

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Seien $0 < a < b$. Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$a_1 := a, \quad b_1 := b, \quad a_{n+1} := \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Zeigen Sie, dass die Folge der Intervalle $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung bildet.
- b) Welche Zahl wird dadurch bestimmt?

Hinweis: Betrachten Sie $a_{n+1}b_{n+1}$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$
- d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n + (-1)^n}$
- f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\frac{1}{n}}$

Aufgabe 3

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (wobei $n \in \mathbb{N}$).

- a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.
- c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

Aufgabe 4

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n := \frac{(1 + \frac{1}{2}(-1)^n)^n}{n^2}$ (wobei $n \in \mathbb{N}$).

- a) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sagen?
- b) Welche Aussage liefert das Wurzelkriterium in Bezug auf die Reihe in a)?

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die komplexe Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 6

a) Beweisen Sie den *Cauchyschen Verdichtungssatz*:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

Folgt dies auch, wenn man statt der Monotonie nur $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzt?

b) Es sei $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Setze für $x \geq 0$: $x^\alpha := \sqrt[q]{x^p}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a), dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha > 1$ ist.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

jedoch divergiert.

Aufgabe 8

Für welche $z \in \mathbb{C}$ liegt Konvergenz vor?

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \qquad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$$

Aufgabe 9 (P)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen. Zeigen Sie:

a) Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergent, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

b) Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

Aufgabe 10 (P)

Die reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei monoton fallend und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiere. Zeigen Sie:

$$n \cdot a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Folgt dies auch, wenn man statt der Monotonie nur $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzt?