

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie jeweils $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

- a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$; b) $a_n = \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} \quad (a > 0 \text{ fest});$
c) $a_n = \sqrt[3n]{n+5}$; d) $a_n = \sqrt[n]{n^p} \quad (p \in \mathbb{N} \text{ fest});$
e) $a_n = n^3 \left(\sqrt[3]{n^6 + 6n} - \sqrt[3]{n^6 + 6} \right)$; f) $a_n = n^4 \left(\sqrt[10]{1 + 3n^{-4} + n^{-9}} - 1 \right).$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden:

- (i) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$, so gilt auch $\sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{a}$ für $n \rightarrow \infty$.
(ii) Für alle $u, v \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt: $u^k - v^k = (u - v) \sum_{j=0}^{k-1} u^{k-1-j} v^j$.

Aufgabe 2*

Untersuchen Sie jeweils $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

- a) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; b) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$;
c) $a_n = \left(1 + \frac{1}{nk}\right)^n \quad (k \in \mathbb{N} \text{ fest});$ d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n \quad (k \in \mathbb{N} \text{ fest}).$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie jeweils $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

- a) $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-2)^{3k-1}}{3^{2k+1}}$; b) $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$; c) $s_n = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+k}.$

Aufgabe 4

Entscheiden Sie jeweils, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so gibt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt:

- a) $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$; b) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$; c) $|a_n a_{n+1}| < \varepsilon.$

Aufgabe 5

Beweisen Sie: Zu jeder reellen Zahl x existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

*Diese Aufgabe bezieht sich teilweise auf den Inhalt der Vorlesung vom 29.11.2010.

Aufgabe 6

Sei $k > 0$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ eine reelle Folge mit $a_{n+1} \leq k a_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zeigen Sie, dass dann $a_n \leq k^n a_0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $e - \frac{1}{n \cdot n!} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e - \frac{1}{(n+1)!}$.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie jeweils alle reelle und uneigentliche Häufungspunkte der (reellen) Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$.

b)
$$a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k - 1 \text{ für ein } k \in \{1, 2, 3, \dots, 1701\} \\ (2^n)!, & n = 3k - 1 \text{ für ein } k \in \{1701, 1702, 1703, \dots, 74656\} \\ \pi, & n = 3k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, \dots, 74656\} \\ 2 + (n+1)/n, & n = 3k - 2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Aufgabe 9

Finden Sie Beispiele für reelle Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

- a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat genau die Zahlen 1 und 13 als Häufungspunkte.
- b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat 0 als einzigen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$, jedoch konvergiert $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht.
- c) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$ und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.
- d) $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2010, aber (d_n) ist weder monoton steigend noch fallend.

Aufgabe 10

Sei $0 < a < 1$. Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_1 := \frac{1}{2}a$, $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a + a_n^2)$ für $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 11 (P)

Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_0 := 1$, $a_{n+1} := \frac{1}{1 + a_n}$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 12 (P)

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$. Zeigen Sie:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $a = 0$ und wählen Sie zu $\varepsilon > 0$ eine geeignete Zerlegung $\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_m) + \frac{1}{n}(a_{m+1} + \dots + a_n)$.

Hinweis:

Die Klausur zur HM I findet am Montag, den 28.02.2011, 08.00-10.00 Uhr statt.

Die Anmeldung ist bis Freitag, den 11.02.2011, über das KIT-Studierendenportal möglich.