KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Mittels vollständiger Induktion zeigen wir zunächst $a_n > 0$ und $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
IA: Es sind $a_1 = a > 0$ und $b_1 = b > 0$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $a_n > 0$ und $b_n > 0$ (IV). Dann ist

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \overset{\text{IV}}{>} 0 \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n) \overset{\text{IV}}{>} 0.$$

Hieraus folgt $a_n + b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist sichergestellt, dass $a_n + b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wohldefiniert ist.

a) Um zu begründen, dass die Folge der Intervalle $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung bildet, müssen wir nachweisen:

i) $a_n \leqslant b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend;

iii) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Zu i): Wir zeigen durch vollständige Induktion $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

IA: Nach Voraussetzung ist $a_1 = a < b = b_1$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $a_n < b_n$ (IV). Dann folgt

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n) - \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = \frac{(a_n+b_n)^2 - 4a_nb_n}{2(a_n+b_n)} = \frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)} \overset{\text{IV}}{>} 0.$$

Zu ii): Wegen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2b_n}{a_n+b_n} \overset{\text{i)}}{\geqslant} \frac{2b_n}{b_n+b_n} = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fällt monoton, denn

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_n+b_n) - b_n = \frac{1}{2}(a_n-b_n) \overset{\text{i)}}{\leqslant} 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zu iii): Nach i) und ii) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_1 = b.$$

Also sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt mit $a \leqslant a_n \leqslant b$ und $a \leqslant b_n \leqslant b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da beide Folgen überdies monoton sind, existieren nach dem Monotoniekriterium (vgl. Satz 7 in 7.5) die Grenzwerte $g_1 := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $g_2 := \lim_{n\to\infty} b_n$. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in der Rekursionsformel für (b_n) ergibt sich die Gleichung

$$g_2 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \quad \Leftrightarrow \quad g_1 = g_2.$$

b) Wir zeigen per vollständiger Induktion, dass $a_n b_n = ab$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

IA: Für $n = 1$ ist nach Definition $a_n b_n = ab$ erfüllt.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $a_n b_n = ab$ (IV). Dann folgt mit den Rekursionsformeln

$$a_{n+1} b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{1}{2}\big(a_n + b_n\big) = a_n b_n \overset{\text{IV}}{=} ab.$$

Wegen $a_n b_n = ab$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Andererseits ist nach den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = g_1 g_2 \overset{\textbf{a)}}{=} g_1^2\,,$$

so dass $g_1^2 = ab$ folgt. Da aufgrund von $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $g_1 \geqslant 0$ gilt, ist $g_1 = \sqrt{ab}$. Zusammenfassend erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}\,,$$

so dass die Zahl $\sqrt{ab}$ durch die Intervallschachtelung bestimmt wird.

Aufgabe 2

a) Die Bernoullische Ungleichung liefert $2^n = (1+1)^n \geqslant 1 + n \geqslant n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. es ist stets $\sqrt[n]{n} \leqslant 2$. Somit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}\right| \leqslant \frac{2}{n!} =: b_n\,.$$

Bekanntlich konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (mit Reihenwert e), also ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, und die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ folgt mit dem Majorantenkriterium. Insbesondere konvergiert die Reihe.

b) Es gilt

$$\sqrt{1+n^2} - n = \frac{1 + n^2 - n^2}{\sqrt{1+n^2} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2} + n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{4n^2} + n} = \frac{1}{3n} =: c_n \geqslant 0,$$

und da die Reihe über c_n divergiert, gilt dies nach dem Minorantenkriterium auch für die zu untersuchende Reihe. Insbesondere ist die Reihe nicht absolut konvergent.

c) Für alle $n \geqslant 3$ gilt $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ und daher $(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n \leqslant (\frac{5}{6})^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{5}{6})^n$ ist also eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$. Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$ absolut konvergent. Insbesondere konvergiert die Reihe.

d) Ist $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ gesetzt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(1+1/n)^2}{(2+2/n)(2+1/n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{(1+0)^2}{(2+0)(2+0)} = \frac{1}{4}.$$

Infolgedessen ist $|a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|a_n|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Daher liefert das Quotientenkriterium die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Insbesondere konvergiert die Reihe.

e) Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $a_n := \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n} = (-1)^n b_n$ mit $b_n := \frac{1}{3n+(-1)^n}$. Die Folge (b_n) konvergiert gegen 0. Ferner ist (b_n) monoton fallend, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3(n+1)+(-1)^{n+1}}{3n+(-1)^n} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geqslant (-1)^n - (-1)^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad 3 \geqslant 2(-1)^n$$

und die letzte Ungleichung ist offenkundig wahr. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$. Wegen

$$|a_n| = \frac{1}{3n+(-1)^n} \geqslant \frac{1}{3n+n} = \frac{1}{4n}$$

und der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Deshalb ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent.

f) Wir wissen, dass $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ gilt. Daher ist die Folge $(\sqrt[n]{n})$ beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante C so, dass $\sqrt[n]{n} \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Hiermit erhalten wir

$$n^{-1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \geqslant \frac{1}{Cn}\,.$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist, folgt die Divergenz der zu untersuchenden Reihe aus dem Minorantenkriterium. Insbesondere ist die Reihe nicht absolut konvergent.

Aufgabe 3

a) Offenbar ist $a_1 = 2 > 0$. Für jedes $n > 1$ gilt wegen $n > \sqrt{n}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Die Konvergenz von (a_n) gegen 0 ist klar wegen $1/\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_N := \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{-1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

Die erste Summe ist die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert; insbesondere ist die Folge ihrer Partialsummen $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante C mit $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leqslant C$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$s_N \leqslant C - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \qquad \text{für jedes } N \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund von $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty$ für $N \to \infty$ folgt $s_N \xrightarrow{N\to\infty} -\infty$, d.h. die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist tatsächlich divergent.

c) Das Leibnizkriterium ist nicht anwendbar, weil die Folge (a_n) nicht monoton ist.

Aufgabe 4

a) Offenbar gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zunächst zum Quotientenkriterium: Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1-\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Folglich gibt es kein $\vartheta \in (0,1)$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \vartheta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Ferner ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ nicht erfüllt, denn für gerade $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(1+\frac{1}{2})^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{3}{2})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Das Quotientenkriterium liefert somit keine Entscheidung.

b) Das Wurzelkriterium kann dennoch eine Entscheidung bringen, und so ist es in diesem Falle tatsächlich. Für gerades $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2},$$

d. h. es gilt $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ für unendlich viele n, und dies impliziert die Divergenz der Reihe.

Aufgabe 5

Wegen $i^4 = (-1)^2 = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$i^{4m-3} = i, \qquad i^{4m-2} = -1, \qquad i^{4m-1} = -i, \qquad i^{4m} = 1.$$

Folglich erhalten wir für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{4N} \frac{i^n}{n} &= \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{i^{4m-3}}{4m-3} + \frac{i^{4m-2}}{4m-2} + \frac{i^{4m-1}}{4m-1} + \frac{i^{4m}}{4m} \right) \\
&= i \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-1} \right) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{1}{4m} - \frac{1}{4m-2} \right) \\
&= i \left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + - \ldots + \tfrac{1}{4N-3} - \tfrac{1}{4N-1} \right) + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{6} + - \ldots + \tfrac{1}{4N} - \tfrac{1}{4N-2} \right) \\
&= i \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \frac{1}{2k}.
\end{aligned}$$

Da $(\frac{1}{2k-1})_k$ bzw. $(\frac{1}{2k})_k$ monoton fallende Nullfolgen sind, konvergieren diese Summen für $N \to \infty$ nach dem Leibnizkriterium. Damit wissen wir: Wenn wir mit s_N die N-te Partialsumme der zu untersuchenden Reihe bezeichnen, dann konvergiert s_{4N} für $N \to \infty$. Für $m \in \{1,2,3\}$ gilt

$$s_{4N+m} = s_{4N} + \sum_{n=4N+1}^{4N+m} \frac{i^n}{n} \xrightarrow{N\to\infty} \lim_{N\to\infty} s_{4N}$$

wegen $|i^n/n| = 1/n$. Folglich (vergleiche Blatt 5, Aufgabe 6) konvergiert s_N für $N \to \infty$, d.h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ konvergiert. Sie ist aber nicht absolut konvergent, weil die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{i^n}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Aufgabe 6

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_{n+1} \leqslant a_n$ und $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

Beweis:

"$\Rightarrow$": Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Wir setzen $b := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Um die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ zu zeigen, müssen wir begründen, dass die Folge $(s_K)_{K\in\mathbb{N}} := (\sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k})_{K\in\mathbb{N}}$ für $K \to \infty$ konvergiert. Da (a_n) monoton fallend ist, gilt für jedes $K \in \mathbb{N}$

$$b \geqslant a_1+a_2+(a_3+a_4)+(a_5+\ldots+a_8)+\ldots+(a_{2^{K-1}+1}+\ldots+a_{2^K}) \geqslant \frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\ldots+2^{K-1}a_{2^K}.$$

Also ist $s_K = a_1+2a_2+4a_4+\ldots+2^K a_{2^K} \leqslant 2b$ für jedes $K \in \mathbb{N}$, d.h. $(s_K)_{K\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Wegen $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(s_K)_{K\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Nach dem Monotoniekriterium ist $(s_K)_{K\in\mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

"$\Leftarrow$": Nun konvergiere $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. Wir schreiben wie zuvor $(s_K)_{K\in\mathbb{N}} := (\sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k})_{K\in\mathbb{N}}$. Nach Voraussetzung ist (s_K) konvergent, etwa $s_K \to s$ $(K \to \infty)$.

Ist $b_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$ für $N \in \mathbb{N}$ gesetzt, so gilt für $K \in \mathbb{N}$ mit $2^K \geqslant N$

$$\begin{aligned} b_N &= a_1 + a_2 + \ldots + a_N \leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \ldots + a_7) + \ldots + (a_{2^K} + \ldots + a_{2^{K+1}-1}) \\ &\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^K a_{2^K} = s_K \leqslant s. \end{aligned}$$

Also ist (b_N) nach oben durch s beschränkt. Da (b_N) überdies monoton wachsend ist, liefert das Monotoniekriterium die Konvergenz von (b_N), d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Setzt man statt der Monotonie nur $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraus, so ist die Aussage i.a. falsch. Ist beispielsweise die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{falls } n = 2^k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{16}, \ldots)$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ (geometrische Reihe) mit Wert $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, jedoch ist $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ divergent.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$. Im Fall $\alpha < 0$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, weil $(\frac{1}{n^\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist.

Sei nun $\alpha \geqslant 0$. Setze $a_n := \frac{1}{n^\alpha}$. Dann sind $a_n > 0$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\frac{n}{n+1})^\alpha = (1 - \frac{1}{n+1})^\alpha \leqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also genügt (a_n) den Voraussetzungen von Teil a). Dieser liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big)^k \quad \text{konvergent}$$

$$\overset{\text{geom. Reihe}}{\Leftrightarrow} \quad \left|\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Aufgabe 7

Die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil $(1/\sqrt{n})$ eine monoton fallende Nullfolge ist.
Angenommen, $1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots$ konvergiert. Dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$ (die Folge der Partialsummen der zweiten Reihe sind eine Teilfolge der Partialsummen der ersten.)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{4n}} + \frac{1}{\sqrt{4n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert (vgl. Aufgabe 4 b)), ist $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ eine divergente Minorante für die Reihe in $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$. Das ist ein Widerspruch zur Konvergenz dieser Reihe.

Aufgabe 8

a) Wir ziehen das Wurzelkriterium zu Rate:

$$\sqrt[n]{|z^n/n^2|} = \frac{|z|}{(\sqrt[n]{n}\,)^2} \xrightarrow{n\to\infty} |z|.$$

Damit wissen wir: Für $|z| < 1$ liegt Konvergenz vor, für $|z| > 1$ jedoch Divergenz. Untersuchen wir noch den Fall $|z| = 1$: Dann gilt

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2},$$

d. h. die Konvergenz folgt mit dem Majorantenkriterium.

Insgesamt ergibt sich: Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $|z| \leqslant 1$.

b) Diesmal verwenden wir das Quotientenkriterium: Für $a_n := n!\, z^n$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!\,|z|^{n+1}}{n!\,|z|^n} = (n+1)|z|.$$

Dieser Ausdruck strebt für $z \neq 0$ gegen ∞, für $z = 0$ gegen 0. Also konvergiert die Reihe nur für $z = 0$.

c) Zunächst müssen wir die z von der Konkurrenz ausschließen, für die $z^{2n} = -1$ für ein n vorkommt. Alle derartigen z haben Betrag 1; für alle anderen z mit $|z| = 1$ gilt

$$\left|\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right| = \frac{|z|^n}{|1+z^{2n}|} = \frac{1}{|1+z^{2n}|} \geqslant \frac{1}{1+|z|^{2n}} = \frac{1}{2}.$$

Die Reihenglieder bilden also keine Nullfolge, d. h. die Reihe kann für $|z| = 1$ nicht konvergieren.

Nun sei $r := |z| < 1$. Wir haben $|1 + z^{2n}| \geqslant 1 - |z^{2n}| = 1 - r^{2n}$ wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung. Also ist

$$\left|\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right| \leqslant \frac{r^n}{1-r^{2n}} \leqslant \frac{r^n}{1-r^2}$$

und mit dem Majorantenkriterium folgt Konvergenz.

Im Falle $r > 1$ verwenden wir $|1 + z^{2n}| \geqslant |z^{2n}| - 1 = r^{2n} - 1$. Wegen $r^{2n} \to \infty$ für $n \to \infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $r^{2n} \geqslant 2$ für alle $n \geqslant N$. Für solche n ist dann $1 \leqslant \frac{1}{2}r^{2n}$ und wir erhalten

$$\left|\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right| \leqslant \frac{r^n}{r^{2n}-1} \leqslant \frac{r^n}{r^{2n}-\frac{1}{2}r^{2n}} = \frac{2}{r^n} =: c_n \quad \text{für } n \geqslant N.$$

Da $\sum_{n=N}^\infty c_n$ konvergiert, gilt dies wegen des Majorantenkriteriums auch für $\sum_{n=N}^\infty a_n$, wobei $a_n := z^n/(1 + z^{2n})$. Dann konvergiert aber auch $\sum_{n=0}^\infty a_n$.

Insgesamt: Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $|z| \neq 1$.

Aufgabe 9 (P)

a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ sowie $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ und $\sum_{n=1}^\infty b_n^2$ konvergent. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^N |a_n b_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^N a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^N b_n^2\right)^{1/2}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ und $\sum_{n=1}^\infty b_n^2$ ist die rechte Seite beschränkt durch $(\sum_{n=1}^\infty a_n^2)^{1/2}(\sum_{n=1}^\infty b_n^2)^{1/2}$. Deshalb ist die Folge $(\sum_{n=1}^N |a_n b_n|)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergent bzw. die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ absolut konvergent. Hieraus ergibt sich die Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$.

b) Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ und $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ folgt laut a) die Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n}$.

Aufgabe 10 (P)

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, also gilt $a_n \to 0$; da die Folge (a_n) zudem monoton fällt, ist $a_n \geqslant 0$ für alle n.
Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N_0} a_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Wegen $a_n \to 0$ gilt auch $N_0 \cdot a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Somit existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|N_0 \cdot a_n| < \varepsilon/2$ für alle $n \geqslant N_1$. Damit ergibt sich für jedes $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \max\{N_0, N_1\}$

$$N \cdot a_N = N_0 \cdot a_N + \sum_{n=N_0+1}^{N} a_N \leqslant N_0 \cdot a_N + \sum_{n=N_0+1}^{N} a_n < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

(Bei der ersten Abschätzung benutzen wir, dass die Folge (a_n) monoton fällt.)
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist damit $N \cdot a_N \to 0$ für $N \to \infty$ bewiesen.

Die Voraussetzung $a_n \geqslant 0$ statt der Monotonie genügt nicht: Man betrachte das Beispiel

$$a_n = \begin{cases} 1/n \,, & \text{falls } n \text{ eine Zweierpotenz ist,} \\ 0 \,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, weil $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ konvergiert. Wenn n eine Zweierpotenz ist, gilt jedoch $n \cdot a_n = 1$; die Folge $(n \cdot a_n)$ konvergiert also nicht gegen 0.