = -1 - 2^{11} + i(2^{11} - 1) = -2049 + 2047i.$$

- iii) Mit $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$ und $1 - i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) - i \sin(\frac{\pi}{4}))$ ergibt sich nach der Formel von Moivre

$$\begin{aligned} (1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} &= 2^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \\ &= 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 2k + 1, \\ (-1)^k 2^{2k+1} & \text{falls } n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

- b) i) Für $z = 0$ ist die gegebene Gleichung sicher nicht erfüllt. Ist $z \neq 0$, so gibt es (eindeutig bestimmte) $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ (Polardarstellung). Nach der Formel von Moivre gilt dann

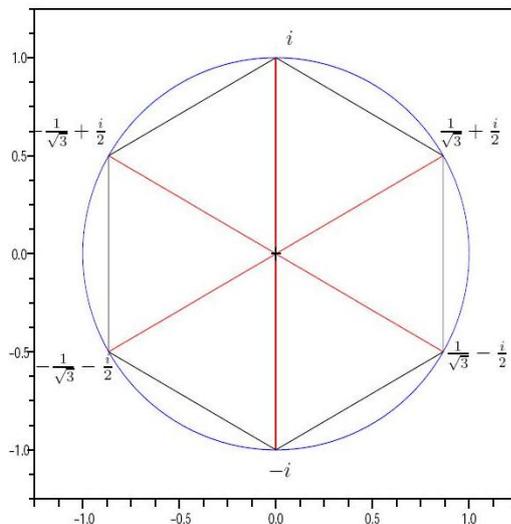
$$z^6 = r^6(\cos(6\varphi) + i \sin(6\varphi)).$$

Dies ist gleich $-1 = 1 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi))$ genau dann, wenn $r^6 = 1$ und $6\varphi = \pi + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt, also genau dann, wenn $r = 1$ und $\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{6}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist. Die Bedingung $\varphi \in [0, 2\pi)$ ist nur für $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$ erfüllt. Somit besitzt die Gleichung $z^6 = -1$ genau die sechs (verschiedenen) Lösungen

$$z_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right) \quad \text{für } k \in \{0, 1, \dots, 5\}.$$

Bemerkung:

All diese Zahlen liegen in der komplexen Zahlenebene auf dem Einheitskreis.



- ii) Zuerst bestimmen wir die Polardarstellung von $1-i$. Wegen $|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ und $\arg(1-i) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ lautet diese $1-i = \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i \sin(\frac{7\pi}{4}))$. Daher gilt $z^5 = 1-i$ genau dann, wenn $|z|^5 = \sqrt{2}$, also $|z| = 2^{\frac{1}{10}}$, und $5 \arg(z) = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Wegen der Forderung $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ erhalten wir genau die 5 Lösungen $z_k \in \mathbb{C}$ mit $|z_k| = 2^{\frac{1}{10}}$ und $\arg(z_k) = \frac{7\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$, also $z_k = 2^{\frac{1}{10}}(\cos(\frac{7\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}) + i \sin(\frac{7\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}))$, für $k \in \{0, 1, \dots, 4\}$.
- iii) Wieder bestimmen wir zuerst die Polardarstellung von $(1 + \sqrt{3}i)^{49}$. Analog zu a.i) erhalten wir

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3}i)^{49} &= 2^{49}(\cos(49 \cdot \pi/3) + i \sin(49 \cdot \pi/3)) = \\ &= 2^{49}(\cos(8 \cdot 2\pi + \pi/3) + i \sin(8 \cdot 2\pi + \pi/3)) = \\ &= 2^{49}(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)). \end{aligned}$$

Daher gilt $z^7 = (1 + \sqrt{3}i)^{49}$ genau dann, wenn $|z|^7 = 2^{49}$, also $|z| = 2^7 = 128$, und $7 \arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Wegen der Forderung $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ erhalten wir genau die 7 Lösungen $z_k \in \mathbb{C}$ mit $|z_k| = 128$ und $\arg(z_k) = \frac{\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}$, also $z_k = 128(\cos(\frac{\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}) + i \sin(\frac{\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}))$, für $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$.

- iv) Man kann die Lösung analog zu i) bis iii) bestimmen. Alternativ ist *manchmal* die Auffassung als Nullstellensuche eines Polynoms etwas kürzer: Es ist

$$z^3 + 8 = (z+2)(z^2 - 2z + 4) = (z+2)((z-1)^2 + 3) = 0 \iff$$

$$z = -2 \text{ oder } (z - 1)^2 = -3 \iff$$

$$z = -2 \text{ oder } z - 1 = \sqrt{3}i \text{ oder } z - 1 = -\sqrt{3}i \iff$$

$$z = -2 \text{ oder } z = 1 + \sqrt{3}i \text{ oder } z = 1 - \sqrt{3}i.$$

c) Mit Hilfe von $\operatorname{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})$ (für $\lambda \in \mathbb{C}$) erhalten wir

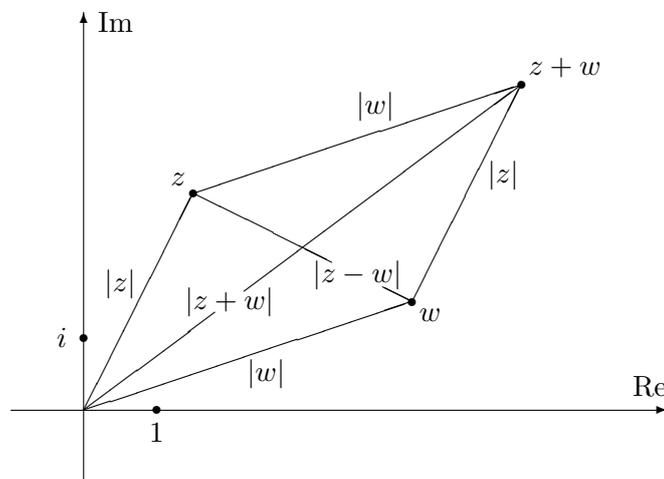
$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \underbrace{w\bar{z}}_{=\bar{\bar{w}}z = \bar{z}\bar{w}} + w\bar{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$|z - w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z(-\bar{w})) + |-w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.$$

Addiert man diese Gleichungen, so folgt $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.

Geometrische Bedeutung: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalenlängen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen.



Aufgabe 2

a) Wegen $a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n}}$ vermuten wir, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 2 konvergiert.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - 2| = \left| \frac{2n - 2(n+1)}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1}.$$

Daher ergibt sich

$$|a_n - 2| < \varepsilon \iff \frac{2}{n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Wie eben gesehen, gilt dann $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Also konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 2.

b) Ist $\varepsilon = 10^{-10}$, so kann man beispielsweise $N = 2 \cdot 10^{10} > 2 \cdot 10^{10} - 1 = \frac{2}{\varepsilon} - 1$ nehmen. Damit gilt $|a_n - 2| < 10^{-10}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2 \cdot 10^{10}$.

Aufgabe 3

a) *Bemerkung:*

Solchen Brüchen läßt sich oft mit dem folgendem Standardtrick (Erweitern mit dem Kehrwert der höchsten auftretenden Potenz) beikommen.

Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3} = \frac{1/n + 3/n^2 - 4/n^3}{1/n^3 + 1/n + 4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0 + 0 - 0}{0 + 0 + 4} = 0.$$

b) Wegen $a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$) und $a_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \rightarrow -1$ ($k \rightarrow \infty$) besitzt die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die zwei verschiedenen Häufungspunkte 1 und -1 . Daher ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent.

c) Mit der bekannten Formel $\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$, $m \in \mathbb{N}$, ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4} = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2n^4} = \frac{1 \cdot (1 + n^{-2})}{2}.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} = 0$ folgt mit den Grenzwertsätzen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 \cdot (1+0)}{2} = \frac{1}{2}$.

d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{(2\sqrt{n} + 3)^2}{(3\sqrt[3]{n} + 2)^3} = \frac{(\sqrt{n}(2 + 3/\sqrt{n}))^2}{(\sqrt[3]{n}(3 + 2/\sqrt[3]{n}))^3} = \frac{n \cdot (2 + 3/\sqrt{n})^2}{n \cdot (3 + 2/\sqrt[3]{n})^3} = \frac{(2 + 3/\sqrt{n})^2}{(3 + 2/\sqrt[3]{n})^3}.$$

Wegen $2 + 3/\sqrt{n} \rightarrow 2$ und $3 + 2/\sqrt[3]{n} \rightarrow 3 \neq 0$ für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach den Grenzwertsätzen gegen $\frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$.

e) *Bemerkung:*

Solchen Differenzen, in denen „ähnlich große“ Wurzelausdrücke auftreten, läßt sich oft mit dem folgendem Standardtrick (Erweitern unter Beachtung der binomischen Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$) beikommen. (Beachte: $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2}$; hier drängt sich der „Trick“ geradezu auf.)

Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n = (\sqrt{n^2 + 1} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}.$$

Wegen $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

f) Der binomische Lehrsatz liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(1 + n)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} n^k = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{42} n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k := \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1 + n)^{42} - n^{42} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{41} n^{41}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{40} n^{40} + \alpha_{41} n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}} + \frac{\alpha_1}{n^{40}} + \dots + \frac{\alpha_{40}}{n} + \alpha_{41} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

- g) Zunächst formen wir den Ausdruck $\frac{1 - (1 - \frac{1}{n})^5}{1 - (1 - \frac{1}{n})}$ mit Hilfe der geometrischen Summenformel (vgl. Aufgabe 6 b) vom 3. Übungsblatt mit $n = 5$ und $q = 1 - \frac{1}{n}$) um und verwenden im Anschluss $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) sowie die Grenzwertsätze

$$\frac{1 - (1 - \frac{1}{n})^5}{1 - (1 - \frac{1}{n})} = \sum_{k=0}^{5-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^4$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 = 5.$$

- h) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4i}{15}\right)^n & \text{falls } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} & \text{falls } n = 2k + 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Es gilt $|\frac{3+4i}{15}| = \frac{1}{15}|3+4i| = \frac{1}{15}\sqrt{3^2+4^2} = \frac{1}{3}$ und $|\left(\frac{3+4i}{15}\right)^n| = |\frac{3+4i}{15}|^n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ folgt $\left(\frac{3+4i}{15}\right)^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, so dass sich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4i}{15}\right)^n = \frac{1}{2}$ ergibt. Nach Aufgabe 6 a) ist dann auch $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4i}{15}\right)^{2k} = \frac{1}{2}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} &= \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{n + \sqrt{n} - n}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(1 + 1/\sqrt{n})} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1 + 1/\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\sqrt{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Aufgrund von $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/\sqrt{n} = 0$ folgt nach den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Nach Aufgabe 6 a) ist damit auch $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{2k+1} + \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+1} = \frac{1}{2}$.

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt somit die beiden konvergenten Teilfolgen $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$. Ferner gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \frac{1}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1}$. Daher liefert Aufgabe 6 d), dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

Aufgabe 4

„(I) \implies (II)“:

Sei $\varepsilon > 0$. Gemäß (I) gibt es ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ so, daß $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \tilde{N}$ gilt. Wir setzen $N := \tilde{N} + 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann $n > \tilde{N}$ gleichbedeutend mit $n \geq N$. Insbesondere erhalten wir $|a_n - a| < \varepsilon \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

„(II) \implies (III)“:

Sei $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot 3t^2 > 0$. Gemäß (II) gibt es zu ε also ein $N \in \mathbb{N}$ so, daß $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt. Daraus folgt $|a_n - a| \leq \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 3t^2 < 3t^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

„(III) \implies (I)“:

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $t := \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Gemäß (III) gibt es zu t also ein $N \in \mathbb{N}$ so, daß $|a_n - a| < 3t^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt. Daraus folgt $|a_n - a| < 3t^2 = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Also gilt erst recht $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$.

Aufgabe 5

a) Es gilt

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \iff$$

$$x_n + iy_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x + iy \quad (\text{mit } x_n = \operatorname{Re} z_n, y_n = \operatorname{Im} z_n, x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z) \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} |x_n + iy_n - (x + iy)| < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 < \varepsilon^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N \stackrel{(*)}{\iff}$$

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \exists N \in \mathbb{N} (x_n - x)^2 < \tilde{\varepsilon}^2 \text{ und } (y_n - y)^2 < \tilde{\varepsilon}^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N \iff$$

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \exists N \in \mathbb{N} |x_n - x| < \tilde{\varepsilon} \text{ und } |y_n - y| < \tilde{\varepsilon} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N \iff$$

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \text{ und } y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y.$$

Die Äquivalenz bei (*) sieht man so ein: Bei „ \implies “ wählen wir (zu vorgegebenem $\tilde{\varepsilon} > 0$) $\varepsilon := \tilde{\varepsilon}$; bei „ \impliedby “ wählen wir (zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$) $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon/\sqrt{2}$.

b) Das folgt aus $|\bar{z}| = |z|$. Genauer: Es gilt

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \iff$$

$$x_n + iy_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x + iy \quad (\text{mit } x_n = \operatorname{Re} z_n, y_n = \operatorname{Im} z_n, x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z) \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} |x_n + iy_n - (x + iy)| < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} |x_n - iy_n - (x - iy)| < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N \iff$$

$$x_n - iy_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x - iy \iff$$

$$\bar{z}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{z}.$$

Bemerkung: Alternativ kann man die Aussage auch unter Verwendung von a) lösen: Es gilt

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \stackrel{\text{a)}}{\iff}$$

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \text{ und } y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \quad (\text{mit } x_n = \operatorname{Re} z_n, y_n = \operatorname{Im} z_n, x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z) \iff$$

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \text{ und } -y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -y \stackrel{\text{a)}}{\iff}$$

$$\bar{z}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{z}.$$

Aufgabe 6

a) Wir erinnern uns zunächst an die Definition einer Teilfolge: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{N} mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Ist $b_k := a_{n_k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gesetzt, dann heißt $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a$ und $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ gilt.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen $n_1 < n_2 < \dots$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $n_K \geq N$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq K$ ist dann $n_k \geq n_K \geq N$. Deshalb gilt $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq K$, d. h. $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a .

b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitze eine divergente Teilfolge. Zu zeigen ist, dass dann $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent ist. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Annahme: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Dann konvergiert laut a) jede Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine divergente Teilfolge besitzt. Also ist die Annahme falsch und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent.

- c) Diese Situation liegt bei folgendem Beispiel vor: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n := (-1)^n$. Dann sind $a_{2k} = 1$ und $a_{2k+1} = -1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Daher konvergieren die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ für $k \rightarrow \infty$. Jedoch ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent, weil $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die zwei verschiedenen Häufungspunkte -1 und 1 besitzt.
- d) “ \implies ”: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere, etwa gegen a . Gemäß a) konvergiert dann auch jede Teilfolge von (a_n) gegen den selben Grenzwert. Insbesondere trifft dies auf die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ zu.

“ \impliedby ”: Nun seien die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent und es gelte $a := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1}$. Wir zeigen nun, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen $a_{2k} \rightarrow a$ für $k \rightarrow \infty$ gibt es ein $K_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2k} - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq K_1,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für alle geraden } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geq 2K_1$$

folgt. Wegen $a_{2k+1} \rightarrow a$ für $k \rightarrow \infty$ gibt es ein $K_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2k+1} - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq K_2,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für alle ungeraden } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geq 2K_2 + 1$$

folgt. Demnach gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \max\{2K_1, 2K_2 + 1\}$

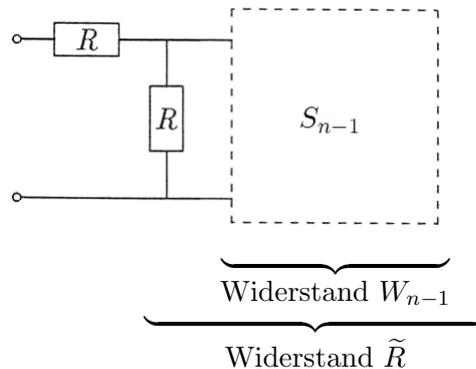
$$|a_m - a| < \varepsilon,$$

d. h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen a .

Aufgabe 7

- a) Da in S_1 zwei Widerstände R in Reihe geschaltet sind, ist $W_1 = 2R$.

Für $n \geq 2$ sieht die Schaltung S_n folgendermaßen aus:



Da die Widerstände R und W_{n-1} parallel geschaltet sind, gilt

$$\frac{1}{\tilde{R}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{W_{n-1}} \quad \iff \quad \tilde{R} = \frac{RW_{n-1}}{R + W_{n-1}}.$$

R und \tilde{R} sind in Reihe geschaltet, daher ergibt sich für den Gesamtwiderstand von S_n

$$W_n = R + \tilde{R} = R + \frac{RW_{n-1}}{R + W_{n-1}}.$$

Zusammen haben wir

$$W_1 = 2R, \quad W_n = R + \frac{RW_{n-1}}{R + W_{n-1}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := W_n/R$ ist gegeben durch

$$a_1 = 2, \quad a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

IA: Wegen $a_1 = 2$ ist $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \leq a_n \leq 2$ für $n = 1$ erfüllt. Dabei beachte man, dass aus $\sqrt{5} \leq 3$ die Gültigkeit der Ungleichung $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$ folgt.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \leq a_n \leq 2$ (IV). Dann folgt einerseits

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \frac{a_n}{1 + a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} \stackrel{\text{IV}}{\geq} 1 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} + 1} = 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \\ &= 1 + \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{9 - 5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{aligned}$$

und andererseits

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1 + a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} \stackrel{\text{IV}}{\leq} 1 + \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \leq 2.$$

Außerdem ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 1 + \frac{a_n}{1 + a_n} - a_n = \frac{1 + a_n + a_n - a_n(1 + a_n)}{1 + a_n} = \frac{-a_n^2 + a_n + 1}{1 + a_n} \\ &= -\frac{(a_n - \frac{1 + \sqrt{5}}{2})(a_n - \frac{1 - \sqrt{5}}{2})}{1 + a_n} \leq 0, \quad \text{da } a_n \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist als beschränkte und monoton fallende Folge konvergent. Aus

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1 + a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

folgt für den Grenzwert $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ nach den Grenzwertsätzen (Man beachte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$)

$$a = 1 + \frac{a}{1 + a} \iff -a^2 + a + 1 = 0 \iff a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ oder } a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Wegen $a_n \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ muss auch $a \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ gelten. Deshalb ist $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 8

Definiere $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$. Zu zeigen ist $a_n \leq a_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \\ &\iff \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \leq \frac{n+2}{n+1} \iff \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \geq \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt: Die Bernoullische Ungleichung liefert nämlich

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2},$$

und wegen $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n^2 + 2n = n(n+2)$ folgt

$$\geq 1 - \frac{n}{n(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Sei $b_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Zu zeigen ist $b_n \geq b_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir formen die Aussage $b_n \geq b_{n+1}$ äquivalent um:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} &\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \\ &\iff \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq \frac{n+2}{n+1} \iff \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq \frac{n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

Um die letzte Ungleichung zu zeigen, verwenden wir wieder die Bernoullische Ungleichung und $(n+1)^2 \geq n(n+2)$:

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n(n+2)} \geq 1 + \frac{n+1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Aufgabe 9

a) Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dann ist (a_n) beschränkt und (b_n) konvergent. Jedoch konvergiert die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n = (-1)^n$ nicht.

b) Nun seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Behauptet wird, dass die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ gegen 0 konvergiert.

Da (a_n) beschränkt ist, existiert eine Konstante $K > 0$ so, dass $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Deshalb ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq K|b_n|.$$

Wegen $b_n \rightarrow 0$ konvergiert auch $K|b_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Daher folgt $c_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 10 (P)

a) Gegeben seien $0 \leq q < 1$ und eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ mit $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n$ für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Beh.: $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Wir zeigen zunächst: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.

Für beliebige $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+k} - a_n &= a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{l=0}^{k-2} a_{n+l+1}\right) - a_n \\ &\stackrel{j:=l+1}{=} a_{n+k} + \left(\sum_{j=0}^{k-2} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{n+j}\right) - a_n \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j+1}\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} (a_{n+j+1} - a_{n+j}). \end{aligned} \quad (1)$$

Hieraus ergibt sich unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der geometrischen Summenformel

$$|a_{n+k} - a_n| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |a_{n+j+1} - a_{n+j}| \leq \sum_{j=0}^{k-1} q^{n+j} = q^n \sum_{j=0}^{k-1} q^j = q^n \frac{1-q^k}{1-q} \leq q^n \frac{1}{1-q}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $0 \leq q < 1$ konvergiert die Folge $(\frac{q^n}{1-q})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0, daher finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|\frac{q^n}{1-q} - 0| = \frac{q^n}{1-q} < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt. Demzufolge ist

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N \text{ und } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2)$$

Hieraus folgt

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m, n \geq N.$$

Denn: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$ beliebig. Ohne Einschränkung sei $m \geq n$. Dann ist $k := m - n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und nach (2) ergibt sich $|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.

b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Wir berechnen die ersten Folgenglieder

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_0) = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = \frac{3}{4}, \quad a_4 = \frac{5}{8}, \quad a_5 = \frac{11}{16}$$

und bilden die Differenz von je zwei Folgengliedern

$$a_1 - a_0 = 1, \quad a_2 - a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 - a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_4 - a_3 = -\frac{1}{8}, \quad a_5 - a_4 = \frac{1}{16}.$$

Wir vermuten $a_{n+1} - a_n = (-\frac{1}{2})^n$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dies bestätigen wir per Induktion:

IA: $n = 0$. Dies haben wir eben gesehen.

IS: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für dieses n gelte $a_{n+1} - a_n = (-\frac{1}{2})^n$. Dann folgt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \stackrel{\text{IV}}{=} -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n = (-\frac{1}{2})^{n+1}.$$

Somit sind die Voraussetzungen aus a) (z. B. mit $q = \frac{1}{2}$) erfüllt. Danach ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} , das Cauchysche Konvergenzkriterium liefert ihre Konvergenz. Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Bilden wir in der Rekursionsformel von (a_n) den Limes $n \rightarrow \infty$, so erhalten wir unter Beachtung von $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = a$

$$a = \frac{1}{2}(a + a) \quad \Longleftrightarrow \quad a = a.$$

Hieraus können wir keine Informationen über den Grenzwert a gewinnen.

Zur Bestimmung von a betrachten wir (1) mit $n = 0$, setzen dann $a_{j+1} - a_j = (-\frac{1}{2})^j$ ein und verwenden im Anschluss die geometrische Summenformel

$$a_k \stackrel{a_0=0}{=} a_k - a_0 = \sum_{j=0}^{k-1} (a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{k-1} (-\frac{1}{2})^j = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^k}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^k).$$

Wegen $(-\frac{1}{2})^k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \frac{2}{3}$.