KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{2}.$$

Wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$ $(n \to \infty)$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Bemerkung: Analog lässt sich für alle $a, b \geqslant 0$ zeigen: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

b) Sei $a > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$a_n = \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \frac{1 - a^{-2n}}{1 + a^{-2n}} = \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n} + 1}.$$

1. Fall: $a \in (0, 1)$. Aufgrund von $a^2 \in (0, 1)$ ist $a^{2n} = (a^2)^n \to 0$ $(n \to \infty)$, woraus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

folgt.

2. Fall: $a = 1$. Hier ergibt sich $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist.

3. Fall: $a \in (1, \infty)$. Wegen $a^2 > 1$ ist $0 < \frac{1}{a^2} < 1$. Daher gilt $a^{-2n} = (\frac{1}{a^2})^n \to 0$ $(n \to \infty)$ und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - a^{-2n}}{1 + a^{-2n}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Bemerkung: Man kann auch mit Hilfe folgender Darstellungen argumentieren

$$a_n = \frac{a^n + a^{-n} - 2a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = 1 - \frac{2a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = 1 - \frac{2}{a^{2n} + 1}$$

oder

$$a_n = \frac{-a^n - a^{-n} + 2a^n}{a^n + a^{-n}} = -1 + \frac{2a^n}{a^n + a^{-n}} = -1 + \frac{2}{1 + a^{-2n}}.$$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\sqrt[n]{n})^{1/3} = \sqrt[3n]{n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt[3n]{6n} = \sqrt[3n]{6} \cdot \sqrt[3n]{n} = (\sqrt[n]{6})^{1/3} \cdot (\sqrt[n]{n})^{1/3}.$$

Aufgrund von $\sqrt[n]{n} \to 1$ und $\sqrt[n]{6} \to 1$ für $n \to \infty$ folgt mit Hinweis (i)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^{1/3} = 1 \text{ und } \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{6})^{1/3} \cdot (\sqrt[n]{n})^{1/3} = 1.$$

Daraus folgt mit dem Sandwich-Theorem sofort

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

d) Für jedes feste $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}\,)^p = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,)^p = 1^p = 1\,.$$

e) Für $k = 3$ lautet Hinweis (ii)

$$u^3 - v^3 = (u-v)\sum_{k=0}^{3-1} u^{3-1-k}v^k = (u-v)(u^2+uv+v^2) \qquad (u, v \in \mathbb{R}). \qquad (*)$$

Sind $u = \sqrt[3]{n^6+6n}$ und $v = \sqrt[3]{n^6+6}$, so gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= n^3(u-v) \overset{(*)}{=} n^3 \cdot \frac{u^3-v^3}{u^2+uv+v^2} = n^3 \cdot \frac{(n^6+6n)-(n^6+6)}{(n^6+6n)^{2/3}+(n^6+6n)^{1/3}(n^6+6)^{1/3}+(n^6+6)^{2/3}} \\
&= n^3 \cdot \frac{6n-6}{(n^6(1+6/n^5))^{2/3}+(n^6(1+6/n^5))^{1/3}(n^6(1+6/n^6))^{1/3}+(n^6(1+6/n^6))^{2/3}} \\
&= \frac{6n^4-6n^3}{n^4(1+6/n^5)^{2/3}+n^2(1+6/n^5)^{1/3}\,n^2(1+6/n^6)^{1/3}+n^4(1+6/n^6)^{2/3}} \\
&= \frac{6-6/n}{(1+6/n^5)^{2/3}+(1+6/n^5)^{1/3}(1+6/n^6)^{1/3}+(1+6/n^6)^{2/3}} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{6-0}{1^{2/3}+1^{1/3}\cdot 1^{1/3}+1^{2/3}} = 2\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert 2.

f) Wir verwenden Hinweis (ii) für $k = 10$. Wir Setzen $b_n := \sqrt[10]{1+3n^{-4}+n^{-9}}$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = n^4(b_n - 1) = n^4 \cdot \frac{b_n^{10}-1^{10}}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1} = \frac{n^4(3n^{-4}+n^{-9})}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1} = \frac{3+n^{-5}}{b_n^9+b_n^8+\ldots+b_n+1}.$$

Wegen $b_n \to 1$ folgt $a_n \to \frac{3}{10}$ $(n\to\infty)$.

Bemerkung:
Die „geschenkte“ Aussage (i) aus dem Hinweis, die wir bald als *Stetigkeit der Wurzelfunktion* in allgemeinerem Rahmen kennenlernen werden, sieht man so ein: Wir stellen zunächst fest, dass für alle $y > x \geqslant 0$ gilt $\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x} \leqslant \sqrt[k]{y-x}$. Der binomische Lehrsatz liefert nämlich

$$(\sqrt[k]{y-x} + \sqrt[k]{x}\,)^k = (\sqrt[k]{y-x}\,)^k + \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}(\sqrt[k]{y-x}\,)^j(\sqrt[k]{x}\,)^{k-j}}_{\geqslant 0} + (\sqrt[k]{x}\,)^k \geqslant y.$$

Wir erhalten somit $|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| \leqslant \sqrt[k]{|a_n - a|}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $c_n := |a_n - a|$, so gilt $c_n \to 0$ und es reicht, $\sqrt[k]{c_n} \to 0$ zu zeigen. Wegen $c_n \to 0$ finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $c_n < \varepsilon^k$ für alle $n \geqslant N$. Es gilt dann $0 \leqslant \sqrt[k]{c_n} < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$, d. h. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{c_n} = 0$.
Hinweis (ii) kann man leicht, von rechts nach links gelesen, mit vollständiger Induktion überprüfen. Der Induktionsschluß geht dabei so:

$$(u-v)\sum_{j=0}^{k} u^{k-j}v^j = (u-v)\Big(u^0v^k + \sum_{j=0}^{k-1} u^{k-j}v^j\Big) = (u-v)\Big(v^k + u\sum_{j=0}^{k-1} u^{k-1-j}v^j\Big) =$$

$$(u-v)v^k + u(u-v)\sum_{j=0}^{k-1} u^{k-1-j}v^j \overset{\text{I.V.}}{=} (u-v)v^k + u(u^k - v^k) = u^{k+1} - v^{k+1}.$$

Aufgabe 2

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = e \cdot 1$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}.$$

b) Bekanntlich konvergiert $(1+\frac{1}{m})^m$ für $m \to \infty$ streng monoton wachsend gegen e. Insbesondere hat man also die Abschätzung $(1 + \frac{1}{m})^m < e$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und erhält

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} < \sqrt[n]{e} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Offensichtlich gilt zudem $a_n \geqslant 1$, und damit ist die Konvergenz $a_n \to 1$ bewiesen.

c) Aus der Konvergenz von $x_n := (1+\frac{1}{n})^n$ gegen e folgt, dass auch die Teilfolge $(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots)$ gegen diesen Grenzwert konvergiert, dass also $x_{nk} \to e$ für $n \to \infty$ gilt. Somit ergibt sich

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{nk}\right)^n = \sqrt[k]{\left(1 + \frac{1}{nk}\right)^{nk}} = \sqrt[k]{x_{nk}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[k]{e}.$$

d) Auch die Teilfolge $(x_{1+k}, x_{2+k}, \dots)$ von (x_n) konvergiert gegen e, und man erhält

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n = x_{n+k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{-k} \xrightarrow{n\to\infty} e \cdot 1^{-k} = e.$$

Aufgabe 3

a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(-2)^{3k-1}}{3^{2k+1}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{(-2)^{3k}}{3^{2k}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{((-2)^3)^k}{(3^2)^k} = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)^k.$$

Daher ergibt sich mit Hilfe der geometrischen Summenformel für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{3k-1}}{3^{2k+1}} = -\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{8}{9}\right)^k = -\frac{1}{6}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{8}{9}\right)^k - 1\right] = -\frac{1}{6}\left[\frac{1-(-8/9)^{n+1}}{1-(-8/9)} - 1\right].$$

Wegen $|-8/9| < 1$ ist $(-8/9)^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$. Also konvergiert (s_n) gegen

$$\lim_{n\to\infty} s_n = -\frac{1}{6}\left[\frac{1-0}{1-(-8/9)} - 1\right] = -\frac{1}{6}\left[\frac{9}{9+8} - \frac{17}{17}\right] = \frac{4}{51}.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

c) Nach dem binomischen Satz gilt für jedes $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot 1^{m-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \left(1+\frac{1}{2}\right)^{m} = \left(\frac{3}{4}\right)^{m}.$$

Mit Hilfe der geometrischen Summenformel erhalten wir also

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{m} = \frac{1-(\frac{3}{4})^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} = 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

Wegen $|3/4| < 1$ gilt $(3/4)^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$. Wir erhalten somit schließlich

$$s_n = 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 4(1-0) = 4.$$

Aufgabe 4

In allen drei Fällen folgt aus der angegebenen Bedingung im allgememeinen nicht, daß (a_n) konvergiert. Wir geben zur Begründung dazu jeweils eine offensichtlich divergente Folge als Gegenbeispiel an.

i) Wir setzen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt $|a_n + a_{n+1}| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, daher erfüllt (a_n) Bedingung i).

ii) In der Saalübung haben wir gesehen, dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. Die ist per Definition äquivalent zur Voraussetzung ii) bezogen auf die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.
(Die harmonische Reihe wäre ein weiteres Gegenbeispiel.)

iii) Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $|a_n \cdot a_{n+1}| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, daher erfüllt (a_n) Bedingung iii).

Aufgabe 5

Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir konstruieren die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $x < x + \frac{1}{n}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass zwischen diesen beiden reellen Zahlen eine rationale Zahl liegt; es gibt also ein $x_n \in \mathbb{Q}$ mit $x < x_n < x + \frac{1}{n}$.
Wegen $x \leqslant x_n \leqslant x + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} x$ konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

Aufgabe 6

Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion.
I.A.: $(n = 0)$. Offenbar gilt $a_0 \le k^0 a_0$.

I.S.: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für dieses n gelte $a_n \le k^n a_0$ (I.V.). Dann folgt $a_{n+1} \le k a_n \overset{\text{I.V.}}{\le} k \cdot k^n a_0 = k^{n+1} a_0$.

Aufgabe 7

Wir setzen $\sigma_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Nach Definition von e und σ_n gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e - \sigma_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right) \\ &< \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} - 1 \right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{n+1}{n} - 1 \right) = \frac{1}{n \cdot n!}\,; \end{aligned}$$

damit ist die Abschätzung von σ_n nach unten gezeigt. Weiter gilt

$$e - \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} > \frac{1}{(n+1)!}\,,$$

womit auch die Abschätzung nach oben bewiesen ist.

Aufgabe 8

a) Wir bemerken zunächst, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \big(1 + (-1)^n\big)^n = \begin{cases} (1+1)^n = \quad 2^n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ (1-1)^{2k+1} = \ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

gilt. Salopp läßt sich das so ausdrücken:

$$(a_n) = (0, 2^2, 0, 2^4, 0, 2^6, 0, 2^8, 0, \dots) = (0, 4, 0, 16, 0, 64, 0, 256, 0, \dots).$$

Wir untersuchen nun, welche Häufungspunkte die Folge (a_n) hat:

- Uneigentliche Häufungspunkte:
  Die Teilfolge der geraden Indices, also $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (2^{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (4, 16, 64, 256, \dots)$, ist nach oben unbeschränkt. Also ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt, besitzt also den uneigentlichen Häufungspunkt ∞.

  Weiter ist die Folge (a_n) offenbar nach unten durch 0 beschränkt ist, $-\infty$ ist also kein Häufungspunkt von (a_n).
- Häufungspunkte in $\mathbb{R}$: Die Teilfolge der ungeraden Indices, also

  $$(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} = (0)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} = (0, 0, 0, \dots),$$

  konvergiert offenbar gegen den Grenzwert 0, also ist 0 ein Häufungspunkt von (a_n).

  Weitere Häufungspunkte in $\mathbb{R}$ gibt es nicht: Sei $H \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir wählen $\varepsilon := |H| > 0$. Dann liegen in der entsprechenden ε-Umgebung $U_\varepsilon(H)$ nur endlich viele Folgenglieder von (a_n): Wegen $0 \notin U_\varepsilon(H)$ liegen, wenn überhaupt, nur Folgenglieder mit geraden Indices in $U_\varepsilon(H)$. Von diesen sind aber offenbar fast alle größer als $|H| + \varepsilon = 2|H|$ und liegen damit nicht in $U_\varepsilon(H)$. Also ist H kein Häufungspunkt.

Fazit: (a_n) hat genau die Häufungspunkte ∞, 0.

b) In Bezug auf Häufungs-/Grenzwerte können wir offensichtlich eine feste endliche Zahl von Folgengliedern zu Beginn der Folge außer Betracht lassen. Es genügt somit, die Folge (a_n) nur ab dem $(74656\cdot 3-1)+1$-tem Folgenglied zu betrachten. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq (74656\cdot 3-1)+1 = 223968$ gilt offenbar

$$a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n\,, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ \pi\,, & n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\,. \\ 2 + (n+1)/n\,, & n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Damit untersuchen wir die Folge (a_n) nun auf Häufungspunkte:

- Uneigentliche Häufungspunkte:
  Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt offenbar $0 < 1/2^n \leq 1/2$, $1 < (n+1)/n = 1 + 1/n \leq 2$ und damit $\min\{1+0, \pi, 2+1\} \leq a_n \leq \max\{1 + 1/2, \pi, 2+2\}$. Also ist (a_n) nach oben und unten beschränkt. Also sind ∞ und $-\infty$ keine Häufungspunkte von (a_n).

- Häufungspunkte in $\mathbb{R}$:
  Offenbar gilt $a_{3k} = 1 + 1/2^{3k} \to 1$, $a_{3k-1} = \pi \to \pi$ und $a_{3k-2} = 2 + 1 + 1/(3k-2) \to 3$ für $k \to \infty$. Also hat (a_n) die Häufungspunkte 1, π und 3.
  Weitere Häufungspunkte gibt es nicht: Angenommen, $H \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3, \pi\}$ ist ein Häufungspunkt von (a_n). Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ von (a_n) mit $a_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} H$. Wir betrachten die folgenden Teilmengen von Indices dieser Teilfolge:

  $$R_0 := \{\, j \in \mathbb{N} : \, n_j = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \,\},$$

  $$R_1 := \{\, j \in \mathbb{N} : \, n_j = 3k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \,\},$$

  $$R_2 := \{\, j \in \mathbb{N} : \, n_j = 3k - 2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \,\}.$$

  Mindestens eine dieser Menge hat unendlich viele Elemente. Wir behandeln den Fall, dass dies für R_0 zutrifft, ausführlich; die beiden anderen Fälle verhalten sich analog. Wir gehen also davon aus, dass R_0 unendlich viele Elemente hat. Dann hat (a_{n_j}) also eine Teilfolge $(a_{n_{j_l}})_{l \in \mathbb{N}}$, deren Indices alle durch 3 teilbar sind; also folgt $a_{n_{j_l}} = 1 + 1/2^{n_{j_l}} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Andererseits folgt gilt auch $a_{n_{j_l}} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} H$ wie für jede Teilfolge (a_{n_j}), siehe Aufgabe 6 a) vom 5. Übungsblatt. Daraus folgt schließlich der Widerspruch $H = 1$.

Fazit: (a_n) hat genau die Häufungspunkte 1, 3 und π.

Aufgabe 9

Zum Beispiel folgende Folgen erfüllen das Verlangte:

i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $a_n := 7 + (-1)^n \cdot 6$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bemerkung:
Die gleiche Folge läßt sich alternativ auch so beschreiben:
$a_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 13 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

ii) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n := 0$ für gerade n und $b_n := n$ für ungerade n.
Bemerkung:
Das ist kein Widerspruch zu Ausage 7.2.A2 der Vorlesung: (b_n) hat den uneigentlichen Häufungspunkt ∞.

iii) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := (-1)^n n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bemerkung:
Die gleiche Folge läßt sich alternativ auch so beschreiben:
$c_n := \begin{cases} -n & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ n & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

iv) $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n := 2010 + \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bemerkung:
Ein anderes Beispiel einer Folge mit der gewünschten Eigenschaft ist (salopp geschrieben):
$(\tilde{d}_n)_{n \in \mathbb{N}} := (0, 5000, 2010, 2010, 2010, 2010, \ldots)$.

Aufgabe 10

Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, dass $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Induktionsanfang: Nach Voraussetzung ist $0 < a < 1$. Daher gilt $a_1 := \frac{1}{2}a \in (0, \frac{1}{2}) \subset (0, 1)$.
Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $0 < a_n < 1$ (IV).
Es ist $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + a_n^2) \geqslant \frac{1}{2}a > 0$ (dazu brauchen wir die Induktionsvoraussetzung gar nicht). Aus $0 < a_n < 1$ folgt $a_n^2 < 1$ und damit

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a + a_n^2) < \tfrac{1}{2}(a + 1) < \tfrac{1}{2}(1 + 1) = 1.$$

Nun zeigen wir mittels vollständiger Induktion, dass $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Induktionsanfang: Es ist $a_2 - a_1 = \frac{1}{2}(a + a_1^2) - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a_1^2 = \frac{1}{2}a^2 \geqslant 0$.
Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ (IV). Dann folgt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a + a_{n+1}^2) - \tfrac{1}{2}(a + a_n^2) = \tfrac{1}{2}(a_{n+1}^2 - a_n^2) = \tfrac{1}{2}\,\underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{\geqslant 0 \text{ nach IV}}\,\underbrace{(a_{n+1} + a_n)}_{>0} \geqslant 0\,.$$

Da (a_n) monoton wächst und nach oben durch 1 beschränkt ist, konvergiert die Folge gegen einen gewissen Grenzwert $c \leqslant 1$. Diesen erhalten wir, indem wir in der Gleichung $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + a_n^2)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen. Dies liefert

$$c = \tfrac{1}{2}(a + c^2), \quad \text{also} \quad c^2 - 2c + a = 0, \quad \text{d. h.} \quad c_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}.$$

Da uns bereits $c \leqslant 1$ bekannt ist, ergibt sich $c = 1 - \sqrt{1-a}$.

Aufgabe 11 (P)

Wir zeigen zuerst mit vollständiger Induktion: $(*)$ $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$:
I.A.: $(n = 0)$ $\frac{1}{2} \leq a_0 \leq$ ist wegen $a_0 = 1$ wahr.
I.S.: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für dieses n gelte $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ (I.V.). Daraus folgt $\frac{3}{2} \leq a_n + 1 \leq 2$ und daraus $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{a_n + 1} \leq \dfrac{2}{3} \leq 1$, also $\frac{1}{2} \leq a_{n+1} \leq 1$, was den Induktionsbeweis abschließt.
Damit folgt für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left|\frac{1}{1 + a_{n+1}} - \frac{1}{1 + a_n}\right| = \left|\frac{(1 + a_n) - (1 + a_{n+1})}{(1 + a_{n+1})(1 + a_n)}\right| =$$

$$\frac{|a_{n+1} - a_n|}{(1 + a_{n+1})(1 + a_n)} \overset{(*)}{\leq} \frac{|a_{n+1} - a_n|}{(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})} = \frac{4}{9}|a_{n+1} - a_n|.$$

Gemäß Satz 5.3.2 der Ergänzungsvorlesung (mit $\theta := \frac{4}{9} \in (0, 1)$) folgt daraus, dass (a_n) konvergiert. Schließlich bestimmen wir nun noch $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Aus $(*)$ folgt sofort $a \geq \frac{1}{2}$. Außerdem folgt aus der Rekursionsformel beim Grenzübergang $n \to \infty$ $a = \dfrac{1}{1+a}$. Daraus folgt $a(1+a) = 1$ und damit $a = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Wegen $a \geq \frac{1}{2}$ folgt schließlich $a = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Aufgabe 12 (P)

Zunächst betrachten wir den Fall $a = 0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ müssen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so finden, dass $|\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$ gilt.
Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $a_n \to 0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geqslant m\,. \tag{$*$}$$

Mit diesem festen m gilt dann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k \xrightarrow{n\to\infty} 0\,,$$

denn die hier auftretende Summe ist von n unabhängig. Aus dieser Konvergenz folgt wiederum, dass ein $n_1 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geqslant n_1\,. \tag{$**$}$$

Setzen wir $n_0 := \max\{m, n_1\}$, so gilt für alle $n \geqslant n_0$ wegen der Dreiecksungleichung

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\,,$$

und wegen $n \geqslant n_1$ und $(**)$ sowie $n \geqslant m$ und $(*)$ folgt

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Damit ist die Behauptung im Falle $a = 0$ bewiesen. Ist $a \neq 0$, dann betrachtet man die Folge $b_n := a - a_n$. Wegen $b_n \to 0$ folgt mit dem schon Bewiesenen

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} b_k \xrightarrow{n \to \infty} 0\,,$$

und wegen

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a - a_k) = a - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

impliziert dies $\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \to a$, so dass auch der allgemeine Fall erledigt ist.