

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**
8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ mit Hilfe **a)** des Cauchy-Produkts und **b)** der Reihenwerte.

Aufgabe 2

Berechnen Sie für jedes $q \in (0, 1)$ den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)q^n$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit sich selbst. Bilden Sie dann das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie: **i)** $2e^{\frac{5}{4}\pi i}$, **ii)** $\arg e^{3-\frac{3}{8}\pi i}$, **iii)** $|e^{-1+\pi^2 i}|$.

b) Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen:

i) $e^{2z} = 4$, **ii)** $|\exp(z^2)| = 1$, **iii)** $e^{i|z|} = -1$, **iv)** $e^{z^2-3z+5} = 0$.

Aufgabe 4

a) Geben Sie die Lösungen der Gleichungen $z - 1 = 0$, $z^2 - 1 = 0$, $z^3 - 1 = 0$ und $z^4 - 1 = 0$ jeweils in der Form $e^{\varphi i}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ an.

b) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung des Polynoms $z^n - 1$ in Linearfaktoren.

Aufgabe 5

Zeigen Sie mit Hilfe des Leibnizkriteriums, dass $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ für alle $x \in [0, 2]$ gilt.

Aufgabe 6

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition, dass f in 0 stetig ist.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Folgenstetigkeitscharakterisierung, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

Aufgabe 7 (P)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \max\{n - n^2|x - \frac{1}{n}|, 0\}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Skizzieren Sie die Schaubilder von f_1, f_2, f_3 und berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\frac{1}{2}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\frac{1}{100}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\frac{1}{n}).$$

Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 8 (P)

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f, f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere auf D gleichmäßig gegen f . Zeigen Sie: Sind alle f_n beschränkt, so ist auch f beschränkt.

Hinweise:

Übungsklausur

Die Übungsklausur findet am Samstag, den 29.1.2011, um 08.00-10.00 Uhr statt. Die Teilnahme ist freiwillig. Eine Anmeldung ist nicht erforderlich, sofern Sie keinen Übungsschein benötigen.

Übungsschein

Studierende, die einen Übungsschein benötigen, können einen solchen durch die erfolgreiche Teilnahme an der Übungsklausur erwerben. Bitte melden Sie sich dazu (**bis zum 26.1.2011**) im Lehrstuhl-Sekretariat bei Frau Blach.

Weihnachtsferien

Die letzten HM-I-Veranstaltungen im Jahr 2010 finden am Donnerstag, den 23.12.2010, statt (Physiker-Ergänzungsvorlesung und Tutorien).

Die ersten HM-I-Veranstaltungen im Jahr 2011 finden am Freitag, den 7.1.2011, statt (Saalübung und Tutorien).